MATHÉMATIQUES I - ESSEC E 2011

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

PROBLÈME 1 - Évolution des intentions de vote

Dans une élection à venir, deux candidats A et B se présentent.
Un groupe d'électeurs est composé de m individus, avec $m \geqslant 2$.
Initialement, au jour appelé “ jour 0 ”, le nombre d'individus préférant le candidat A vaut a (il y en a donc $m-a$ préférant le candidat B).
On peut alors reformuler un peu l'énoncé pour une meilleure compréhension ; ensuite, chaque jour :

— un individu E_1 est choisi au hasard dans le groupe

— il rencontre un autre individu E_2 du groupe, pris au hasard également, et il lui parle des élections.

— Si leurs intentions de vote diffèrent, E_1 convainc E_2 de voter comme lui.

Pour tout entier naturel n, on note X_n le nombre d'individus du groupe ayant l'intention de voter pour le candidat A le soir du n-ième jour.
Ainsi, X_n est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, m]\!]$.
On remarque que X_0 est une variable aléatoire certaine : $P(X_0 = a) = 1$.

Partie I - Un cas particulier : $m = 4$

Dans cette partie, on étudie le cas d'un groupe formé de quatre électeurs.

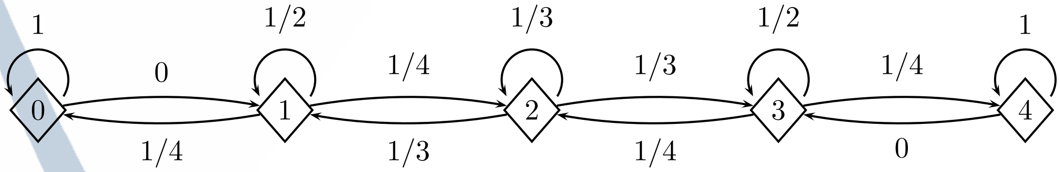
1. Soit i et j deux entiers dans $[\![0, 4]\!]$. On note $p_{i,j}$ la probabilité pour qu'il y ait exactement j personnes dans le groupe ayant l'intention de voter pour A un jour donné, sachant qu'il y en avait i la veille.

   On utilisera dans la suite les événements :
   $A_1 =$« l'électeur E_1 a l'intention de voter pour A » et $B_1 = \overline{A_1}$,
   $A_2 =$ « l'électeur E_2 a l'intention de voter pour B » et $B_2 = \overline{A_2}$.

   a) Si un jour donné, personne ne vote pour A : tous votent pour B, et quelles que soient les deux personnes qui se rencontrent, elles sont toujours du même avis en n'en changent donc jamais. On a bien $p_{0,0} = 1$, et de même $p_{4,4} = 1$ (tout le monde vote définitivement pour A).

   b) Pour $|i - j| \geqslant 2$, $p_{i,j}$ est la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes qui changent d'avis (dans un sens ou dans l'autre) d'un jour au suivant. C'est bien sûr impossible, puisque seul l'électeur E_2 peut éventuellement changer d'avis sur une journée.

   c) $p_{1,0}$ est la probabilité que le seul votant pour A change d'avis : c'est donc qu'il a rencontré un des 3 électeurs E_1 de B, et qu'il est E_2 :
   $p_{1,0} = P(B_1 \cap A_2) = P(B_1).P_{B_1}(A_2) = \dfrac{3}{4}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}$.
   De même : $p_{1,2} = P(A_1 \cap B_2) = P(A_1).P_{A_1}(B_2) = \dfrac{1}{4}.1 = \dfrac{1}{4}$.
   $p_{1,1}$ est la probabilité que le nombre de votants pour A reste stable à une seule personne : la seule possibilité est que E_1 soit un électeur de B, et en rencontre un autre E_2 qui vote aussi pour B : $p_{1,1} = P(B_1).P_{B_1}(B_2) = \dfrac{3}{4}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2}$.
   On peut alors compléter le diagramme, qui contient ces probabilités des transitions entre les différentes valeurs possibles du nombre de votants pour A :



$p_{2,1} = P(B_1).P_{B_1}(A_2) = \frac{2}{4}.\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$p_{2,2} = P(B_1).P_{B_1}(B_2) + P(A_1).P_{A_1}(A_2) = \frac{2}{4}.\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

$p_{2,3} = P(A_1).P_{A_1}(B_2) = \frac{2}{4}.\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

$p_{0,1} = p_{4,3} = 0$ car dès que tout le monde vote pour le même candidat, les avis n'évoluent plus.

2. On définit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n, on définit la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

a) Le schéma précédent permet d'exprimer le lien entre la loi de X_n et celle de X_{n+1}, via la formule des probabilités totales, et le s.c.e. $([X_n = k])_{0 \leqslant k \leqslant 4}$ associé à X_n :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) =& P(X_n = 0).P_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 1).P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 2).P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) \\ &+ P(X_n = 3).P_{X_n=3}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 4).P_{X_n=4}(X_{n+1} = 1) \\ =& 0 + \frac{1}{2}.P(X_n = 1) + \frac{1}{3}.P(X_n = 2) + 0 + 0 \\ P(X_{n+1} = 2) =& P(X_n = 0).P_{X_n=0}(X_{n+1} = 2) + P(X_n = 1).P_{X_n=1}(X_{n+1} = 2) + P(X_n = 2).P_{X_n=2}(X_{n+1} = 2) \\ &+ P(X_n = 3).P_{X_n=3}(X_{n+1} = 2) + P(X_n = 4).P_{X_n=4}(X_{n+1} = 2) \\ =& 0 + \frac{1}{4}.P(X_n = 1) + \frac{1}{3}.P(X_n = 2) + \frac{1}{4}.P(X_n = 3) \\ P(X_{n+1} = 3) =& P(X_n = 0).P_{X_n=0}(X_{n+1} = 3) + P(X_n = 1).P_{X_n=1}(X_{n+1} = 3) + P(X_n = 2).P_{X_n=2}(X_{n+1} = 3) \\ &+ P(X_n = 3).P_{X_n=3}(X_{n+1} = 3) + P(X_n = 4).P_{X_n=4}(X_{n+1} = 3) \\ =& 0 + 0 + \frac{1}{3}.P(X_n = 2) + \frac{1}{2}.P(X_n = 3) + 0 \end{aligned}$$

Matriciellement, on obtient bien :

$U_{n+1} = \begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 1) \\ P(X_{n+1} = 2) \\ P(X_{n+1} = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix} = M.U_n$.

La récurrence habituelle (la relation précédente est de type géométrique), donne bien :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = M^n.U_0.$$

b) Un réel λ est valeur propre de la matrice M si et seulement si $M - \lambda.I_3$ est non-inversible :

$M - \lambda.I_3 = \begin{pmatrix} 1/2-\lambda & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3-\lambda & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1/4 & 1/3-\lambda & 1/4 \\ 1/2-\lambda & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2-\lambda \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{L_2 \leftarrow 1/4L_2 - (1/2-\lambda)L_1} \begin{pmatrix} 1/4 & 1/3-\lambda & 1/4 \\ 0 & 1/12 - (1/2-\lambda)(1/3-\lambda) & -1/4(1/2-\lambda) \\ 0 & 1/3 & 1/2-\lambda \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1/4 & 1/3-\lambda & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2-\lambda \\ 0 & -\lambda^2+5/6\lambda-1/12 & -1/4(1/2-\lambda) \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow 1/3L_3 - (-\lambda^2+5/6\lambda-1/12)L_2} \begin{pmatrix} 1/4 & 1/3-\lambda & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2-\lambda \\ 0 & 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix}$

où :

$Q(\lambda) = \frac{1}{3}(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\lambda) - (\frac{1}{2} - \lambda)(-\lambda^2 + \frac{5}{6}\lambda - \frac{1}{12}) = (\frac{1}{2} - \lambda)(\cancel{\frac{1}{12}} - \lambda^2 + \frac{5}{6}\lambda - \cancel{\frac{1}{12}}) = (\frac{1}{2} - \lambda).\lambda.(-\lambda + \frac{5}{6})$.

La matrice échelonnée est alors non-inversible si et seulement si $Q(\lambda) = 0$: les valeurs propres de M sont donc $\boxed{0 \leqslant \alpha = 0 < \beta = \frac{1}{2} < \gamma = \frac{5}{6} < 1}$.

La matrice M de format 3×3, possède donc trois valeurs propres distinctes : elle vérifie donc le critèr suffisant de diagonalisabilité.

Il existe une matrice de passage P (formée de vecteurs propres pour chacune des trois valeurs propres telle que : $P^{-1}MP = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5/6 \end{pmatrix}}_{=D}$ est bien diagonale.

c) La relation précédente se réécrit : $M = PDP^{-1}$, et la récurrence habituelle donne :

$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = PD^nP^{-1}$, où $D^n = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (5/6)^n \end{pmatrix}$ comme puissance d'une matrice diagonale.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = PD^nP^{-1}U_0$, où $P^{-1}U_0$ est une matrice colonne du type $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ au vu des formats des matrices, et : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = P\begin{pmatrix} a.0^n \\ b.(1/2)^n \\ c.(5/6)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.p_{1,1}.0^n + b.p_{1,2}.(1/2)^n + c.p_{1,3}.(5/6)^n \\ a.p_{2,1}.0^n + b.p_{2,2}.(1/2)^n + c.p_{2,3}.(5/6)^n \\ a.p_{3,1}.0^n + b.p_{3,2}.(1/2)^n + c.p_{3,3}.(5/6)^n \end{pmatrix}$.

d) Au vu des expressions précédemment obtenues, et puisque $0 < 1/2 < 5/6 < 1$:
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$, ce qui donne directement :

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 1) = 0 = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = 2) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = 3)$$

3. Comme X_n est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0;4]\!]$, on a :
$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X_n = 0) + P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$
$P(X_n = 0) + P(X_n = 4) = 1 - P(X_n = 1) - P(X_n = 2) - P(X_n = 3)$, ce qui donne d'après la question précédente :
$\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0) + P(X_n = 4) = 1 - 0 - 0 - 0 = 1$.
On interprète ce résultat en disant qu'au bout d'un grand nombre de jours, il devient presque certain que tous les électeurs finissent par être du même avis : tous pour A, ou tous pour B...

Partie II - Le cas général

On revient dans cette partie au cas général d'un groupe de m électeurs.
On note $\pi_{n,k} = P(X_n = k)$, la probabilité pour qu'il y ait exactement k électeurs envisageant de voter pour A à l'issue du n-ième jour.

4. Soit n un entier naturel.

a) ⋆ Sachant qu'il y a k personnes prévoyant de voter pour A au jour n (et donc $m-k$ pour B) :
$[X_{n+1} = k+1]$ est réalisé ssi E_1 vote pour A, et convainc E_2 qui voulait voter pour B, de changer d'avis :
$P_{X_n=k}(X_{n+1} = k+1) = P(A_1 \cap B_2) = P(A_1).P_{A_1}(B_2) = \frac{k}{m} \times \frac{m-k}{m-1} = \frac{k(m-k)}{m(m-1)}$.

⋆ Sachant qu'il y a k personnes prévoyant de voter pour A au jour n (et donc $m-k$ pour B) :
$[X_{n+1} = k-1]$ est réalisé ssi E_1 vote pour B, et convainc E_2 qui voulait voter pour A, de changer d'avis :
$P_{X_n=k}(X_{n+1} = k-1) = P(B_1 \cap A_2) = P(B_1).P_{B_1}(A_2) = \frac{m-k}{m} \times \frac{k}{m-1} = \frac{k(m-k)}{m(m-1)}$.

⋆ Sachant qu'il y a k personnes prévoyant de voter pour A au jour n (et donc $m-k$ pour B) :
$[X_{n+1} = k]$ est réalisé ssi les deux électeurs qui se rencontrent veulent voter pour la même personne, et ne changent donc pas d'avis ni l'un, ni l'autre :
$P_{X_n=k}(X_{n+1} = k) = P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap B_2) = \frac{k}{m} \times \frac{k-1}{m-1} + \frac{m-k}{m} \times \frac{m-k-1}{m-1}$
$= \frac{1}{m(m-1)}[k(k-1) + (m-k)(m-k-1) = \frac{1}{m(m-1)}[k^2 - k + m(m-1) - km - km + k^2 + k]$
$= \frac{2k^2 - 2km + m(m-1)}{m(m-1)} = 1 - 2\frac{k(m-k)}{m(m-1)}$.

b) Soit $k \in [\![1; m-1]\!]$: $\pi_{n+1,k} = P(X_{n+1} = k)$ est la probabilité d'avoir$k$ votants pour A au jour $n+1$. D'après l'étude précédente, il n' y a que trois valeurs possibles de ce nombre de votants au jour n qui

précède :
soit $k-1$, soit k, soit $k+1$, c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=k)=&P([X_n=k-1]\cap[X_{n+1}=k])+P([X_n=k]\cap[X_{n+1}=k])+P([X_n=k+1]\cap[X_{n+1}=k])\\=&P(X_n=k-1).P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1}=k)+P(X_n=k).P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k)\\&+P(X_n=k+1).P_{[X_n=k+1]}(X_{n+1}=k)\\=&\frac{(k-1)(m-(k-1))}{m(m-1)}.\pi_{n,k}+\left(1-2\frac{k(m-k)}{m(m-1)}\right).\pi_{n,k}+\frac{(k+1)(m-(k+1))}{m(m-1)}.\pi_{n,k+1}\end{aligned}$$

En procédant aux décalages d'indices nécessaires dans les probabilités conditionnelles de la question précédente.
En réduisant tout au même dénominateur, on obtient bien la formule demandée :

$$\pi_{n+1,k}=\frac{(k-1)(m+1-k)\pi_{n,k-1}+[m(m-1)-2k(m-k)]\pi_{n,k}+(k+1)(m-1-k)\pi_{n,k+1}}{m(m-1)}.$$

5. a) Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\forall k\in[\![1;m-1]\!],\ \pi_{n,k}\leqslant\left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$.
$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n=0$: si $k\neq a$, $\pi_{0,k}=P(X_0=k)=0$ et $\pi_{0,a}=P(X_0=a)=1$.
Comme $\left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^0=1$, on a bien : $\pi_{0,k}\leqslant\left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^0$ dans tous les cas, et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
$\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété vraie pour un certain entier $n\in\mathbb{N}$, montrons qu'alors elle est vraie au rang $n+1$:
On sait donc que $\forall k\in[\![1;m-1]\!],\ \pi_{n,k}\leqslant\left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$; c'est en particulier vrai pour $\pi_{n,k-1}$, $\pi_{n,k}$ et $\pi_{n,k+1}$ et la relation obtenue en 1.b) donne alors :

$$\pi_{n+1,k}\leqslant\frac{(k-1)(m+1-k)\left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n+[m(m-1)-2k(m-k)]\left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n+(k+1)(m-1-k)\left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n}{m(m-1)}$$

$$\leqslant\frac{(k-1)(m+1-k)+m(m-1)-2k(m-k)+(k+1)(m-1-k)}{m(m-1)}\left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$

$$\leqslant\frac{mk+k-k^2-m-1+k+m^2-m-2mk+2k^2+mk-k-k^2+m-1-k}{m(m-1)}\left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$

$$\pi_{n+1,k}\leqslant\frac{m^2-m-2}{m(m-1)}\left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n=\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n=\left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n+1}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.
$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

b) Pour tout $k\in[\![1;m-1]\!]$, $\pi_{m,k}$ étant une probabilité, on peut écrire :

$$0\leqslant\pi_{n,k}\leqslant\left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$

Mais puisque $m\geqslant2$: $0\leqslant\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}<1$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n=0$.
Ainsi, par le théorème d'encadrement : $\boxed{\forall k\in[\![1;m-1]\!],\ \lim\limits_{n\to+\infty}\pi_{n,k}=0.}$

6. On définit l'évènement V_A (respectivement V_B) suivant : “ au bout d'un certain nombre de jours, tous les individus du groupe ont l'intention de voter pour A (respectivement pour B) ”.

a) L'événement V_A est réalisé si et seulement si il existe au moins un entier n tel que $[X_n=m]$ est réalisé (au jour n, les m membres du groupe veulent tous voter pour A).
Cela s'écrit : $V_A=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}[X_n=m]$.
Mais : si au jour n tous les membres du groupe veulent voter pour A, ils sont tous du même avis et n'en changeront donc plus jamais : la réalisation de $[X_n=m]$ implique celle de $[X_{n+1}=m]$, ce qui s'écrit : $\forall n\in\mathbb{N},\ [X_n=m]\subset[X_{n+1}=m]$, et exprime que la suite d'événements $([X_n=m])_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante*

pour l'inclusion.
D'après la *propriété de limite monotone*, on a donc :

$$P(V_A) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [X_n = m]\right) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = m)$$

De la même manière : $V_B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [X_n = 0]$ (à partir d'un certain jour n, tous les membres du groupe veulent voter pour B), et $[X_n = 0] \subset [X_{n+1} = 0]$, donc :

$$P(V_B) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [X_n = 0]\right) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = 0)$$

b) Le résultat de la question 2.b) de cette partie, exprime que pour toute valeur k autre que 0 et m dans l'univers-image $X_n(\Omega) = [\![0; m]\!]$: $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = 0$.

Mais comme : $\sum_{k=0}^{m} P(X_n = k) = 1 \iff P(X_n = 0) + \sum_{k=1}^{m-1} P(X_n = k) + P(X_n = m) = 1$

$\iff P(X_n = 0) + P(X_n = m) = 1 - \sum_{k=1}^{m-1} P(X_n = k)$, on a bien :

$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 0) + P(X_n = m) = 1 - \sum_{k=1}^{m-1} 0 = 1 \iff P(V_A) + P(V_B) = 1.$

Comme à la question finale de la partie 1, cela signifie que l'événement : $V_A \cup V_B$ est presque-certain, ou encore qu'il est presque sûr qu'au bout d'un nombre fini de jour, tous les membres du groupes voudront voter pour un seul des deux candidats.

7. Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = X_{n+1} - X_n$.

a) Comme on l'a vu, en passant du jour n au jour $n+1$, il n'y a que trois évolutions possibles du nombre de votants pour A :
- ⋆ Soit E_1 vote pour A et convainc E_2 votant pour B de changer d'avis : dans ce cas, $X_{n+1} = 1 + X_n \iff Z_n = 1$
- ⋆ Soit E_1 vote pour B et convainc E_2 votant pour A de changer d'avis : dans ce cas, $X_{n+1} = X_n - 1$ et $Z_n = -1$.
- ⋆ Soit E_1 et E_2 veulent voter pour le même candidat, et rien ne change : $X_{n+1} = X_n$ et $Z_n = 0$.

On a bien : $Z_n(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$.

b) L'événement $[Z_n = 1]$ est donc réalisé si et seulement si : $X_{n+1} = 1 + X_n$. On prend en compte toutes les valeurs possibles de X_n grâce, une fois de plus à la *formule des probabilités totales*, appliquée avec le système complet d'événements $([X_n = k])_{0\leqslant k\leqslant m}$:

$$\begin{aligned} P(Z_n = 1) &= \sum_{k=0}^{m} P(X_n = k).P_{[X_n=k]}(Z_n = 1) \\ &= \sum_{k=0}^{m} P(X_n = k).P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \pi_{n,k}.\frac{k(m-k)}{m(m-1)} \end{aligned}$$

avec le résultat de la question 1.a) de cette partie, sachant qu'on sait aussi que :
$P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1) = 0 = P_{[X_n=m]}(X_{n+1} = m+1)$: les termes de la somme pour $k = 0$ et $k = m$ sont nuls.

c) De la même façon, on peut écrire :

$$P(Z_n = -1) = \sum_{k=0}^{m} P(X_n = k).P_{[X_n=k]}(Z_n = -1) = \sum_{k=0}^{m-1} P(X_n = k).P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k-1) = \sum_{k=1}^{m-1} \pi_{n,k}.\frac{k(m-k)}{m(m-1)}$$

toujours grâce à la formule correspondante de 1.a), avec

$$P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=-1)=0=P_{[X_n=m]}(X_{n+1}=m-1)$$

Ainsi $P(Z_n=-1)=P(Z_n=1)$ puisque sans calculer la somme précédente, on retrouve deux fois la même expression !

d) Z_n est une v.a.r. finie, donc admet une espérance qui vaut :
$E(Z_n)=(-1).P(Z_n=-1)+0.P(Z_n=0)+1.P(Z_n=1)=P(Z_n=1)-P(Z_n=-1)=0$ d'après le résultat précédent ! (On dit que Z_n est une variable aléatoire *centrée*).

e) Mais comme $Z_n=X_{n+1}-X_n$ est la différence de deux v.a.r. finies qui admettent donc une espérance, on a par linéarité de l'espérance :
$\forall n\in\mathbb{N},\ E(Z_n)=E(X_{n+1})-E(X_n) \iff E(X_{n+1})-E(X_n)=0 \Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ E(X_{n+1})=E(X_n)$,
ce qui exprime bien que la suite $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$, est constante.
On sait qu'alors : $\forall n\in\mathbb{N},\ E(X_n)=E(X_0)=a$ puisque X_0 est la variable constante égale à a.

8. Une question très subtile pour terminer : on s'est intéressé jusqu'à présent à la valeur de $E(X_n)$ sans jamais écrire sa définition ; on sait maintenant que :

$$\begin{aligned}
E(X_n)=a &\iff \sum_{k=0}^{m} k.P(X_n=k)=a\\
&\iff 0.P(X_n=0)+\sum_{k=1}^{m-1} k.P(X_n=k)+m.P(X_n=m)=a\\
&\iff P(X_n=m)=\frac{a}{m}-\frac{1}{m}.\sum_{k=1}^{m-1} k.P(X_n=k)
\end{aligned}$$

Sachant que : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=m)=P(V_A)$ et que :
$\forall k\in[\![1;m-1]\!],\ \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=k)=0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} k.P(X_n=k)=k.0=0$, le passage à la limite dans la dernière égalité ci-dessus donne bien :

$$P(V_A)=\frac{a}{m}$$

Ce résultat exprime que la probabilité que tous les membres du groupe finissent à un moment donné par voter pour A, est exactement égale à la *proportion initiale* $\dfrac{a}{m}$ de votants pour A. Joli, étonnant mais pas si illogique que cela, non ?

PROBLÈME 2 - Une propriété limite des lois de Pareto

Question préliminaire

Soit g une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs réelles.

9. a) La relation demandée provient d'un simple changement de variable affine :
pour tous réels α et β dans I tels que $\alpha < \beta$, on réalise le changement de variable : $t(x) = \alpha + (\beta - \alpha)x$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(\alpha + (\beta - \alpha)x)\mathrm{d}x$.
Le changement de variable est affine, donc de classe C^1 sur $[0, 1]$ avec :
$\star$ $\mathrm{d}t = t'(x)\mathrm{d}x = (\beta - \alpha)\mathrm{d}x$
$\star$ $g(\alpha + (\beta - \alpha)x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\beta - \alpha}.g(t)\mathrm{d}t$
$\star$ Bornes : $x = 0 \to t = \alpha$ et $x = 1 \to t = \alpha + \beta - \alpha = \beta$.
D'où, en effet : $\displaystyle\int_0^1 g(\alpha + (\beta - \alpha)x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta g(t)\mathrm{d}t$.

b) Soient a, b, c, d dans I tels que $a < c < d < b$, on suppose aussi que g est décroissante sur I. Le résultat précédent permet d'écrire :
$\displaystyle\frac{1}{b-c}\int_c^b g(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 g(c + (b-c)x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\frac{1}{d-c}\int_c^d g(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 g(c + (d-c)x)\mathrm{d}x$.
Or puisque $c < d < b$: $b - c > d - c > 0$ et $\forall x \in [0, 1],\ c + (b-c)x \geqslant c + (d-c)x$, d'où :
$\forall x \in [0, 1],\ g(c + (b-c)x) \leqslant g(c + (d-c)x)$ par décroissance de g sur I.
La fonction g étant continue sur I, les fonctions concernées sont continues sur $[0, 1]$, les bornes sont dans l'ordre croissant, donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 g(c + (b-c)x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 g(c + (d-c)x)\mathrm{d}x \iff \frac{1}{b-c}\int_c^b g(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{d-c}\int_c^d g(t)\mathrm{d}t$$

Pour la deuxième inégalité, on écrit aussi que $\displaystyle\frac{1}{d-a}\int_a^d g(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 g(a + (d-a)x)\mathrm{d}x$, avec cette fois, pour tout $x \in [0, 1]$, comme $a < c < d$:
$c + (d-c)x = c(1-x) + dx \geqslant a(1-x) + dx = a + (d-a)x$ (vu que : $1 - x \geqslant 0$), ce qui donne encore :
$\forall x \in [0, 1],\ g(c + (d-c)x) \leqslant g(a + (d-a)x)$ toujours par décroissance de g sur I.
La croissance de l'intégrale donne donc à nouveau :

$$\int_0^1 g(c + (d-c)x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 g(a + (d-a)x)\mathrm{d}x \iff \frac{1}{d-c}\int_c^d g(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{d-a}\int_a^d g(t)\mathrm{d}t.$$

Partie I - Partie fractionnaire d'une variable à densité

Dans cette partie, on note $[x]$ la *partie entière* de x, et $\{x\} = x - [x]$ sa *partie fractionnaire*.
On désigne par X une variable aléatoire à valeurs réelles admettant une densité f qui vérifie les propriétés :
•f est nulle sur $]-\infty, 0[$;
•la restriction de f à $[0, +\infty[$ est continue et décroissante.
On pose $M = f(0)$, c'est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.
Soit $Y = \{X\} = X - [X]$, la variable aléatoire égale à la partie fractionnaire de X, et F_Y sa fonction de répartition.

10. La partie entière d'un réel x vérifie toujours la condition fondamentale : $[x] \leqslant x < [x]+1 \iff 1 > x - [x] \geqslant 0$.
Cela signifie que $Y(\Omega) \subset [0, 1[$, et à ce titre :

$$\forall y < 0,\ F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = 0,\ \text{et } \forall y \geqslant 1,\ F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = 1$$

11. L'événement $[Y = 0]$ est réalisé si et seulement si X est égale à sa partie entière, ce qui ne se produit bien sûr que si X prend une valeur entière. Comme f est nulle sur $]-\infty, 0[$, $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$ et on a bien :

$$[Y = 0] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [X = n]$$

(en évitant l'affreuse écriture d'une union de probabilités dans l'énoncé original !)
Mais comme les événements $[X=n]$ sont disjoints deux à deux, par σ-additivité de la probabilité :
$P(Y=0)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)=\sum_{n=0}^{+\infty} 0=0$ puisque X est une variable à densité !
Et comme on l'a dit, vu que $Y(\Omega)\subset[0,1[$: $F_Y(0)=P(Y\leqslant 0)=P(Y<0)+P(Y=0)=0+0=0$.

12. Soit y un réel de l'intervalle $]0,1[$.

a) Par définition, $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X-[X]\leqslant y)=P(X\leqslant [X]+y)$.
La double inégalité : $[X]\leqslant X<[X]+1$ étant toujours vraie, et puisque $0<y<1$, l'événement $X\leqslant[X]+y$ est réalisé si et seulement si X appartient à un intervalle du type : $[n,n+y]$ où n est un entier naturel quelconque qui est alors la valeur de $[X]$, c'est-à-dire :
$[Y\leqslant y]=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[n\leqslant X\leqslant n+y]$, où puisque $0<y<1$, les intervalles $[n,n+y]$ sont disjoints deux à deux, donc les événements $[n\leqslant X\leqslant n+y]$ sont incompatibles deux à deux. On en déduit :
$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(n\leqslant X\leqslant n+y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_n^{n+y}f(t)\mathrm{d}t$ puisque f est une densité de X.

Autre formulation possible ; voir aussi l'exercice 1 du sujet Edhec E 2002 :

X étant à valeurs positives, sa partie entière $[X]$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On peut donc calculer $P(Y\leqslant y)$ avec la formule des probabilités totales et le système complet d'événements $([X]=n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}P(Y\leqslant y)=P(X\leqslant[X]+y)&=\sum_{n=0}^{+\infty}P(([X]=n)\cap(X\leqslant[X]+y))\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}P((n\leqslant X<n+1)\cap(X\leqslant n+y))=\sum_{n=0}^{+\infty}P(n\leqslant X\leqslant n+y)\text{ car }y<1\end{aligned}$$

et on conclut comme précédemment. Une approche moins intuitive cependant, et qui n'est finalement qu'une reformulation a posteriori de la première explication... au lecteur de décider celle qui lui paraît la plus simple à comprendre, et à réinvestir !

b)
•De la question préliminaire, pour n entier naturel quelconque, en prenant $c=n$, $d=n+y$ et $b=n+1$, on a bien : $0\leqslant c<d<b$, avec f continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, donc :
$\frac{1}{n+1-n}\int_n^{n+1}f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n+y-n}\int_n^{n+y}f(t)\mathrm{d}t\iff\int_n^{n+y}f(t)\mathrm{d}t\geqslant y\int_n^{n+1}f(t)\mathrm{d}t.$
•En prenant cette fois $n\in\mathbb{N}^*$, $a=n-1+y$, $c=n$ et $d=n+y$, on a bien : $0\leqslant a<c<d$, f est continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, donc :

$$\frac{1}{n+y-n}\int_n^{n+y}f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n+y-(n-1+y)}\int_{n-1+y}^{n+y}f(t)\mathrm{d}t\iff\int_n^{n+y}f(t)\mathrm{d}t\leqslant y\int_{n-1+y}^{n+y}f(t)\mathrm{d}t.$$

c) Par sommation de la première inégalité pour n variant de 0 à un certain $N\in\mathbb{N}$, on obtient :
$\sum_{n=0}^{N}\int_n^{n+y}f(t)\mathrm{d}t\geqslant\sum_{n=0}^{N}y\int_n^{n+1}f(t)\mathrm{d}t\iff\sum_{n=0}^{N}\int_n^{n+y}f(t)\mathrm{d}t\geqslant y\int_0^{N}f(t)\mathrm{d}t$ d'après la relation de Chasles.
Comme la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_n^{n+y}f(t)\mathrm{d}t$ converge (conséquence de la σ-additivité utilisée en a)), et comme l'intégrale $\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$ converge aussi (f étant une densité), on peut passer à la limite quand $N\to+\infty$ et on obtient bien :

$$F_Y(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_n^{n+y}f(t)\mathrm{d}t\geqslant y\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t.$$

Ensuite, on passe également à la somme dans la deuxième inégalité de la quesition précédente, mais à partir de $n=1$ seulement cette fois, vu son domaine de validité. On en déduit, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N}\int_{n}^{n+y} f(t)\mathrm{d}t \leqslant y\sum_{n=1}^{N}\int_{n-1+y}^{n+y} f(t)\mathrm{d}t = y\int_{y}^{N+y} f(t)\mathrm{d}t \iff \sum_{n=0}^{N}\int_{0}^{y} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{0}^{y} f(t)\mathrm{d}t + y\int_{y}^{N+y} f(t)\mathrm{d}t$$

en rajoutant dans les deux membres l'intégrale $\int_0^y f(t)\mathrm{d}t$, premier terme de la somme donnant $F_Y(y)$.

Là encore, série et intégrale convergent, et le passage à la limite quand $N \to +\infty$ donne bien la deuxième inégalité voulue ; on a donc montré :

$$y\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \leqslant F_Y(y) \leqslant \int_0^y f(t)\mathrm{d}t + y\int_t^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

La densité f étant nulle sur $]-\infty,0[$, on a donc : $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$, et : $\int_y^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = P(Y \geqslant y) \leqslant 1$.

Par alleurs, f étant continue, majorée par M sur $\mathbb{R}^+$, l'inégalité de la moyenne donne :

$\int_0^y f(t)\mathrm{d}t \leqslant M.(y-0) \leqslant M$ puisque $y \in]0,1[$.

Tous les résultats précédents permettent bien de déduire du précédent, le nouvel encadrement :

$$\forall y \in]0,1[,\ y \leqslant F_Y(y) \leqslant y + M.$$

Partie II - Premier chiffre significatif d'une variable de Pareto

Pour tout réel λ strictement positif, on définit la fonction g_λ sur $\mathbb{R}$ par $g_\lambda :\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x^{\lambda+1}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

13. On vérifie les trois critères qui feront de g_λ une densité de probabilité :
   - ⋆ Comme $\lambda > 0$, la fonction g_λ est bien positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.
   - ⋆ La fonction g_λ est bien continue sur $]-\infty,1[$ comme fonction nulle, et sur $]1,+\infty[$ comme fonction de référence $x \mapsto \lambda.x^{-\lambda-1}$, donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 1.
   - ⋆ $\int_{-\infty}^1 g_\lambda(t)\mathrm{d}t = 0$ puisque g_λ est nulle sur l'intervalle, et pour tout réel $A > 1$:

     $\int_1^A g_\lambda(t)\mathrm{d}t = \lambda.\int_1^A x^{-\lambda-1}\mathrm{d}x = \lambda.\left[\dfrac{x^{-\lambda}}{-\lambda}\right]_1^A = 1 - \dfrac{1}{A^\lambda} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1,$

     donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^1 g_\lambda(t)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} g_\lambda(t)\mathrm{d}t$ est bien convergente et vaut 1.

   Finalement, g_λ est bien une densité de probabilité.

   Dans toute la suite, on note Z_λ une variable aléatoire admettant g_λ pour densité.

14. Calcul de la fonction de répartition G_λ de Z_λ :

   Pour tout réel $x \in]-\infty,1[,\ G_\lambda(x) = \int_\infty^x g_\lambda(t)\mathrm{d}t = 0$, et pour tout réel $x \geqslant 1$:

   $G_\lambda(x) = \int_{-\infty}^1 g_\lambda(t)\mathrm{d}t + \int_1^x g_\lambda(t)\mathrm{d}t = 1 - \dfrac{1}{x^\lambda}$ d'après les calculs précédents.

15. On note ln la fonction logarithme népérien, et log la fonciton *logarithme décimal*. Cette fonction est définie sur $]0,+\infty[$ par : $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ pour tout réel x strictement positif. Il n'est pas difficile de voir que log présente des règles de calculs analogues à ln pour le logarithme d'un produit et d'un quotient notamment.

   On a part contre : $\log(10^n) = n$ pour tout entier relatif n.

   On pose $X_\lambda = \log(Z_\lambda)$, et on note F_λ la fonction de répartition de X_λ.

   a) Pour tout réel x :

   $F_\lambda(x) = P(X_\lambda \leqslant x) = P(\dfrac{\ln(Z_\lambda)}{\ln(10)} \leqslant x) = P(\ln(Z_\lambda) \leqslant x\ln(10)) = P(Z_\lambda \leqslant e^{x\ln(10)}) = G_\lambda(10^x)$ par stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

   b) D'après le calcul de la fonction de répartition G_λ effectué à la question 14. :

   ⋆ Pour tout $x < 0,\ 10^x < 1$ et $G_\lambda(10^x) = 0 = F_\lambda(x)$.

   ⋆ Pour tout $x \geqslant 0 :\ 10^x \geqslant 1$ et $G_\lambda(10^x) = 1 - \dfrac{1}{(10^x)^\lambda} = 1 - e^{-\lambda.\ln(10).x} = F_\lambda(x)$, ce qui prouve que :

   $$X_\lambda \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \lambda.\ln(10).$$

16. On pose $Y_\lambda = \{X_\lambda\}$, la partie fractionnaire de X_λ.
On est bien dans la situation étudiée dans la partie I, où la densité de X_λ est ici nulle sur $]-\infty, 0[$, de restriction à $[0, +\infty[$ continue et décroissante puisque c'est la fonction $x \mapsto \lambda.\ln(10).e^{-\lambda.\ln(10).x}$ sur cet intervalle.
Le résultat final de la partie I s'applique donc directement, et :

$$\forall y \in]0,1[,\ y \leqslant P(Y_\lambda \leqslant y) \leqslant M_\lambda + y$$

où M_λ est le maximum de la densité, donné par la valeur en zéro de cette dernière, et qi vaut donc : $\lambda.\ln(10)$.
On en déduit l'encadrement : $\forall y \in]0,1[,\ y \leqslant P(Y_\lambda \leqslant y) \leqslant \lambda.\ln(10) + y$, qui par le théorème du même nom, donne :

$$\forall y \in]0,1[,\ \lim_{\lambda \to 0^+} P(Y_\lambda \leqslant y) = y$$

Pour tout $y \in]-\infty, 0]$: $P(Y_\lambda \leqslant y) = 0 \xrightarrow[\lambda \to 0^+]{} 0$, et pour tout $y \in [1, +\infty[$: $P(Y_\lambda \leqslant y) = 1 \xrightarrow[\lambda \to 0^+]{} 1$, donc en tout point de $\mathbb{R}$, $P(Y_\lambda \leqslant y)$ tend vers la valeur en y d'une fonction de répartition d'une v.a.r. U suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On dit que lorsque λ tend vers 0, Y_λ converge en loi vers cette v.a.r. U (bien que théoriquement, le programme officiel parle d'étudier la convergence en loi d'une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires, pas d'une famille $(Y_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}_+^*}$...

17. Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on note $\alpha(x)$ le premier chiffre dans l'écriture décimale de x ; c'est un entier de l'intervalle $[\![1, 9]\!]$.

    a) Tout réel $x \geqslant 1$ possède une écriture (dite *scientifique*) de la forme :
    $$x = (k+q).10^n$$
    où $k \in [\![1, 9]\!]$ est effectivement le premier chiffre de l'écriture décimale de x (souvent appelé *premier chiffre significatif* de x), q est un réel de $[0,1[$ et n un entier naturel.
    Par exemple, $x = 123,456$ a pour écriture scientifique $1,23456.10^2 = (1 + 0.23456).10^2$, où $k = 1$ et $q = 0.23456$.
    On a alors : $\log(x) = log(k+n) + \log(10^n) = n + \log(k+q)$, où puisque $1 \leqslant k+q < 10$:
    $0 \leqslant \ln(k+q) < \ln(10) \iff 0 \leqslant \log(k+g) < 1 \iff n \leqslant n + \log(k+q) = \log(x) < n+1$, ce qui prouve que :
    $n = [\log(x)]$, et donc que $\{\log(x)\} = \log(x) - [\log(x)] = \log(k+q)$, où $k \leqslant k+q < k+1$.
    La croissance de la fonction ln, donc de la fonction log sur $\mathbb{R}_+^*$ donne bien :
    $\log(k) \leqslant \log(k+q) < \log(k+1)$, et donc : $\alpha(x) = k \iff \{\log(x)\} \in [\log(k), \log(k+1)[$.

    b) On note $C_\lambda = \alpha(Z_\lambda)$ la variable aléatoire prenant comme valeur le premier chiffre de Z_λ.
    D'après la question précédente, pour tout entier $k \in [\![1, 9]\!]$:
    $P(C_\lambda = k) = P(\log(k) \leqslant \{\log(Z_\lambda)\} \leqslant \log(k+1)) = P(\log(k) \leqslant Y_\lambda \leqslant \log(k+1))$ en reprenant les notations précédemment introduites questions 15. et 16. Comme k est compris entre 1 et 9 : $\log(k)$ et $\log(k+1)$ sont compris entre 0 et 1, et :

    $$\begin{aligned} P(C_\lambda = k) &= P(\log(k) \leqslant Y_\lambda \leqslant \log(k+1)) \\ &= P(Y_\lambda \leqslant \log(k+1)) - P(Y_\lambda \leqslant \log(k)) \xrightarrow[\lambda \to 0^+]{} \log(k+1) - \log(k) = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

    d'après le résultat de la question 16.

    Ce résultat s'interprète en disant que la famille de v.a.r. $(C_\lambda)_{\lambda > 0}$ *converge en loi* lorsque $\lambda \to 0^+$, vers une variable aléatoire discrète B à valeurs dans $[\![1, 9]\!]$ vérifiant :

    $$\forall k \in [\![1, 9]\!],\ P(B = k) = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

    On dit que B suit la *loi de Benford*, loi limite obtenue ici pour le premier chiffre significatif de Z_λ, dans le cas très particulier où Z_λ suit une loi de Pareto de paramètre λ.

Note : la loi dite de Benford prévoit que le premier chiffre significatif d'un nombre tirée de manière aléatoire suit une loi logarithmique comme celle de B et non, comme on pourrait s'y attendre, une loi uniforme. Au contraire, d'après cette loi, le chiffre 1 est largement prépondérant, le chiffre 9 étant à l'inverse le moins fréquent, comme le montre le tableau de la loi de B ci-dessous :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(B=k)$	0.301	0.176	0.125	0.097	0.079	0.067	0.058	0.051	0.046

Paradoxal ? Les mathématiciens qui se sont penchés sur la question expliquent que l'attente d'une loi uniforme sur le premier chiffre d'un nombre est le résultat d'une illusion bien connue des psychologues : le biais d'équiprobabilité. Ce biais est une tendance humaine à considérer que le hasard implique nécessairement l'uniformité. Le premier chiffre significatif, évidemment obtenu par hasard, devrait alors suivre une loi uniforme. La loi de Benford peut donc être comprise comme un paradoxe psychologique (et non mathématique) provenant d'un biais humain dans la perception du hasard, non d'une incohérence mathématique ou d'une particularité des séries de données utilisées.
Cette loi expérimentale a été démontrée mathématiquement pour diverses suites numériques (n^n et $n!$ notamment), et a été vérifiée expérimentalement sur d'immenses corpus numériques. Sur ces données naturelles, la loi de Benford apparaît très souvent comme une bonne approximation de la réalité, mais il semble aussi qu'elle ne ne soit qu'une approximation.
Il apparaît en effet que bien des ensembles de données ne suivent pas du tout la loi de Benford. C'est le cas par exemple des nombres pseudo-aléatoires donnés par des humains. Ces résultats ont déjà été utilisés pour repérer des fraudes notamment en matière fiscale, mais aussi des données contrefaites dans des articles scientifiques ! Mais surtout, beaucoup de lois empiriques suivent *à peu près* la loi de Benford, en conservant vis-à-vis d'elle une différence significative que la multiplication des données ne résorbe pas. Les conditions générales que doit vérifier une variable aléatoire X pour suivre la loi de Benford, constituent un sujet de recherche très récent !

★★★ FIN DU SUJET ★★★