MATHÉMATIQUES I - ESSEC E 2010

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

# PROBLÈME 1 : Matrices dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres

## Partie I. Généralités et exemples

1. On sait d'après le cours que les valeurs propres d'une matrice triangulaire, et donc a fortiori diagonale, sont ses éléments diagonaux. Il n'est d'ailleurs pas difficile de le redémontrer :

   un réel $\lambda$ est valeur propre de $M$ si et seulement si $M-\lambda.I_n = \begin{pmatrix} m_{1,1}-\lambda & \star & \cdots & \star \\ 0 & m_{2,2}-\lambda & \cdots & \star \\ \vdots & & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & m_{n,n}-\lambda \end{pmatrix}$

   est non-inversible, ce qui est le cas si et seulement si l'un des coefficients diagonaux de cette matrice encore triangulaire est nul, donc si et seulement si $\lambda \in \{m_{i,i} |\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

2. Soit $M$ une matrice de $\mathcal{D}_n$ : pour tout réel $\alpha$, $M+\alpha.I_n$ a pour valeur propre $\lambda$ si et seulement si :

   $(M+\alpha.I_n)-\lambda.I_n$ est non inversible $\iff$ $M-(\lambda-\alpha).I_n$ est non-inversible $\iff$ $\alpha-\lambda$ est valeur propre de $M$.

   Comme $M \in \mathcal{D}_n$, c'est le cas si et seulement si :

   $$\lambda-\alpha \in \{m_{i,i}|1 \leqslant i \leqslant n\} \iff \lambda \in \{m_{i,i}+\alpha|\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

   La matrice $M+\alpha.I_n$ admet donc pour valeurs propres tous les réels de la forme $m_{i,i}+\alpha$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, et eux seulement : comme ces derniers sont bien sûr les éléments diagonaux de $M+\alpha.I_n$, on peut conclure qu'en effet, si $M \in \mathcal{D}_n$, alors $M+\alpha.I_n \in \mathcal{D}_n$ pour tout réel $\alpha$.

3. On note $K_n$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

   a) Les éléments diagonaux de $K_n$ sont donc tous égaux à 1. Or $K_n$ admet très classiquement les valeurs propres :

   $\star$ $\lambda = n$ avec le vecteur propre colonne $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

   $\star$ $\lambda = 0$ avec le vecteur propre $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ par exemple.

   La condition $(\Delta_2)$ n'est pas vérifiée ($K_n$ admet d'autres valeurs propres que 1), donc $K_n \notin \mathcal{D}_n$.

   b) Les exemples et contre-exemple précédents nous fournissent un moyen de montrer que $\mathcal{D}_n$ n'est *pas* un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ :

Les matrices $T_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $S_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ appartiennent toutes deux à $\mathcal{D}_n$ en tant que matrices triangulaires (question 1.), et pourtant :
$T_n + S_n = K_n \notin \mathcal{D}_n$. Ainsi $\mathcal{D}_n$ n'est donc pas stable par somme, et ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ : la matrice $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\begin{pmatrix} y & z \\ 0 & x \end{pmatrix}$ l'est (on a échangé les 2 lignes) ; comme cette dernière est triangulaire, elle est inversible si et seulement si $x \neq 0$ *et* $y \neq 0$. Il est en donc bien de même pour la matrice de départ.

   b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{D}_2$. Par définition, les valeurs propres de $M$ sont donc $a$ et $d$, et elles seules. Dans ce cas, d'après la question 2., $M - a.I_2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d-a \end{pmatrix}$ appartient encore à $\mathcal{D}_2$ : 0 est donc valeur propre de cette matrice, qui est par conséquent non-inversible.
   D'après le critère d'inversibilité d'une matrice de cette forme obtenu à la question précédente : $b$ et $c$ ne peuvent donc pas être tous les deux non-nuls, c'est-à-dire que : soit $b$, soit $c$ est nul. Mais dans chacun de ces deux cas, la matrice de départ $M$ est triangulaire (supérieure si $c = 0$, inférieure si $b = 0$) !

   On a donc prouvé que : *si* $M \in \mathcal{D}_2$, *alors* $M$ est une matrice triangulaire.

   Comme la réciproque est vraie (cf. question 1.), on peut bien conclure que les seules matrices de $\mathcal{D}_2$ sont les matrices triangulaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5. Le réel $\lambda$ est valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ si et seulement si $A - \lambda.I_3$ est non inversible :

$$A - \lambda.I_3 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 3-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow (3-\lambda)L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -2+\lambda & 1-(3-\lambda)(4-\lambda) \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -(3-\lambda)(4-\lambda) \end{pmatrix}$$

Ainsi, $A - \lambda.I_3$ est non-inversible si et seulement si sa réduite de Gauss triangulaire précédente l'est, ce qui est le cas si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul : les valeurs propres de $A$ sont $2,\ 3,\ 4$ et elles seules ; comme ce sont bien les coefficients diagonaux de la matrice $A$ de départ, $A$ est bien élément de $\mathcal{D}_3$.

Comme de plus c'est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui admet trois valeurs propres distinctes : le critère *suffisant* assure que $A$ est bien diagonalisable.

6. Pour tout $t$ réel, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.

   a) On remarque que $M(t)$ reprend globalement la matrice $A$, en rajoutant simplement des éléments dans la dernière colonne. On peut donc déterminer les valeurs propres de $M(t)$ en échelonnant $M(t) - \lambda.I_3$ avec les mêmes opérations que précédemment :

$$M(t) - \lambda.I_3 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1+t \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 1 & 1 & 4-\lambda+2t \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4-\lambda+2t \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 3-\lambda & 1 & 1+t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3\leftarrow(3-\lambda)L_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 4-\lambda+2t\\ 0 & 2-\lambda & -1-t\\ 0 & -2+\lambda & 1-(3-\lambda)(4-\lambda)+t-(3-\lambda)2t\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 4-\lambda+2t\\ 0 & 2-\lambda & -1-t\\ 0 & 0 & -(3-\lambda)(4-\lambda+2t)\end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $M(t)$ sont donc les éléments diagonaux de cette réduite de Gauss, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Sp}(M(t)) = \{2, 3, 4+2t\}$$

Il est donc immédiat de constater que $M(t)$ appartient toujours à $\mathcal{D}_3$, et ce quelle que soit la valeur du réel $t$, puisqu'on retrouve bien comme seules valeurs propres de cette matrice, ses élements diagonaux.

b) Concernant la diagonalisabilité de $M(t)$ : le critère suffisant déjà utilisé avec $A$, s'applique à $M(t)$ dès que ses trois valeurs propres sont distinctes.

$4+2t=2 \iff t=-1$ et $4+2t=3 \iff t=-\dfrac{1}{2}$, donc pour tout réel $t\in\mathbb{R}\setminus\{-1,-\frac{1}{2}\}$, on peut déjà conclure que $M(t)$ est diagonalisable.

Reste à étudier les deux cas particuliers :

⋆ Si $t=-1$ : $M(-1)=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}$, et $M(-1)-\lambda.I_3$ a pour réduite de Gauss :

$\begin{pmatrix}1&1&2-\lambda\\0&2-\lambda&0\\0&0&-(3-\lambda)(2-\lambda)\end{pmatrix}$, donc les valeurs propres de $M(-1)$ sont 2 et 3.

On peut alors calculer les sous-espaces propres des deux seules valeurs propres de la matrice :

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_2(M(-1)) \iff (M(-1)-2.I_3)X=0 \iff \begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\iff x+y=0 \iff y=-x$, donc :

$$E_2(M(-1))=\left\{\begin{pmatrix}x\\-x\\z\end{pmatrix} \mid (x,z)\in\mathbb{R}^2\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_3(M(-1)) \iff (M(-1)-3.I_3)X=0 \iff \begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}x+y-z=0\\ \quad -y=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=z\\y=0\end{cases}, \text{ d'où :}$$

$$E_3(M(-1))=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\x\end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

On a donc : $\dim E_2(M(-1))+\dim E_3(M(-1))=2+1=3$ car $E_2(M(-1))$ est engendré par deux vecteurs non colinéaires, et $E_3(M(-1))$ par un seul vecteur non nul. On peut donc conclure que la matrice $M(-1)$ est encore diagonalisable.

⋆ si $t=-\dfrac{1}{2}$ : $M(-\frac{1}{2})=\begin{pmatrix}3&1&1/2\\0&2&-1/2\\1&1&3\end{pmatrix}$, et $M(-\frac{1}{2})-\lambda.I_3$ a pour réduite de Gauss :

$\begin{pmatrix}1&1&3-\lambda\\0&2-\lambda&-1/2\\0&0&-(3-\lambda)^2\end{pmatrix}$, donc les seules valeurs propres de $M(-\frac{1}{2})$ sont là encore 2 et 3.

Utilisons cette fois un argument concernant le rang de la matrice étudiée : on sait d'après le cours que les opérations sur les lignes d'une matrice ne changent pas son rang, donc $M(-\frac{1}{2}) - \lambda.I_3$ a le même rang que sa réduite de Gauss :

$\text{rg}(M(-\frac{1}{2}) - 2.I_3) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$ car les colonnes $C_1$ et $C_2$ sont égales, tandis que $C_1$ et $C_3$ sont non-proportionnelles (donc forment une famille libre).
Le théorème du rang donne :
$\dim E_2(M(-\frac{1}{2})) = \dim\ker(M(-\frac{1}{2}) - 2.I_3) = 3 - \text{rg}(M(-\frac{1}{2}) - 2.I_3) = 1$.

De même : $\text{rg}(M(-\frac{1}{2}) - 3.I_3) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ car ici : $C_2 = C_1 + 2C_3$ s'écrit en fonction des deux autres colonnes, tandis que $C_1$ et $C_3$ sont non-proportionnelles.
Le théorème du rang donne, là encore : $\dim E_3(M(-\frac{1}{2})) = 3 - \text{rg}(M(-\frac{1}{2}) - 3.I_3) = 1$.
Ainsi : $\dim E_2(M(-\frac{1}{2})) + \dim E_3(M(-\frac{1}{2})) = 1 + 1 \neq 3$ : la matrice $M(-\frac{1}{2})$ n'est donc *pas* diagonalisable : c'est en fait la seule parmi toutes les matrices $M(t)$ !

## Partie II. Matrices nilpotentes

Une matrice $M$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si, et seulement si, il existe un entier naturel $p$ non nul tel que la matrice $M^p$ soit la matrice nulle.

1. Soit $M$ une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existe donc un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0_3$.

   Le polynôme $P(X) = X^p$ est par conséquent un polynôme annulateur de $M$, donc les valeurs propres possibles de $M$ font parties des racines de $P(X)$. Comme 0 est bien sûr la seule racine de $P(X)$, c'est la seule valeur propre possible de $M$.

   Il reste donc à prouver que 0 est bien valeur propre de $M$, c'est-à-dire que $M$ n'est pas inversible. Or si elle l'était, $M^p = 0_3$ le serait aussi, comme prduit de matrices inversibles, ce qui est absurde.

   Finalement, 0 est bien valeur propre de $M$, et c'est la seule.

2. Soit $M$ une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on souhaite montrer que $M^3 = 0_3$, en supposant par l'absurde que ce n'est pas le cas.
   Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $u$ l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice $M$ dans la base $\mathcal{B}$.

   a) Soit $x$ un vecteur quelconque de $\text{Ker}(u)$ : par définition, cela signifie que $u(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a alors :

   $$u^2(x) = u(u(x)) = u(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

   car $u$ est une application linéaire, ce qui signifie que $x$ appartient alors à $\text{Ker}(u^2)$.
   On a donc prouvé l'inclusion : $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$.
   De même :

   $$\forall x \in \text{Ker}(u^2),\ u^2(x) = 0_{\mathbb{R}^3},\ \text{ce qui implique } u^3(x) = u(u^2(x)) = u(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

   (toujours par linéarité de $u$).
   Ainsi : $\forall x \in \text{Ker}(u^2)$, $x \in \text{Ker}(u^3)$, ce qui prouve l'inclusion $\text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3)$.

   b) Supposons, comme le suggère l'énoncé, que $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u^3)$, et montrons qu'alors :

   $$\forall i \geqslant 2,\ \text{Ker}(u^i) = \text{Ker}(u^2) \qquad \text{par récurrence sur } i.$$

   $\boxed{\text{I.}}$ La propriété est évidemment vraie pour $i = 2$.

   $\boxed{\text{H.}}$ Supposons que pour un certain entier $i \geqslant 2$, la propriété soit vraie.

Montrons qu'alors $\text{Ker}(u^{i+1}) = \text{Ker}(u^2)$.
Soit $x \in \text{Ker}(u^2)$ :

$$u^2(x) = 0_{\mathbb{R}^3}, \quad \text{ce qui implique :} \quad u^{i+1}(x) = u^{i-1}(u^2(x)) = u^{i-1}(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

par linéarité de $u^{i-1}$.

Réciproquement, soit $x \in \text{Ker}(u^{i+1})$ :

$$\text{alors } u^{i+1}(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff u^3(u^{i-2}(x)) = 0_{\mathbb{R}^3}, \text{ ce qui implique que } u^{i-2}(x) \in \text{Ker}(u^3).$$

Comme on a supposé que $\text{Ker}(u^3) = \text{Ker}(u^2)$, on peut donc dire que $u^{i-2}(x) \in \text{Ker}(u^2)$, donc :

$$u^2(u^{i-2}(x)) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff u^i(x) = 0_{\mathbb{R}^3}, \text{ et donc : } x \in \text{Ker}(u^i).$$

Et comme $\text{Ker}(u^i) = \text{Ker}(u^2)$ par hypothèse de récurrence, on a bien :

$$\forall x \in \text{Ker}(u^{i+1}),\ x \in \text{Ker}(u^2), \text{ et donc } \text{Ker}(u^{i+1}) = \text{Ker}(u^2)$$

par double inclusion.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $i \geqslant 2$ par hypothèse de récurrence.

Mais $M$ est nilpotente, donc il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0_3$.
Comme par hypothèse, $M^3 \neq 0_3$, on a nécessairement $p > 3$, et $\text{Ker}(u^p) = \mathbb{R}^3$ car $u^p$ est donc l'endomorphisme nul.
Mais alors, vu la récurrence précédente : $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u^p) = \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que $u^2$ est l'endomorphisme nul, donc que $M^2 = 0_3$, et $M^3 = 0_3$ aussi ; c'est absurde par hypothèse !

Finalement, l'inclusion $\text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3)$ est stricte.

c) Un raisonnement du même type permet de montrer que $\text{Ker}(u) \neq \text{Ker}(u^2)$ ; en supposant le contraire, on obtiendra : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^i)$.

$\boxed{\text{I.}}$ Initialisation évidente à $i = 1$.

$\boxed{\text{H.}}$ En supposant la propriété vraie pour un certain entier $i \in \mathbb{N}^*$ :
L'inclusion $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^i)$ est toujours vraie :

$$\forall x \in \text{Ker}(u),\ u(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow u^{i+1}(x) = u^i(u(x)) = u^i(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Réciproquement, pour tout vecteur $x$ de $\text{Ker}(u^{i+1})$, on a $u^{i+1}(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$, ce qui peut se réécrire :

$$u^2(u^{i-1}(x)) = 0_{\mathbb{R}^3}, \text{ qui exprime que } u^{i-1}(x) \in \text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u).$$

Ainsi, on a aussi : $u(u^{i-1}(x)) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff u^i(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$, et ainsi $x \in \text{Ker}(u^i) = \text{Ker}(u^2)$ (hypothèse de récurrence).

On a bien : $\text{Ker}(u^{i+1}) = \text{Ker}(u^2)$ par double inclusion, et la propriété est héréditaire.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $i \in \mathbb{N}^*$.

Comme précédemment, on conclut que dans ce cas, $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^p) = \mathbb{R}^3$, ce qui contredit le fait que $M$ ne doit pas être nulle (sinon $M^3$ l'est).

d) On dispose donc des inclusions suivantes :

$$\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3) \subset \mathbb{R}^3$$

et toutes ces inclusions sont strictes. Par ailleurs, $\text{Ker}(u)$ n'est pas réduit à $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, car on a vu que 0 est valeur propre de $M$ (donc de $u$).

En considérant les dimensions de ces sous-espaces vectoriels, on obtient alors les inégalités :

$$0 < \dim \operatorname{Ker}(u) < \dim \operatorname{Ker}(u^2) < \dim \operatorname{Ker}(u^3) < 3$$

ce qui est impossible vu qu'une dimension est un entier naturel, que 1 et 2 sont les seuls entiers possibles et qu'il y a trois sous-espaces vectoriels !

L'hypothèse faite au tout début est donc fausse : $M^3$ est la matrice nulle.

3. Soit $(a, b, c, d, e, f)$ un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On définit les réels : $\gamma(M) = ac + df + be$ et $\delta(M) = bcf + ade$.

a) Cette question se traite par simple calcul matriciel :

$M^2 = \begin{pmatrix} ac+be & bf & ad \\ de & ac+df & bc \\ cf & ae & be+df \end{pmatrix}$,

et $M^3 = M^2.M = \begin{pmatrix} bcf+ade & a^2c+abe+adf & abc+b^2e+bdf \\ ac^2+cdf+bce & ade+bcf & bde+acd+d^2f \\ ace+be^2+def & acf+bef+df^2 & bcf+ade \end{pmatrix}$

$= (ade+bcf).I_3 + \begin{pmatrix} 0 & a(ac+be+df) & b(ac+be+df) \\ c(ac+df+be) & 0 & d(be+ac+df) \\ e(ac+be+df) & f(ac+be+df) & 0 \end{pmatrix}$, ce qui est effectivement la relation :

$$M^3 = \gamma(M).M + \delta(M).I_3$$

b) D'après la question 2., toute matrice nilpotente $M$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie en particulier :

$$M^3 = 0_3 \iff \gamma(M).M + \delta(M).I_3 = 0_3.$$

Or $M$ et $I_3$ forment clairement une famille libre (ce sont deux matrices non proportionnelles), donc la relation précédente est vraie si et seulement si :

$$\gamma(M) = \delta(M) = 0$$

Comme réciproquement, $\gamma(M) = \delta(M) = 0$ implique $M^3 = 0_3$, donc que $M$ est nilpotente : par double implication, on peut bien conclure que :

$$M \text{ est nilpotente si et seulement si } \gamma(M) = \delta(M) = 0.$$

c) On suppose que $a$, $b$ et $d$ sont égaux à 1.

Le système : $\begin{cases} \gamma(M) & = 0 \\ \delta(M) & = 0 \end{cases}$ est alors équivalent à : $\begin{cases} c+e+f & = 0 \\ cf+e & = 0 \end{cases}$.

La soustraction des deux lignes donne : $cf = c + f \iff c(f-1) = f$.

En supposant que $f \neq 1$, cela donne : $c = \dfrac{f}{f-1}$, et on peut prendre alors $e = -cf = -\dfrac{f^2}{f-1}$.

On peut ainsi conclure que pour tout réel $f \neq 1$, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{f}{f-1} & 0 & 1 \\ -\frac{f^2}{f-1} & f & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente ce qui constitue bin une infinité de choix possibles !

d) Les matrices qu'on vient de décrire ont donc les propriétés suivantes :

$\star$ Elles sont nilpotentes, donc leur seule valeur propre est 0.

$\star$ Leurs éléments diagonaux sont tous nuls, donc ce sont des matrices de $\mathcal{D}_3$.

$\star$ dès que $f \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, ces matrices ne sont pas triangulaires, ce qui constitue une infinité de possibilités.

e) Avec $f = 2$, la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente de $\mathcal{D}_3$.

Comme on l'a vu à la question 2. de la partie I (avec $\alpha = 1$) : $M + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{D}_3$ dont tous les coefficients sont non nuls.

# PROBLÈME 2 :
# Le Kurtosis

## Introduction

On rappelle que pour tout entier naturel $n$, le moment centré d'ordre $n$ de $X$, s'il existe, est défini par

$$\mu_n(X) = E\left((X - E(X))^n\right).$$

On dit qu'une variable aléatoire $X$ admet un kurtosis lorsque

- $X$ admet des moments centrés d'ordre 2,3 et 4 ;
- $V(X) \neq 0$.

On appelle alors *kurtosis*, ou *coefficient d'applatissement* de $X$, le réel défini par :

$$K(X) = \frac{\mu_4(X)}{(\mu_2(X))^2} - 3 = \frac{\mu_4(X)}{(V(X))^2} - 3.$$

## Question préliminaire

Soit $X$ une variable aléatoire admettant un moment d'ordre $n$. Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels, avec $\alpha \neq 0$.

Alors, par linéarité de l'espérance, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :
$(\alpha.X + \beta - E(\alpha.X + \beta))^n = (\alpha.X + \beta - \alpha.E(X) - \beta)^n = \alpha^n.(X - E(X))^n$, donc $\alpha.X + \beta$ admet un moment centré d'ordre $n$ et :

$$\mu_n(\alpha.X + \beta) = E\left((\alpha.X + \beta - E(\alpha.X + \beta))^n\right) = \alpha^n.E\left((X - E(X))^n\right) = \alpha^n.\mu_n(X).$$

De la sorte, si $X$ admet un kurtosis, alors $\alpha.X + \beta$ aussi et :

$$K(\alpha.X + \beta) = \frac{\mu_4(\alpha.X + \beta)}{(\mu_2(X))^2} - 3 = \frac{\alpha^4.\mu_4(X)}{(\alpha^2.\mu_2(X))^2} - 3 = \frac{\alpha^4.\mu_4(X)}{\alpha^4.(\mu_2(X))^2} - 3 = \frac{\mu_4(X)}{(\mu_2(X))^2} - 3 = K(X)$$

## Partie I. Des exemples

### I.1. Loi uniforme

Soit $X$ une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

a) D'après le cours : $E(X) = \frac{1}{2}$. L'énoncé demande de recalculer sa variance, on rappelle donc une densité $f_X$ de $X$ : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

La variable aléatoire $X$ admet un moment d'ordre 2 qui vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

La variable aléatoire $X$ admet alors une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

b) D'après le théorème de transfert : la variable aléatoire $X$ admet un moment centré d'ordre 4 car l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\frac{1}{2})^4.f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (x-\frac{1}{2})^4\mathrm{d}x$ est absolument convergente, et vaut

$$\mu_4(X) = \int_0^1 (x-\frac{1}{2})^4\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}(x-\frac{1}{2})^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}(1/2)^5 - \frac{1}{5}.(-1/2)^5 = 2\times\frac{1}{160} = \frac{1}{80}$$

La variable aléatoire $X$ admet donc un kurtosis qui vaut :

$$K(X) = \frac{\mu_4(X)}{(V(X))^2} - 3 = \frac{\frac{1}{80}}{\frac{1}{144}} - 3 = \frac{144}{80} - 3 = \frac{36}{20} - 3 = \frac{9}{5} - 3 = -1,2$$

c) Toujours avec $X$ suivant la loi uniforme sur $[0,1]$ : pour $a$, $b$ réels avec $a<b$, une variable aléatoire $U$ suivant la loi uniforme sur $[a,b]$ suit la même loi que $a+(b-a)X$. Ainsi, d'après le préliminaire :

$$K(U) = K(a+(b-a).X) = K(X) = -1,2$$

## I.2. Loi normale

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

a) Une densité $\varphi$ de $X$ est définie par : $\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

D'après le théorème de transfert : $X$ admet un moment d'ordre $n$ si et seulement si l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^n.e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x \text{ est absolument convergente.}$$

Comme la fonction $x\mapsto x^n.e^{-\frac{x^2}{2}}$ est toujours soit paire (quand $n$ est pair), soit impaire (quand $n$ est impair), et positive sur $[0,+\infty[$, cela revient à prouver la convergence simple de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n.e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$.

Pour tout $x>0$ : $x^2.x^n.e^{-\frac{x^2}{2}} = \exp((n+2)\ln(x) - \frac{x^2}{2}) = \exp(x^2.\left[(n+2)\frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\right])$, où :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ par croissances comparées, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(n+2)\frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$,

et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2.\left[(n+2)\frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\right] = -\infty$, donc finalement :

$$\lim_{x\to+\infty}\exp(x^2.\left[(n+2)\frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\right]) = \lim_{X\to-\infty}\exp(X) = 0.$$

Ceci prouve donc la négligeabilité : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2.x^n.e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \iff x^n.e^{-\frac{x^2}{2}} = o(\frac{1}{x^2})$.

Or : $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ est convergente comme intégrale de Riemann, d'exposant $2>1$. Par comparaison d'intégrales de fonctions continues, positives : $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^n.e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$ est convergente.

La fonction $x\mapsto x^n.e^{-\frac{x^2}{2}}$ étant continue sur $[0,1]$, on en déduit que :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n.e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n.e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} x^n.e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$ est convergente, et $X$ admet un moment d'ordre $n$ pour tout entier $n$. Comme $E(X)=0$, le moment d'ordre $n$ est aussi le moment centré d'ordre $n$ de $X$.

b) Comme on l'a vu : si $n$ est un entier impair, alors $E(X^n) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n.e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$ est nul, de même que $E(X^{n+2})$ puisque $n+2$ est alors également impair, et la relation : $\mu_{n+2}(X) = (n+1)\mu_n(X)$ est vraie puisque les deux membres sont nuls.

Si $n$ est pair : alors $n+2$ aussi, et $E(X^{n+2}) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^{n+2}.e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$. On réalise alors, pour $A > 0$, une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^A x^n.e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$ en posant :

$$u(x) = x^{n+1} \quad \to \quad u'(x) = (n+1)x^n$$

$$v'(x) = x.e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \to \quad v(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $[0, +\infty[$, donc par intégration par parties :

$$\int_0^A x^{n+2}.e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = \left[-x^{n+1}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^A + (n+1)\int_0^A x^n.e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = -A^{n+1}.e^{-\frac{A^2}{2}} + (n+1)\int_0^A x^n.e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{n+1}.e^{-\frac{A^2}{2}} = 0$ comme on l'a vu à la question a), et comme les deux intégrales convergent, le passage à la limite dans cette relation quand $A$ tend vers $+\infty$ donne :

$$\int_0^{+\infty} x^{n+2}.e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = (n+1)\int_0^{+\infty} x^n.e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x \iff E(X^{n+2}) = (n+1)E(X^n) \iff \mu_{n+2}(X) = (n+1)\mu_n(X)$$

c) D'après ce qui précède : $X$ admet des moments centrés d'ordre 2 et 4, donc admet un kurtosis qui vaut :

$$K(X) = \frac{\mu_4(X)}{(\mu_2(X))^2} - 3 = \frac{3\mu_2(X)}{(\mu_2(X))^2} - 3 = \frac{3}{V(X)} - 3 = \frac{3}{1} - 3 = 0$$

puisque $V(X) = 1$ vu que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

d) Soit $Y$ une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ quelconque : on sait qu'alors $Y^* = \dfrac{Y-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

La relation s'écrit aussi : $Y = \sigma.Y^* + m$, et comme $Y^*$ admet un kurtosis nul d'après ce qui précède : la question préliminaire permet de conclure que

$$K(Y) = K(Y^*) = 0$$

### I.3. Loi de Bernoulli

soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0,1[$.

a) La variable aléatoire finie $X$ admet des moments de tous ordre, et comme $E(X) = p$ :

$$\mu_2(X) = V(X) = p(1-p)$$

$$\mu_4(X) = (0-p)^4.P(X=0) + (1-p)^4.P(X=1) = p^4.(1-p) + (1-p)^4.p = p(1-p)[p^3 + (1-p)^3]$$

Le kurtosis de $X$ est donc :

$$K(X) = \frac{p(1-p)[p^3+(1-p)^3]}{p^2(1-p)p^2} - 3 = \frac{p^3+(1-p)^3}{p(1-p)} - 3$$

b) Comme $(1-p)^3 = 1 - 3p + 3p^2 - p^3$ d'après la formule du binôme de Newton, on peut simplifier l'expression de $K(X)$ :

$$K(X) = \frac{3p^2 - 3p + 1}{p(1-p)} - 3 = \frac{1 - 3p(1-p)}{p(1-p)} - 3 = \frac{1}{p(1-p)} - 6$$

L'étude de la quantité $p(1-p)$, pour $p\in]0,1[$, est très classique, pour éviter de dériver le recours à la forme canonique de ce trinôme en $p$ est le plus efficace !

$$\forall p\in]0,1[,\ p(1-p)=-p^2+p=-(p^2-p)=-((p-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}-(p-\frac{1}{2})^2$$

Ainsi : $\forall p\in]0,1[,\ 0<p(1-p)\leqslant\frac{1}{4}\iff\frac{1}{p(1-p)}\geqslant 4$, et donc :

$$K(X)\geqslant -2,\ \text{cette valeur minimale étant atteinte pour } p=\frac{1}{2}.$$

# Partie II. Minoration du kurtosis

**II.1.** Soit $Y$ une variable aléatoire admettant une variance : on sait que $V(Y)=E((Y-E(Y))^2)$ est toujours positive comme espérance d'une variable aléatoire $(Y-E(Y))^2$ positive ;
et comme par ailleurs : $V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2$ d'après la formule de Koenig-Huygens, on a bien :

$$E(Y^2)\geqslant E(Y)^2.$$

**II.2.** Supposons que le kurtosis d'une variable aléatoire $X$ est défini ; alors $Y=(X-E(X)^2)$ est une variable qui admet pour espérance : $E(Y)=E((X-E(X))^2)=\mu_2(X)>0$, et pour moment d'ordre 2 : $E(Y^2)=E((X-E(X))^4)=\mu_4(X)$.
L'inégalité : $E(Y^2)\geqslant E(Y)^2$ est alors vérifiée d'après la question précédente, qui donne :

$$\mu_4(X)\geqslant(\mu_2(X))^2\iff\frac{\mu_4(X)}{(\mu_2(X))^2}\geqslant 1\iff K(X)=\frac{\mu_4(X)}{(\mu_2(X))^2}-3\geqslant -2$$

**II.3.** Soient $a$ et $b$ deux réels distincts, et $X$ une variable aléatoire suvant la loi uniforme sur $\{a,b\}$. Il suffit ici de remarquer que si $U$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, alors $Z=a+(b-a)U$ suit la même loi que $X$ :

$U(\Omega)=\{0,1\}$, donc $Z(\Omega)=\{a,b\}$ et $P(U=0)=P(Z=a)=\frac{1}{2}=P(U=1)=P(Z=b)$.

Mais alors les résultats de la question préliminaire et de la question **I.3.** s'appliquent, qui donnent :

$$K(X)=K(Z)=K(U)=-2$$

**II.4.** On se propose de démontrer la réciproque de ce résultat. Soit $X$ une variable aléatoire admettant un kurtosis égal à $-2$.

a) $K(X)=-2\iff\frac{\mu_4(X)}{(\mu_2(X))^2}=1\iff E((X-E(X))^4)=(E((X-E(X))^2))^2$
$\iff E(Y^2)=E(Y)^2$ en posant $Y=(X-E(X))^2$, ce qui donne bien :

$$V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=0.$$

D'après le résultat de cours rappelé dans l'introduction, cette variance nulle signifie que $Y=(X-E(X))^2$ est une variable aléatoire (presque-sûrement) certaine.

b) Il existe donc un certain réel $\alpha$, positif puisque $Y$ est une v.a.r. positive tel que, presque-sûrement :

$$(X-E(X))^2=\alpha\iff X-E(X)=\sqrt{\alpha}\text{ ou } X-E(X)=-\sqrt{\alpha}\iff X=\underbrace{E(X)-\sqrt{\alpha}}_{a}\text{ ou } X=\underbrace{E(X)+\sqrt{\alpha}}_{b}$$

**Remarque** : $\alpha$ n'est pas nul, sinon $X$ serait elle-même une variable presque-certaine, ce qui est incompatible avec l'existence de son kurtosis.

c) La variable aléatoire $X$ admet alors pour espérance :

$$E(X) = a.P(X=a) + b.P(X=b) = (E(X) - \sqrt{\alpha}).P(X=a) + (E(X) + \sqrt{\alpha}).P(X=b)$$
$$= E(X).(P(X=a) + P(X=b)) + \sqrt{\alpha}.(P(X=b) - P(X=a))$$

Comme $P(X=a) + P(X=b) = 1$ et $\alpha > 0$, cette relation donne après simplifications : $P(X=a) - P(X=b) = 0 \iff P(X=a) = P(X=b)$, et ces deux probabilités sont alors évidemment toutes deux égales à $\frac{1}{2}$.

La réciproque est donc démontrée : $X$ admet un kurtosis égal à la valeur minimale $-2$ si et seulement si elle suit une loi uniforme sur un ensemble à deux éléments.

**II.5.** Il suffit ici de reprendre le kurtosis d'une loi de Bernoulli : $K(X) = \dfrac{1}{p(1-p)} - 6$ pour réaliser que lorsque $p$ tend vers $0^+$ (ou vers $1^-$), son kurtosis tend vers $+\infty$.

Il n'existe donc aucune majoration du kurtosis valable pour toute variable aléatoire qui en admet un.

## Partie III. Somme de variables

**III.1.** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes, centrées, admettant un kurtosis. Les moments centrés de ces deux variables sont donc confondus avec leurs moments ; on développe alors $(X+Y)^4$ grâce à la formule du binôme de Newton :

$$(X+Y)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} X^k Y^{4-k} = Y^4 + 4XY^3 + 6X^2Y^2 + 4X^3Y + X^4$$

La linéarité de l'espérance et l'indépendance de $X$ et $Y$ permettent alors d'écrire :

$$\begin{aligned} E\left((X+Y)^4\right) &= E(Y^4) + 3E(X)E(Y^3) + 6E(X^2)E(Y^2) + 4E(X^3)E(Y) + E(X^4) \\ &= E(Y^4) + 6V(X)V(Y) + E(X^4) \end{aligned}$$

puisque $E(X) = E(Y) = 0$, ce qui implique aussi : $V(X) = E(X^2)$ et $V(Y) = E(Y^2)$.

**III. 2.** Puisque $X$ et $Y$ sont des variables centrées : $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 0 + 0 = 0$ et les moments de $X+Y$ sont ses moments centrés.

Ainsi : $K(X+Y) = \dfrac{E((X+Y)^4)}{(V(X+Y))^2} - 3$, où :

$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ puisque $X$ et $Y$ sont indépendantes ; on a aussi :

$K(X) = \dfrac{(E(X))^4}{V(X)^2} - 3 \iff E(X^4) = V(X)^2(K(X)+3)$, de même pour $Y$, d'où :

$$\begin{aligned} K(X+Y) &= \frac{V(X)^2K(X) + 3V(X)^2 + 6V(X)V(Y) + V(Y)^2K(Y) + 3V(X)^2}{[V(X)+V(Y)]^2} - 3 \\ &= \frac{V(X)^2K(X) + V(Y)^2K(Y) + 3(V(X)^2 + 2V(X)V(Y) + V(Y)^2)}{[V(X)+V(Y)]^2} - 3 \\ &= \frac{V(X)^2K(X) + V(Y)^2K(Y)}{[V(X)+V(Y)]^2} + \cancel{3} - \cancel{3} \end{aligned}$$

**III.3.** Si $X$ et $Y$ sont indépendantes mais non nécessairement centrées : alors en notant $m = E(X)$ et $M = E(Y)$, $X - m$ et $Y - M$ sont des variables centrées indépendantes, donc d'après la question précédente :

$$K(X+Y-m-M) = \frac{V(X-m)^2K(X-m) + V(Y-M)^2K(X-M)}{[V(X-m)+V(Y-M)]^2}$$

Or d'après le préliminaire :
$K(X+Y-m-M)=K(X+Y)$, $K(X-m)=K(X)$, $K(Y-M)=K(Y)$ et de même $V(X-m)=V(X)$ et $V(Y-M)=V(Y)$ d'après les propriétés de la variance.
On a bien :

$$K(X+Y)=\frac{V(X)^2K(X)+V(Y)^2K(Y)}{[V(X)+V(Y)]^2}$$

dans le cas général.

**III.4.** On montre par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ que si $X_1,X_2,\dots,X_n$ sont $n$ variables aléatoires indépendantes admettant chacune un kurtosis, alors :

$$K\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}V(X_k)^2K(X_k)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}V(X_k)\right)^2}$$

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n=1$ : la formule précédente se réécrit $K(X_1)=\dfrac{V(X_1)^2K(X_1)}{V(X_1)^2}$ qui est évidemment vraie !

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors elle est encore vraie au rang $n+1$.
Soient donc $X_1,\dots,X_n,X_{n+1}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes.
Alors $X_1+\dots+X_n$ et $X_{n+1}$ sont, d'après le lemme des coalitions, et d'après l'hypothèse de récurrence et le résultat de la question III.3. : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}X_k=\sum_{k=1}^{n}X_k+X_{n+1}$ admet un kurtosis, qui vaut :

$$\begin{aligned}
K\left(\sum_{k=1}^{n+1}X_k\right)&=\frac{V\left(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right)^2K\left(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right)+V(X_{n+1})^2K(X_{n+1})}{\left[V\left(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right)+V(X_{n+1})\right]^2}\\
&=\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}V(X_k)\right)^2.\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}V(X_k)^2K(X_k)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}V(X_k)\right)^2}+V(X_{n+1})^2K(X_{n+1})}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n}V(X_k)+V(X_{n+1})\right]^2}\\
&=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}V(X_k)^2K(X_k)+V(X_{n+1})^2K(X_{n+1})}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n+1}V(X_k)\right)^2}\\
&=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}V(X_k)^2K(X_k)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n+1}V(X_k)\right)^2}
\end{aligned}$$

et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

**III.5.** Soient $X$ une variable aléatoire admettant un kurtosis et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que $X$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

D'après la formule précédente :

$$K(S_n) = \frac{\sum_{k=1}^{n} V(X_k)^2 K(X_k)}{\left(\sum_{k=1}^{n} V(X_k)\right)^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} V(X)^2 K(X)}{\left(\sum_{k=1}^{n} V(X)\right)^2} = \frac{nV(X)^2K(X)}{(nV(X))^2} = \frac{K(X)}{n}$$

Et on a bien : $\lim_{n\to+\infty} K(S_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{K(X)}{n} = 0$.

1. On a déjà vu que : si une variable aléatoire admet un kurtosis, sa variable centrée réduite, associée admet le même kurtosis. C'est donc le cas ici de $S_n$ dont la variable centrée réduite $S_n^*$ vérifie alors : $\lim_{n\to+\infty} K(S_n^*) = 0$.

   Or d'après le théorème de la limite centrée : la suite de variables aléatoires $(S_n^*)$ converge en loi, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, vers une v.a.r. $X$ qui suit la loi normale centrée réduite. Comme alors, $K(X) = 0$, le résultat précédente peut se réécrire :

   $$\lim_{n\to+\infty} K(S_n) = K(X)$$

   qui exprime qu'on peut ici "passer à la limite (en loi) dans le kurtosis".

★★★ FIN DU SUJET ★★★