MATHÉMATIQUES - EMLyon E 2009

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. a) On donne deux arguments successifs, comme toujours :
   - Sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$: f est bien définie car $e^x - 1$ ne s'annule qu'en 0, et continue comme quotient de fonctions de référence continues sur chacun de ces deux intervalles.
   - En 0 : la limite classique du cours (qui vient de la dérivabilité en 0 de exp : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, donne par inverse :
     $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x - 1} = 1 = f(0)$, donc f est aussi continue en 0.

   La fonction f est donc bien continue sur tout $\mathbb{R}$.

   b) La fonction f est bien définie et de classe C^1 sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ comme on l'a déjà dit, elle y est en fait de classe C^1 comme quotient de fonctions de référence elles-mêmes de classe C^1.

$$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[: \quad f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$$

   c) On utilise ici le développement limité à l'ordre 2 de exp au voisinage de 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

   qui permet d'écrire, pour x au voisinage de 0 (et $x \neq 0$) :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1-x).(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) - 1}{(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1)^2} = \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 - x - x^2 + o(x^2)}{(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)} \end{aligned}$$

   après simplification par x^2. On a bien :

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$$

   d) Le théorème qui permet de répondre immédiatement à cette question n'st plus au programme officiel de ECE... Appelé généralement *théorème de prolongement de la dérivée*, il fait appel aux hypothèses suivantes, toutees bien vérifiées par f :

- f est continue sur $\mathbb{R}$
- f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$
- $f'(x)$ admet une limite finie en 0, ici $-\dfrac{1}{2}$

Alors : f est dérivable en 0 et même de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

En l'absence de ce théorème, on est obligé de revenir d'abord à l'étude de la dérivabilité de f en 0, et donc d'étudier la limite du *taux d'accroissement* de f en 0 :

$$\text{Pour } x \neq 0,\ \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x}.\left[\frac{x}{e^x-1}-1\right] = \frac{1}{x}.\frac{x-e^x+1}{e^x-1}$$
$$= \frac{1}{x}.\frac{x-1-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)+1}{1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} = \frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}$$
$$= \frac{-\frac{1}{2}+o(1)}{1+o(1)}$$

On a l'impression de revenir au même point... Ici on conclut que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{-\frac{1}{2}+0}{1+0} = -\frac{1}{2}$$

ce qui prouve que : f est bien dérivable en 0, avec $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Le calcul fait à la question c) affirme alors : $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$, donc que f' est continue en 0, et finalement f est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$... ouf !

2. a) L'application $u : x \mapsto (1-x)e^x - 1$ est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = -e^x + (1-x)e^x - 0 = -xe^x$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $u'(x)$ est du signe de $-x$, donc :

u est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction u admet donc un maximum atteint en $x = 0$, qui vaut :

$$u(0) = (1-0)e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

b) On remarque ici que : $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{u(x)}{(e^x-1)^2}$.

Sur $\mathbb{R}^*$, $(e^x-1)^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $u(x)$, et comme on vient de le voir :

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ u(x) < u(0) = 0$ (maximum *strict* car u' ne s'annule qu'en 0), ce qui implique :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) < 0$$

Enfin, comme on a vu que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$, on peut effectivement écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$$

c) Calcul des limites de f :

- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 1 = 0 - 1 = -1\end{array}\right\}$ donc par quotient : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^x-1} = +\infty = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

- En $+\infty$, on la forme indéterminée "$\dfrac{\infty}{\infty}$" se résout très simplement par la méthode habituelle :

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{e^x(1-e^{-x})}=\frac{x}{e^x}.\frac{1}{1-e^{-x}}, \text{ où :}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0 \text{ (croissances comparées)}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1-e^{-x}}=\dfrac{1}{1-0}=1\end{array}\right\}\text{par produit : }\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-1}=0=\lim_{x\to+\infty}f(x).$$

La question précédente permet d'affirmer que f est strictement décroissante sur tout $\mathbb{R}$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0

d) On sait déjà que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, on sait qu'alors il faut étudier :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{0-1}=-1.$$

Il faut donc étudier pour finir, la limite de :

$$f(x)-(-x)=\frac{x}{e^x-1}+x=\frac{xe^x}{e^x-1}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0 \text{ (croissances comparées)}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^x-1=0-1=-1\end{array}\right\}\text{par quotient : }\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{e^x-1}=0=\lim_{x\to0}f(x)+x,$$

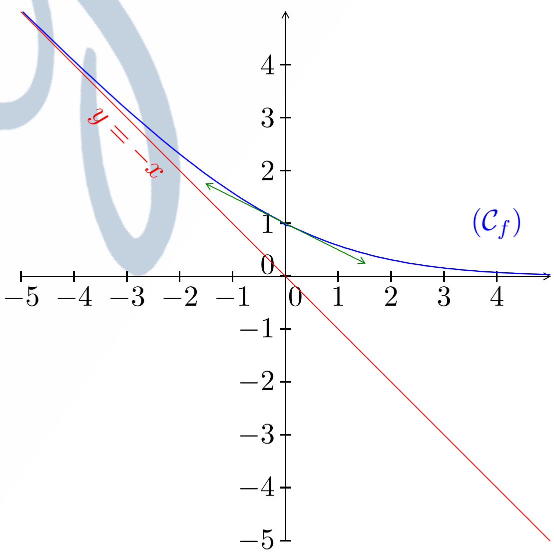
ce qui permet de conclure que la courbe de f admet au voisinage de $-\infty$, une droite **asymptote oblique** d'équation : $\boxed{y=-x}$.

En $+\infty$, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, on conclut directement que la courbe de f admet une **asymptote horizontale** qui est l'axe des abscisses.

e) On trace l'allure de la courbe représentative de f en tenant compte de toutes les informations précédentes.

On peut penser à tracer tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 , qui a pour équation :

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)\iff y=-\frac{1}{2}x+1$$



Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Pour une fois, on demande de résoudre *par le calcul* l'équation $f(x) = x$...!
   Il est clair que $x = 0$ n'est pas solution puisque $f(0) = 1 \neq 0$, on cherche donc x non-nul tel que :

$$f(x) = x \iff \frac{x}{e^x - 1} = x \iff \frac{1}{e^x - 1} = 1 \iff e^x - 1 = 1 \iff e^x = 2 \iff x = \ln(2)$$

   La fonction f admet bien un unique point fixe, à savoir $\alpha = \ln(2)$.

2. a) L'inégalité voulue dans cette question demande d'introduire la fonction $g : x \mapsto e^{2x} - 2xe^x - 1$, bien définie et de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ comme somme et produit de fonctions de classe C^1 sur cet intervalle.

$$\forall x \in [0, +\infty[: \ g'(x) = 2e^x 2x - 2e^x - 2xe^x - 0 = 2e^x(e^x - 1 - x)$$

   Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $2e^x > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $e^x - 1 - x$.

   On peut alors faire une nouvelle étude de fonction, celle de $h : x \mapsto e^x - 1 - x$ sur $[0, +\infty[$ où elle est de classe C^1 :

   $\forall x \in [0, +\infty[$, $h'(x) = e^x - 1 \geqslant 0$ puisqu'ici $x \geqslant 0$.

   La fonction h est donc croissante sur $[0, +\infty[$, donc : $\forall x \in [0, +\infty[$, $h(x) \geqslant h(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$.

   On en déduit : $\forall x \in [0, +\infty[$, $g'(x) \geqslant 0$, donc g est croissante sur $[0, +\infty[$, et par conséquent :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \ e^{2x} - 2xe^x - 1 = g(x) \geqslant g(0) = e^0 - 2.0.e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

   b) Une simple réduction au même dénominateur dans cette question...!

$$\forall x \in]0; +\infty[, \ f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2} = \frac{2(1-x)e^x - 1 + (e^x - 1)^2}{2(e^x - 1)^2}$$
$$= \frac{2e^x - 2xe^x - 2 + e^{2x} - 2e^x + 1}{2(e^x - 1)^2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{(e^x - 1)^2}$$

   c) On a déjà vu à la question 2.b) de la partie I que : $\forall x \in [0, +\infty[$, $f'(x) < 0$.

   On sait aussi que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$, et d'après les deux questions précédentes :

   $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2} \geqslant 0$ comme quotient de deux réels positifs, ce qui se réécrit : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}$, et achève de démontrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \ -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$$

   d) La forme de l'inégalité demandée évoque bien sûr l'*Inégalité des Accroissements Finis*, dont il faut soigneusement vérifier les hypothèses nécessaires pour l'utiliser :
   - On commence par bien préciser l'intervalle, ici $I = [0, +\infty[$, sur lequel on a vu que f est dérivable ;
   - Pour tout $x \in [0, +\infty[$: $-\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0 \leqslant \dfrac{1}{2}$, ce qui implique : $\forall x \in [0, +\infty[$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

- $\alpha = \ln(2)$ appartient bien à $I = [0, +\infty[$, il faut aussi vérifier que $u_n \in I$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$! ce qui se fait par une récurrence très rapide :
  $\boxed{\text{I.}}$ $u_0 = 1 \in I$.
  $\boxed{\text{H.}}$ Supposons que pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I = [0, +\infty[$.
  Alors d'après le tableau des variations de f : $0 < f(u_n) \leqslant f(0) = 1$,
  donc $u_{n+1} = f(u_n) \in I = [0, +\infty[$.
  $\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

Toutes les conditions sont donc réunies pour utiliser l'Inégalité des Accroissements Finis, qui affirme que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \iff \forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

3. On démontre enfin par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha)$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 0$: $|u_0 - \alpha| = |1 - \ln(2)| = 1 - \alpha$ puisque $\ln(2) < 1$ donc on a bien $|u_0 - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^0}(1-\alpha)$.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi, soit : $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

On sait que : $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha)$, donc $\dfrac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}(1-\alpha)$.

Mais comme $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$, on a bien, par transitivité de l'inégalité :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}(1-\alpha)$$

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

4. La valeur absolue prenant toujours des valeurs positives, on peut donc écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}(1-\alpha)$$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha) = 0$ $(2 > 1)$, le théorème d'encadrement permet de conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$$

5. L'étude mathématique précédente permet de définir le principe de l'algorithme demandé : on calcule les termes successifs de la suite (u_n) en utilisant la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, jusqu'à ce que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$ soit vraie, ce qui est vrai dès que $\dfrac{1}{2^n}(1 - \ln(2)) < 10^{-9}$ l'est. On continue donc tant qu'au contraire, $\dfrac{1}{2^n}(1 - \ln(2)) \geqslant 10^{-9}$.

```
function y=f(x)
    if x==0 then
        y=1
    else
        y=x/(exp(x)-1)
    end
endfunction
```

```
u=1
n=0
while (1-log(2))/2^n > 1e-9
    u = f(u)
    n=n+1
end
disp(n)
```

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t$$

1. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet des primitives ; soit F l'une d'elles : c'est donc une fonction de classe C^1, grâce à laquelle on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = F(2x) - F(x)$$

On peut donc conclure que G est elle-même de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, comme somme et composée de telles fonctions. D'ailleurs, et d'après la formule de dérivation d'une composée :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G'(x) = 2.F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x)$$

On distingue donc, en effet, deux expressions possibles de $G'(x)$, suivant que x est nul ou pas :
- Si $x = 0$: $\quad G'(0) = 2f(0) - f(0) = f(0) = 1$.
- Pour tout $x \neq 0$:

$$G'(x) = 2.\frac{2x}{e^{2x}-1} - \frac{x}{e^x-1} = \frac{4x - x(e^x+1)}{e^{2x}-1} = \frac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1}$$

Puisqu'évidemment : $\quad e^{2x} - 1 = (e^x-1)(e^x+1)$, identité remarquable indispensable pour une réduction au même dénominateur efficace ici !

2. a) On sait que la fonction f est strictement décroissante et positive sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $x \in [0, +\infty[$: $x \leqslant 2x$, donc

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ \forall t \in [x, 2x], \quad f(x) \geqslant f(t) \geqslant f(2x) > 0$$

L'inégalité de la moyenne appliquée à f bien continue sur $[0, +\infty[$, avec ici $x \leqslant 2x$, donne :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x).(2x - x) \geqslant \int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0.(2x-x) \Longrightarrow \forall x \in [0, +\infty[,\ xf(x) \geqslant G(x) \geqslant 0$$

Or : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x-1} = 0$ par croissances comparées.

Le théorème d'encadrement s'applique donc ici, qui permet d'écrire :

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$$

b) Pour tout x appartenant à $]-\infty, 0]$: cette fois, $2x \leqslant x$ mais f est toujours décroissante et positive sur l'intervalle, et :

$$\forall x \in]-\infty, 0],\ \forall t \in [2x, x], \quad f(2x) \geqslant f(t) \geqslant f(x)$$

L'inégalité de la moyenne donne cette fois, étant donné qu'on doit écrire les bornes dans l'ordre croissant (on ne considère que la dernière inégalité) :

$$\forall x \in]-\infty, 0], \quad \int_{2x}^{x} f(t)\mathrm{d}t \geqslant f(x).(x-2x) \iff -\int_{x}^{2x} f(t)\mathrm{d}t \geqslant -xf(x) \iff G(x) \leqslant xf(x)$$

Il apparaît cette fois que : $\lim\limits_{x \to -\infty} xf(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{e^x - 1} = -\infty$, donc par comparaison :

$$\lim_{x \to -\infty} G(x) = -\infty$$

3. Comme on connaît l'expression de $G'(x)$ sur $\mathbb{R}$, on détermine son signe à l'aide d'un tableau , sachant que :

$$e^{2x} - 1 \geqslant 0 \iff e^{2x} \geqslant 1 \iff 2x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0 \text{ et : } 3 - e^x \geqslant 0 \iff 3 \geqslant e^x \iff \ln(3) \geqslant x$$

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	$\ln(3)$	$+$	$+\infty$
$e^{2x} - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3 - e^x$		$+$		$+$	0	$-$	
$G'(x)$		$+$	1	$+$	0	$-$	
G	$-\infty$	$\nearrow$			$G(\ln(3))$	$\searrow$	0

Exercice 2

On considère les matrices carrées d'ordre trois : $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Partie I : Réduction de A

1. La matrice A est évidemment non inversible puisque l'une de ses colonnes est nulle.

2. La matrice A est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, à savoir $0, 1$ et 4.

   On se trouve donc dans la situation où A est une matrice carrée d'ordre 3, possédant 3 valeurs propres distinctes : c'est un critère *suffisant* pour pouvoir affirmer que A est diagonalisable, et que ses trois sous-espaces propres sont de dimension 1.

3. Il suffit donc, pour diagonaliser A, de déterminer un vecteur propre pour chacune de ses trois valeurs propres.

   - Il est clair que $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 0,puisque $AX_0 = 0$.

- On cherche ensuite un vecteur X_1 tel que : $AX_1 = X_1 \iff (A - I_3)X_1 = 0$.
  Comme $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, il est clair que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est solution, donc vecteur propre de A pour la valeur propre 1.
- On cherche enfin un vecteur X_4 tel que : $AX_4 = 4.X_4 \iff (A - 4.I_3)X_4 = 0$.
  Comme $A - 4.I_4 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, il est facile de voir que $X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution, donc vecteur propre de A pour la valeur propre 4.

On en déduit que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à une base de vecteurs propres pour A, de sorte que : $\quad A = PDP^{-1}$.

La matrice P a bien tous ses éléments diagonaux égaux à 1, c'est même une matrice triangulaire supérieure dont on calcule facilement l'inverse, en résolvant le système : $PX = Y$ pour tout $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ \phantom{x +{}} y + z = b \\ \phantom{x + y +{}} z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x = a - y - z = a - b \\ y = b - z = b - c \\ c = z \end{cases} \qquad \text{donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie II : Résolution de l'équation $M^2 = A$

On se propose de résoudre l'équation (1) : $M^2 = A$, d'inconnue M, matrice carrée d'ordre trois.
Soit M une matrice carrée d'ordre trois. On note $N = P^{-1}MP$. (La matrice P a été définie en **I.3.**)

1. On raisonne par équivalences, sachant que : $N = P^{-1}MP \iff M = PNP^{-1}$.
$$M^2 = A \iff (PNP^{-1})(PNP^{-1}) = PDP^{-1} \iff PN^2P^{-1} = PDP^{-1} \iff N^2 = D$$
2. L'implication est classique : $\quad N^2 = D \Longrightarrow ND = N \times N^2 = N^3 = N^2 \times N = DN$, qui exprime simplement que N commute avec toutes ses puissances.
3. La question précédente exprime donc que toute solution de l'équation $N^2 = D$ doit commuter avec D.

   On résout donc l'équation générale $ND = DN$, d'inconnue $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$:
$$ND = DN \iff \begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ 0 & e & 4f \\ 0 & h & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix} \iff \begin{cases} b = 0 \\ 4c = 0 \\ d = 0 \\ 4f = f \\ 4g = 0 \\ 4h = h \end{cases} \iff b = 0 = c = d = f = g = h$$

   Les matrices qui commutent avec D sont donc toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ avec a, e, i des réels quelconques, c'est-à-dire toutes les matrices diagonales.

On a donc montré les implications : $N^2 = D \Longrightarrow ND = DN \Longrightarrow N$ est diagonale.

4. Pour toute matrice diagonale $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$:

$$N^2 = D \iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2 & = 0 \\ b^2 & = 1 \\ c^2 & = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \text{ ou } b = -1 \\ c = 2 \text{ ou } c = -2 \end{cases}$$

Il y a donc 4 matrices solutions :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \ N_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

5. La solution B de l'équation (1) cherchée est donc : $B = PN_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ après calcul, puisque B et N_1 ont les mêmes valeurs propres en tant que matrices semblables.

Partie III : Intervention d'un polynôme

1. On cherche ici un polynôme $Q(X) = aX^2 + bX + c$ tel que :

$$\begin{cases} Q(0) & = 0 \\ Q(1) & = 1 \\ Q(4) & = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} c & = 0 \\ a + b + c & = 1 \\ 16a + 4b + c & = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} c & = 0 \\ a + b & = 1 \\ -12b & = -14 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ b = \dfrac{7}{6} \\ a = 1 - b = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

On trouve bien l'unique polynôme : $Q(X) = -\frac{1}{6}X^2 + \frac{7}{6}X.$

2. On a alors :

$$-\frac{1}{6}.A^2 + \frac{7}{6}.A = -\frac{1}{6}.PD^2P^{-1} + \frac{7}{6}.PDP^{-1} = P\left(-\frac{1}{6}.D^2 + \frac{7}{6}.D\right)P^{-1}$$

Comme D est diagonale, les opérations $-\frac{1}{6}.D^2 + \frac{7}{6}.D = Q(D)$ s'effectuent terme à terme et :
$Q(D) = \begin{pmatrix} Q(0) & 0 & 0 \\ 0 & Q(1) & 0 \\ 0 & 0 & Q(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = N_1$, ainsi :

$$-\frac{1}{6}.A^2 + \frac{7}{6}.A = PN_1P^{-1} = B$$

3. On démontre l'équivalence demandée par double implication :
" $\Longrightarrow$ " : si $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $AF = FA$, alors : $A^2F = AAF = AFA = FAA = FA^2$, et :

$$BF = (-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}.A)F = -\frac{1}{6}.A^2F + \frac{7}{6}.AF = -\frac{1}{6}FA^2 + \frac{7}{6}.FA = F(-\frac{1}{6}.A^2 + \frac{7}{6}.A) = FB$$

" $\Longleftarrow$ " : si $BF = FB$, alors comme $B^2 = A$: $AF = B^2F = BBF = BFB = FBB = FA$.

On a donc démontré qu'une matrice commute avec A si et seulement si elle commute avec sa "racine carrée matricielle" B.

Exercice 3

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est $p \in]0,1[$ et la proportion de boules noires est $q = 1 - p \in]0,1[$.

Partie I : Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès qu'on a obtenu une boule noire.

1. La variable aléatoire T égale au nombre de tirages effectués est donc le temps d'attente d'un premier succès (obtenir une boule noire) dans un processus de Bernoulli sans mémoire, où la probabilité de succès est à chaque fois q : T suit donc la loi géométrique de paramètre q.

$$T(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \ P(T = k) = p^{k-1}q, \quad E(T) = \frac{1}{q} \quad \text{et} \quad V(T) = \frac{p}{q^2}$$

2. La variable aléatoire U compte le nombre de boules blanches obtenues avant la première boule noire, il est donc clair que : $\quad U = T - 1$.
Par conséquent, et d'après les propriétés de l'espérance (linéarité) et de la variance, U admet une espérance et une variance qui valent :

$$E(U) = E(T) - 1 = \frac{1}{q} - 1 = \frac{p}{q} \quad \text{et} \quad V(U) = V(T) = \frac{p}{q^2}$$

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

1. La variable aléatoire X est égale au nombre de tirages effectués. Il est clair que $X(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$.
   a) Pour tout entier $k \geqslant 2$: l'événement $[X = k]$ est réalisé si et seulement si les $k-1$ premiers tirages ont donné des boules toutes de la même couleur, le k-ième tirage apportant le premier changement de couleur. Autrement dit :

$$\forall k \geqslant 2, \ [X = k] = (B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k) \cup (N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_{k-1} \cap B_k)$$

   C'est une réunion de deux événements disjoints, et comme les tirages se font avec remise :

$$\begin{aligned}\forall k \geqslant 2, \ P(X = k) =& P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times \ldots \times P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \times P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1}}(N_k) \\ &+ P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \times \ldots \times P_{N_1 \cap \ldots \cap N_{k-2}}(N_{k-1}) \times P_{N_1 \cap \ldots \cap N_{k-1}}(B_k) \\ P(X = k) =& qp^{k-1} + pq^{k-1}\end{aligned}$$

   b) La série $\sum_{k \geqslant 2} P(X = k)$ est la somme de deux séries géométriques de raison respectives $p, q \in]0,1[$, donc elle converge bien, et :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=2}^{+\infty} qp^{k-1} + \sum_{k=2}^{+\infty} pq^{k-1} = p \sum_{j=1}^{+\infty} q^j + q \sum_{j=1}^{+\infty} p^j = p.\frac{q}{1-q} + q.\frac{p}{1-q} = q + p = 1$$

   On a donc bien défini la loi d'une variable aléatoire.

c) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 2} kP(X=k)$ est absolument convergente. C'est une série à termes positifs, donc la convergence simple suffit, et : $\forall k \geqslant 2,\ kP(X=k) = q.k.pk-1 + p.k.q^{k-1}$, la série est une somme de deux séries géométriques dérivées (auxquelles il manque le premier terme) de raisons $p, q \in]0,1[$, donc convergente. On en déduit que X admet une espérance, qui vaut :

$$E(X) = p\sum_{k=2}^{+\infty} kq^{k-1} + q\sum_{k=2}^{+\infty} kp^{k-1} = p.\left(\frac{1}{(1-q)^2}-1\right) + q\left(\frac{1}{(1-p)^2}-1\right) = q.\left(\frac{1}{q^2}-1\right) + p.\left(\frac{1}{p^2}-1\right)$$
$$= \frac{1}{q} - q + \frac{1}{p} - p = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

2. a) La variable aléatoire Y est égale au nombre de boules blanches obtenues lorsque les tirages s'arrêtent, donc :

   $[X=2]\cap[Y=1]$ est réalisé si et seulement si en deux tirages, on a obtenu une boule de chaque couleur : $P([X=k]\cap[Y=1]) = P((B_1\cap N_2)\cup(N_1\cap B_2)) = P(B_1)\times P_{B_1}(N_2) + P(N_1)\times P_{N_1}(B_2) = pq + qp = 2pq$.

   Pour tout entier $k \geqslant 3$: $[X=k]\cap[Y=1]$ est réalisé si et seulement si k tirages sont juste nécessaires pour obtenir les deux couleurs, une seule boule étant blanche : c'est donc la dernière ! Et $[X=k]\cap[Y=1] = N_1\cap\ldots\cap N_{k-1}\cap B_k$, donc : $\quad \forall k \geqslant 3,\ P([X=k]\cap[Y=1]) = q^{k-1}p$.

   b) On en déduit, d'après la formule des probabilités totales appliquées avec le système complet d'événements $([X=k])_{k\geqslant 2}$:

$$P(Y=1) = \sum_{k=2}^{+\infty} P([X=k]\cap[Y=1]) = 2pq + \sum_{k=3}^{+\infty} q^{k-1}p = 2pq + p\sum_{j=2}^{+\infty} q^j = 2pq + p.\frac{q^2}{1-q} = 2pq + q^2$$
$$= q(2p+q) = q(1+p)$$

   c) La variable aléatoire Y a pour univers-image : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. On a déjà calculé $P(Y=1)$, et pour tout entier $k \geqslant 2$: $[Y=k]$ est réalisé si et seulement si k boules blanches ont été obtenues lorsqu'on a eu au moins une fois chacune des deux couleurs, ce qui se produit si et seulement si $B_1\cap\ldots\cap B_k\cap N_{k+1}$ est réalisé.

   Ainsi : $\quad \forall k \geqslant 2,\ P(Y=k) = p^k q$.

   On admet que l'espérance de Y existe et que : $\quad E(Y) = \dfrac{1}{q}(1-p+p^2)$ (ce qui n'est pas difficile à vérifier).

3. Les variables aléatoires Y et Z ont des rôles symétriques ; il suffit donc d'échanger les rôles de p et q pour, de la loi de Y, déduire celle de Z :

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad P(Z=1) = p(1+q) \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 2,\ P(Z=k) = q^k p$$

   Toujours en échangeant les rôles de p et q, et grâce au résultat admis pour $E(Y)$:

$$E(Z) = \frac{1}{p}(1-q+q^2).$$

4. Soit ω une issue de l'espace probabilisé Ω sur lequel sont définies les variables aléatoires X, Y, Z, pour laquelle l'expérience se termine : dans ce cas, $X(\omega)$ représente le nombre total de boules tirées, et le dernier tirage est celui d'une boule de la deuxième couleur, c'est-à-dire que :
   - soit $Y(\omega) = 1$ et dans ce cas $Z(\omega) = X(\omega) - 1$
   - soit $Z(\omega) = 1$ et alors $Y(\omega) = X(\omega) - 1$

   Dans les deux cas, on a bien : $Y(\omega)\times Z(\omega) = 1\times(X(\omega)-1)$, vrai pour presque tout $\omega \in \Omega$, c'est-à-dire que YZ et $X-1$ sont des variables aléatoires (presque-sûrement) égales.

5. Du résultat précédent, on déduit que $YZ = X-1$ admet une espérance qui vaut : $E(YZ) = E(X)-1$, donc le couple (Y, Z) admet une covariance qui vaut :

$$\text{cov}(Y, Z) = E(YZ) - E(Y)E(Z) = E(X) - E(Y)E(Z) - 1$$

(qu'on pourrait ensuite calculer explicitement en fonction de p et q).