MATHÉMATIQUES - EMLyon E 2008

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On admet l'encadrement suivant : $2,7 < e < 2,8$.

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0,+\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) - t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ comme produit et somme de fonctions de référence continues sur cet intervalle ouvert.
   De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln(t) = 0$, donc $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} t\ln(t) - t = 0 - 0 = 0 = f(0)$, donc f est également continue en 0.
   Finalement, f est bien continue sur $[0,+\infty[$.
2. La fonction f est même de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, toujours par produit et somme de fonctions de classe C^1 sur cet intervalle, avec :
   $$\forall t \in]0,+\infty[, \quad f'(t) = 1.\ln(t) + t.\frac{1}{t} - 1 = \ln(t)$$
   On a reconnu que f est en fait une primitive classique de la fonction ln sur $]0,+\infty[$...
3. Pour calculer la limite de f en $+\infty$, il suffit d'écrire : $\forall t \in]0,+\infty[$, $f(t) = t.(\ln(t) - 1)$, où : $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln(t) - 1 = +\infty$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} t.(\ln(t) - 1) = +\infty$ par produit de limites.
4. La fonction f a pour dérivée sur $]0,+\infty[$, la fonction ln dont le signe est parfaitement connu, d'où le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

5. La fonction f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et on sait que *sa dérivée*, la fonction ln, est *strictement croissante* sur cet intervalle : c'est l'un des critères permettant de conclure que f est une fonction convexe sur $]0,+\infty[$.
6. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$/

a) La fonction f est continue en 0, mais concernant la dérivabilité en ce point, si on écrit le taux d'accroissement :

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \frac{t\ln(t)-t-0}{t} = \ln(t)-1 \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$$

On en déduit que f n'est pas dérivable en 0, mais que sa courbe représentative Γ admet une demi-tangente verticale au point $O(0,0)$.

b) Pour déterminer les points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses, on résout l'équation :

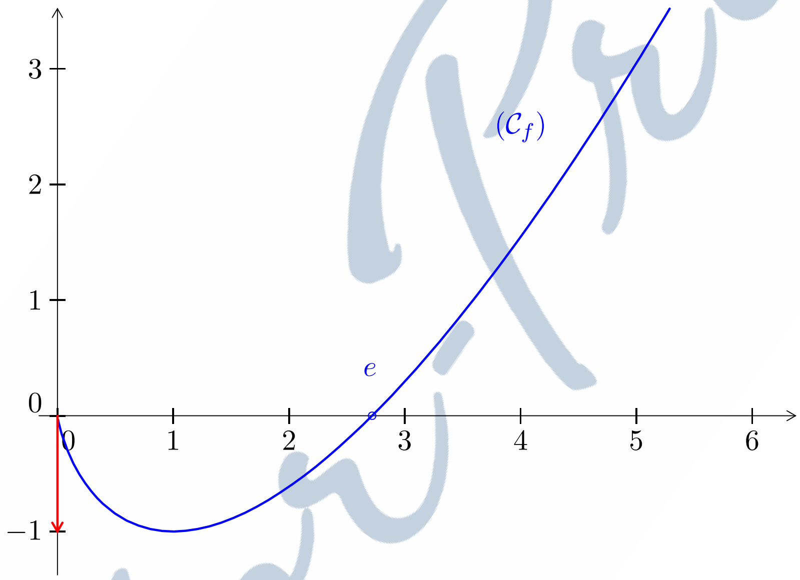
$$f(t)=0 \iff t\ln(t)-t=0 \iff t(\ln(t)-1)=0 \iff (t=0) \text{ ou } (\ln(t)=1) \iff (t=0) \text{ ou } t=e$$

Ainsi : $\quad \Gamma$ coupe l'axe des abscisses en $O(0,0)$ et en $A(e,0)$.

c) On sait déjà que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=+\infty$, on calcule donc : $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f(t)}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \ln(t)-1=+\infty$.

Ce résultat exprime que la courbe Γ admet une *branche parabolique d'axe* $(0y)$ au voisinage de $+\infty$.

d) On trace une allure cohérente de Γ en tenant soigneusement compte des résultats précédents : demi-tangente, points remarquables, nature de la branche infinie.



Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère l'application $G :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]1,+\infty[$, par :

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\mathrm{d}t.$$

1. La fonction f étant continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$, elle y admet donc des primitives ; soit F l'une d'elles, alors on peut écrire :

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ G(x) = \frac{1}{2}\left[F(t)\right]_{x-1}^{x+1} = \frac{1}{2}.\left(F(x+1)-F(x-1)\right)$$

En tant que primitive d'une fonction continue : F est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. Elle est même de classe C^2 sur $]0,+\infty[$, puisque f est de classe C^1 sur cet intervalle.

Comme les fonctions affines $x\mapsto x-1$ et $x\mapsto x+1$ sont de classe C^1 sur $]1,+\infty[$, à valeurs dans $]0,+\infty[$, alors par composition : F est bien de classe C^2 sur $]1,+\infty[$, avec :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad G'(x) = \frac{1}{2}\left(F'(x+1)-F'(x-1)\right) = \frac{1}{2}\left(f(x+1)-f(x-1)\right)$$

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad G''(x) = \frac{1}{2}\left(f'(x+1) - f'(x-1)\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(x+1) - \ln(x-1)\right)$$

2. a) Pour tout réel $x \in]1,+\infty[$:

$$0 < x-1 < x+1 \text{ donc } \ln(x-1) < \ln(x+1) \iff \ln(x+1) - \ln(x-1) > 0 \iff G''(x) > 0$$

On en déduit bien que G' est une fonction strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

b) Le calcul explicite donne :

$$G'(2) = \frac{1}{2}\left(f(3) - f(1)\right) = \frac{1}{2}\left(3\ln(3) - 3 + 1\right) = \frac{1}{2}(3\ln(3) - 2)$$

Or : $3 > e$ donc $\ln(3) > 1$, donc $3\ln(3) > 3 > 2$, et on a bien : $G'(2) = \dfrac{1}{2}(3\ln(3) - 2) > 0$.

c) On sait que la fonction G' est **continue** (car G est de classe C^2), **strictement croissante** sur $]1,+\infty[$, avec :

$G'(2) > 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to1^+} f(x-1) = \lim_{X\to0^+} f(X) = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to1^+} G'(x) = \frac{1}{2}\left(f(2) - 0\right) = \ln(2) - 1 < 0$ puisque $2 < e$. Donc G' change de signe sur $]1,2[$, par conséquent :

D'après le théorème de la bijection, l'équation $G'(x) = 0$, d'inconnue $x \in]1,+\infty[$, admet une unique solution α, vérifiant plus particulièrement : $1 < \alpha < 2$.

Partie III : Étude d'une fonction de deux variables

On considère l'application $\Phi :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $(x,y) \in]1,+\infty[^2$, par :

$$\Phi(x,y) = \left(y - f(x+1)\right)^2 + \left(y - f(x-1)\right)^2$$

où l'application f est définie dans la partie I.

1. L'application f étant de classe C^2 sur $]0,+\infty[$, la fonction Φ de deux variables est bien de classe C^2 sur $]1,+\infty[^2$, comme composée, somme et produit de telles fonctions, et :

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2, \quad \partial_1(\Phi)(x,y) &= -2.f'(x+1).\left(y - f(x+1)\right) - 2f'(x-1).\left(y - f(x-1)\right)\\
&= -2\ln(x+1).\left(y - f(x+1)\right) - 2\ln(x-1).\left(y - f(x-1)\right)\\
\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2, \quad \partial_2(\Phi)(x,y) &= 2\left(y - f(x+1)\right) + 2\left(y - f(x-1)\right)\\
&= 4y - 2\left(f(x+1) + f(x-1)\right)
\end{aligned}$$

2. Au point $(\alpha, f(\alpha+1))$, les dérivées partielles d'ordre 1 valent :

$$\partial_1(\Phi)(\alpha, f(\alpha+1)) = -2\ln(\alpha+1).\underbrace{\left(f(\alpha+1) - f(\alpha+1)\right)}_{=0} - 2\ln(\alpha-1).\underbrace{\left(f(\alpha+1) - f(\alpha-1)\right)}_{=2G'(\alpha)} = -4\ln(\alpha-1).G'(\alpha)$$

par définition de α ! Et :

$$\partial_2(\Phi)(\alpha, f(\alpha+1)) = 4f(\alpha+1) - 2f(\alpha+1) - 2f(\alpha-1) = 2\left(f(\alpha+1) - f(\alpha-1)\right) = 4G'(\alpha) = 0$$

à nouveau. On en conclut que $(\alpha, f(\alpha+1))$ est bien un point critique de Φ.

3. Pour conclure quant à la nature du point critique $(\alpha, f(\alpha+1))$, on doit calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction Φ, de classe C^2 sur $]1,+\infty[^2$:

$$\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2, \quad \partial^2_{1,1}(\Phi)(x,y) = -\frac{2}{x+1}\left[y - f(\alpha+1)\right] + 2\left[\ln(x+1)\right]^2 - \frac{2}{x-1}\left[y - f(x-1)\right] + 2\left[\ln(x-1)\right]^2$$

$$\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2, \quad \partial^2_{1,2}(\Phi)(x,y) = \partial^2_{2,1}(\Phi)(x,y) = -2\ln(x+1) - 2\ln(x-1)$$

(d'après le théorème de Schwarz)

$$\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2, \quad \partial^2_{2,2}(\Phi)(x,y) = 4$$

Á l'évaluation en $(\alpha, f(\alpha+1))$, compte-tenu des simplifications qui surviennent, notamment du fait que $f(\alpha+1) - f(\alpha+1) = 2G'(\alpha) = 0$, on obtient la Hessienne de Φ en $(\alpha, f(\alpha+1))$:

$$H = \begin{pmatrix} 2\left([\ln(\alpha+1)]^2 + [\ln(\alpha-1)]^2\right) & -2[\ln(\alpha+1)+\ln(\alpha-1)] \\ -2[\ln(\alpha+1)+\ln(\alpha-1)] & 4 \end{pmatrix}$$

Notons : $A = \ln(\alpha+1)$ et $B = \ln(\alpha-1)$ dans la suite, la Hessienne se réécrit alors : $H = \begin{pmatrix} 2A^2+2B^2 & -2A-2B \\ -2A-2B & 4 \end{pmatrix}$.

Le calcul explicite de ses valeurs propres est possible mais hardu : cet exercice n'est en fait plus vraiment dans l'esprit du nouveau programme ECE; la question se résout facilement avec les notations de Monge (voir l'ancien programme), on propose ici la rédaction suivante :

- La Hessienne H est, par le théorème de Schwarz en fait, *symétrique réelle* : on sait donc d'après le théorème admis, qu'elle est dfiagonalisable et qu'elle possède donc deux valeurs propres réelles distinctes ou confondues, notons-les λ_1 et λ_2.
- Ces deux réels sont les valeurs de λ pour lesquelles $H - \lambda.I_2 = \begin{pmatrix} 2A^2+2B^2-\lambda & -2A-2B \\ -2A-2B & 4-\lambda \end{pmatrix}$ est non-inversible, donc de déterminant nul, où :

$$\begin{aligned} \det(H-\lambda.I_2) &= (2A^2+2B^2-\lambda)\times(4-\lambda) - (2A+2B)^2 \\ &= \lambda^2 - (2A^2+2B^2+4)\lambda + 8(A^2+B^2) - 4(A+B)^2 \\ &= \lambda^2 - (2A^2+2B^2+4)\lambda + 4(A^2+B^2-2AB). \end{aligned}$$

- Compte-tenu que le déterminant ci-dessus, trinôme du second degré en λ, a pour racines réelles les valeurs propres λ_1 et λ_2, il se factorise sous la forme : $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1+\lambda_2).\lambda + \lambda_1\times\lambda_2$.
- Par identification des coefficients, on obtient donc :

  ⋆ $\lambda_1 \times \lambda_2 = 4(A-B)^2 > 0$ puisque $A = \ln(\alpha+1) > \ln(\alpha-1) = B$. Les deux valeurs propres sont donc non nulles et de même signe puisque leur produit est strictement positif.

  ⋆ $\lambda_1 + \lambda_2 = 2A^2+2B^2+4 > 0$, **donc λ_1 et λ_2 sont strictement positives**.

On conclut finalement(!) que **la fonction Φ admet sur l'ouvert $]1,+\infty[^2$, un minimum local au point critique** $(\alpha, f(\alpha+1))$.

Exercice 2

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie I : Réduction simultanée de A et B

1. Les valeurs propres de A sont les réels λ tels que $A - \lambda.I_3$ est non-inversible.

$$A - \lambda.I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1-\lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_3 + (1-\lambda)L_1} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1-\lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 2\lambda & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1-\lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 1 \end{pmatrix} = A_\lambda$$

La réduite de Gauss A_λ obtenue est non-inversible (et donc $A - \lambda.I_3$ également) si et seulement si l'un des coefficients diagonaux de cette matrice triangulaire, est nul. Donc :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 0, 1\}$$

Remarque : comme A est alors une matrice carrée d'ordre 3 qui possède trois valeurs propres distinctes, elle vérifie le critère suffisant selon lequel A est diagonalisable, et tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

On calcule alors les sous-espaces propres en résolvant successivement le système : $(A - \lambda.I_3)X = 0_{3,1}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour chacune des valeurs propres, sachant qu'il est équivalent à : $A_\lambda X = 0$

- Pour $\lambda = 0$:

$$A_0 X = 0_{3,1} \iff \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x - 2y - z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc : $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Comme $E_0(A)$ est engendré par un seul vecteur non-nul, celui-ci forme une famille libre, et donc une base de $E_0(A)$.

On a d'emblée cherché à obtenir un vecteur propre de base qui satisfasse la demande de l'énoncé concernant sa deuxième coordonnée.

- Pour $\lambda = -1$:

$$A_{-1} X = 0_{3,1} \iff \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -y = -z \\ y = z \end{cases}$$

Donc : $E_{-1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \middle| \, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
Le sous-espace propre $E_{-1}(A)$ est à nouveau engendré par un seul vecteur non-nul, qui en constitue donc une base et est le vecteur propre cherché.

- Pour $\lambda = 1$:

$$A_1 X = 0_{3,1} \iff \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} -2x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \\ & & -y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \begin{cases} x = -y - z = 0 \\ z = -y \end{cases}$$

Donc : $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.
Là encore, $E_1(A)$ est engendré par un vecteur non-nul qui en constitue donc une base, et qui correspond à la demande de l'énoncé concernant sa deuxième coordonnée.

Sachant que A est diagonalisable, on sait en effet que $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à une base de vecteurs propres pour A, qui donne lieu à la relation :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ la matrice de l'énoncé}$$

La méthode habituelle de calcul de l'inverse donne : $\quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Les calculs matriciels donnent :

$$C = P^{-1}BP = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Qui est bien une matrice diagonale. Remarquons donc que $B = PCP^{-1}$ est donc aussi diagonalisable dans la même base de vecteurs propres que A, et qu'elle a d'ailleurs les mêmes valeurs propres (mais les sous-espaces propres de A ne sont pas associés aux mêmes valeurs propres que pour B).

Partie II : Étude d'un enomorphisme d'un espace de matrices

On note E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois, et on considère l'application $f: \ E \to E$ qui, à toute matrice M carrée d'ordre trois, associe $f(M) = AM - MB$.

1. C'est du cours bien sûr : $\dim E = \dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = 3^2 = 9$.

2. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $f(M) = AM - MB$ appartient encore à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ en tant que différence de produits de matrices carrées d'ordre 3.

   Pour toutes matrices M, M' de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et tous réels λ, μ :

$$\begin{aligned} f(\lambda.M + \mu.M') &= A(\lambda.M + \mu.M') - (\lambda.M + \mu.M')B = \lambda.AM + \mu.AM' - \lambda.MB - \mu.M'B \\ &= \lambda.(AM - MB) + \mu.(AM' - M'B) = \lambda.f(M) + \mu.f(M') \end{aligned}$$

   Ainsi, $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une application linéaire : c'est bien un endomorphisme de $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Soit $M \in E$; on note : $N = P^{-1}MP$, où P est définie en **I.2.**.

   a) On écrit la chaîne d'équivalences bien classique, sachant que :

$$N = P^{-1}MP \iff M = PNP^{-1} :$$

$$\begin{aligned} M \in \operatorname{Ker}(f) &\iff f(M) = 0_3 \iff AM = MB \iff PDP^{-1}PNP^{-1} = PNP^{-1}PCP^{-1} \\ &\iff PDNP^{-1} = PNCP^{-1} \iff DN = NC \end{aligned}$$

   b) On cherche les matrices $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$DN = NC \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -d & -e & -f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & -c \\ d & 0 & -f \\ g & 0 & -i \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a & = 0 \\ -c & = 0 \\ -d & = d \\ -e & = 0 \\ -f & = -f \\ g & = g \\ h & = 0 \\ i & = -i \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = c = d = e = h = i = 0 \\ b, f, g \in \mathbb{R} \text{ quelconques} \end{cases}$$

   L'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 telle que $DN = NC$ est donc :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; b, f, g \in \mathbb{R} \text{ quelconques} \right\}$$

   c) De la description précédente de l'ensemble cherché, notons-le F, on tire immédiatement :

$$F = \{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) |\; DN = NC\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{Vect}(E_{1,2}, E_{2,3}, E_{3,1})$$

   En notant $E_{i,j}$ la matrice élémentaire d'ordre 3, d'indice (i, j). F est donc un sous-espace vectoriel de E comme sous-espace engendré par trois éléments de E ; de plus, comme la famille génératrice de F obtenue est constituée d'une sous-famille de la *base canonique* de E (les 9 matrices élémentaires), on en déduit que cette famille est libre, donc est une base de F.

   Et ainsi : $\quad \dim F = 3$.

4. a) De l'équivalence obtenue en 3.a), on déduit :

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ PNP^{-1} \middle|\ N \in F \right\} = \left\{ P.(b.E_{1,2} + f.E_{2,3} + g.E_{3,1})P^{-1} \middle|\ b, f, g \in \mathbb{R} \text{ quelconques} \right\}$$
$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(PE_{1,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}, PE_{3,1}P^{-1})$$

La famille génératrice obtenue de $\mathrm{Ker}(f)$ est bien libre :

$$a.PE_{1,2}P^{-1} + b.PE_{2,3}P^{-1} + c.PE_{3,1}P^{-1} = 0_3 \iff P(a.E_{1,2} + b.E_{2,3} + c.E_{3,1})P^{-1} = 0_3$$
$$\iff a.E_{1,2} + b.E_{2,3} + c.E_{3,1} = 0_3 \iff \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3 \iff a = b = c = 0$$

Donc on a bien obtenu une base de $\mathrm{Ker}(f)$, et $\dim \mathrm{Ker}(f) = 3$.

Remarque : de façon plus savante (et donc plus rapide), on pouvait dire que l'application $\varphi : \begin{array}{rcl} F & \to & \mathrm{Ker}(f) \\ N & \mapsto & PNP^{-1} \end{array}$ est linéaire, et bijective, du fait de l'inversibilité de P et de l'équivalence de 3.a).
Les sous-espaces vectoriels F est $\mathrm{Ker}(f)$ sont donc *isomorphes*, et ont par conséquent même dimension.

Quelle que soit l'argumentation employée, on conclut de la même manière : puisque E est de dimension finie, d'après le théorème du rang :

$$\dim \mathrm{Im}(f) = \dim E - \dim \mathrm{Ker}(f) = 9 - 3 = 6$$

b) La description faite plus haut de $\mathrm{Ker}(f)$ permet d'en déduire facilement un vecteur non-nul de ce noyau, par exemple sont premier vecteur de base :

$$PE_{1,2}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f)$$

De même : il suffit de prendre un élément M de E n'appartenant pas au noyau de f, pour que son image $N = f(M)$ soit évidemment un élément non-nul de $\mathrm{Im}(f)$! Par exemple avec $M = E_{1,1}$ qui n'appartient certainement pas à $\mathrm{Ker}(f)$:

$$N = f(M) = AE_{1,1} - E_{1,1}B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(f) \setminus \{0_3\}$$

Exercice 3

Les parties **I** et **II** sont indépendantes.

Partie I : Étude d'une variable aléatoire

1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$\forall x \in [0;1],\ h(x) = \frac{x}{2-x}$$

   a) La fonction h est définie et dérivable sur $[0,1]$ comme quotient de deux fonctions affines, avec : $\forall x \in [0,1],\ h'(x) = \dfrac{1.(2-x) - x.(-1)}{(2-x)^2} = \dfrac{2}{(2-x)^2} > 0$. Ainsi :

   La fonction h est **continue, strictement croissante** sur $[0,1]$: elle réalise donc une bijection de $[0,1]$ dans l'intervalle image : $[h(0), h(1)] = [0,1]$, et :

$$\begin{aligned}\forall y \in [0,1] :\quad h(x) = y &\iff \frac{x}{2-x} = y \\ &\iff x = (2-x)y \iff x(1+y) = 2y \\ &\iff x = \frac{2y}{1+y}\end{aligned}$$

   Donc : $\quad \forall y \in [0,1],\ h^{-1}(y) = \dfrac{2y}{1+y}$.

   b) Pour tout $x \in [0,1]$: $h(x) = \dfrac{x}{2-x} = \dfrac{x-2+2}{2-x} = -1 + \dfrac{2}{2-x}$, donc $\alpha = -1$ et $\beta = 2$ conviennent.

   Remarque : On pouvait naturellement procéder par identification des coefficients au numérateur en partant de $\alpha + \dfrac{\beta}{2-x} = \dfrac{(2-x)\alpha + \beta}{2-x}$...

   c) Grâce à la question précédente, on peut écrire :

$$\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{2-x}\right)\mathrm{d}x = [-x - 2\ln(|2-x|)]_0^1 = -1 - 0 - 0 + 2\ln(2) = 2\ln(2) - 1$$

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

   a) C'est une question de cours : $E(X) = \dfrac{1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{1}{12}$.

   b) Pour tout réel y de $[0,1]$:

$$\begin{aligned}P\left(\frac{X}{2-X} \leqslant y\right) &= P(h(X) \leqslant y) \\ &= P(X \leqslant h^{-1}(y)) \quad \text{car } h \text{ est bijective, strictement croissante sur } [0,1] \\ &= F_X(h^{-1}(y)) = h^{-1}(y) = \frac{2y}{1+y} \quad \text{puisque } h^{-1}(y) \in [0,1] \text{ et } X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])\end{aligned}$$

   c) La variable aléatoire $Y = \dfrac{X}{2-X} = h(X)$ est bien définie puisque X qui suit la loi uniforme sur $[0,1]$, a pour univers-image $X(\Omega) = [0,1]$. Et comme h est bijective de $[0,1]$, alors $Y(\Omega)$ est aussi égal à $[0,1]$, d'où l'expression de la fonction de répartition de Y :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \dfrac{2y}{1+y} & \text{si } y \in [0,1] \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

La fonction F_Y est alors de classe C^1 sur $]0,1[$ comme quotient de telles fonctions, et de classe C^1 sur $]-\infty,0[$ et $]1,+\infty[$ comme fonction constante, elle est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et 1.
La fonction F_Y est par conséquent aussi continue sur $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$, de plus : $\lim\limits_{y\to 0^+} F_Y(y) = \dfrac{2\times 0}{1+0} = 0 = \lim\limits_{y\to 0^-} F_Y(y)$ et $\lim\limits_{y\to 1^-} F_Y(y) = \dfrac{2\times 1}{1+1} = 1 = \lim\limits_{y\to 1^+} F_Y(y)$, donc F_Y est aussi continue en 0 et 1 : F_Y est finalement continue sur tout $\mathbb{R}$.
On peut donc conclure que la variable aléatoire Y admet une densité, obtenue par dérivation de F_Y sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, et par un choix arbitraire d'une valeur positive en 0 et en 1 (ici la valeur 0) :

$$\forall y\in\mathbb{R},\quad f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2.(1+y)-2y.1}{(1+y)^2} = \dfrac{2}{(1+y)^2} & \text{si } x\in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d) Le plus efficace ici est d'utiliser le théorème de transfert, qui dit que :
$Y = h(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x).f_X(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente, où $f_X :\ x\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x\in[0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de la loi uniforme sur $[0,1]$.
Comme cette fonction, ainsi que la fonction $x\mapsto h(x).f(x)$, est positive sur $[0,1]$ et nulle en-dehors, l'intégrale est bien convergente, et :

$$E(Y) = \int_0^1 h(x).1\ \mathrm{d}x = 2\ln(2)-1$$

Selon le calcul déjà réalisé à la question 1.c) !

Partie II : Étude d'un temps d'attente

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une réunion est prévue entre n invités que l'on note $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Chaque invité arrivera entre l'instant 0 et l'instant 1.
Pour tout entier k tel que $1\leqslant k\leqslant n$, on modélise l'instant d'arrivée de l'invité I_k par une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$.
On suppose de plus que, pour tout réel t, les n événements $[T_1\leqslant t]$, $[T_2\leqslant t], \ldots, [T_n\leqslant t]$, sont indépendants.

1. Soit un réel t appartenant à $[0;1]$. Pour tout entier k tel que $1\leqslant k\leqslant n$, on note B_k la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'événement $[T_k\leqslant t]$ est réalisé et la valeur 0 sinon.
On note $S_t = B_1 + B_2 + \ldots + B_n$.
   a) Il est clair, au vu de sa définition, que la variable aléatoire S_t compte le nombre d'invités arrivés *au plus tard à l'instant* t, c'est-à-dire arrivés entre l'instant 0 et l'instant t.
   b) Il est clair également que puisque les événement $[T_1\leqslant t]$, $[T_2\leqslant t], \ldots, [T_n\leqslant t]$ sont mutuellement indépendants, qui représentent les "succès" respectifs des variables aléatoires de Bernoulli $B_1, B_2, \ldots, B_n$: celles-ci sont elles-mêmes mutuellement indépendantes, et de même probabilité de succès $P(T_i\leqslant t) = F_{T_i}(t) = t$ d'après le cours sur la loi uniforme sur $[0,1]$; par conséquent :

$$S_t \text{ suit la loi binomiale de paramètres } (n,t).$$

Ainsi :

$$S_t(\Omega) = [\![0,n]\!],\quad \forall k\in[\![0,n]\!],\ P(S_t=k) = \binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k},\quad E(S_t)=nt,\ V(S_t)=nt(1-t)$$

2. Soit R_1 la variable aléatoire égale à l'instant de la première arrivée.

a) Soit $t \in [0,1]$: l'événement $[R_1 > t]$ est réalisé si et seulement si le premier invité arrive *après* l'instant t, ce qui équivaut à dire qu'entre les instants 0 et t, aucun invité n'est arrivé.

En clair : $[R_1 > t] = [S_t = 0]$.

b) On en déduit : $\forall t \in [0,1],\ P(R_1 > t) = P(S_t = 0) = \binom{n}{0} t^0 (1-t)^{n-0} = (1-t)^n$.

Comme $R_1(\Omega) = [0,1]$, on en déduit le calcul de la fonction de répartition de cette variable aléatoire :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_{R_1}(t) P(R_1 \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 1 \\ 1 - P(R_1 > t) = 1 - (1-t)^n & \text{si } t \in [0,1] \end{cases}$$

La fonction de répartition F_{R_1} est clairement de classe C^1 sur $]0,1[$ comme polynôme, et sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$ comme fonction constante. Elle est par conséquent continue sur chacun de ces trois intervalles, et comme de plus :

$\lim\limits_{t \to 0^+} 1 - (1-t)^n = 1 - 1^n = 0 = \lim\limits_{t \to 0^-} F_{R_1}(t)$ et $\lim\limits_{t \to 1^-} 1 - (1-t)^n = 1 - 0^n = 1 = \lim\limits_{t \to 1^+} F_{R_1}(t)$, alors F_{R_1} est continue sur tout $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et 1.

R_1 est donc une variable aléatoire à densité, et une densité de R_1 est, par exemple, donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_{R_1}(t) = \begin{cases} n(1-t)^{n-1} & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Soit R_2 la variable aléatoire égale à l'instant de la deuxième arrivée.

Sans indication de la part de l'énoncé, il faut ici prendre l'initiative de suivre la même démarche qu'à la question précédente :

Pour tout réel $t \in [0,1]$, $[R_2 > t]$ est réalisé si et seulement si le deuxième invité arrive après l'instant t ; cela signifie qu'entre les instants 0 et t, il est arrivé *au plus* un invité, c'est-à-dire 1 ou 0. En clair, les événements : $[R_2 > t]$ et $[S_t \leqslant 1] = [S_t = 0] \cup [S_t = 1]$ sont égaux, et par union disjointe :

$$\forall t \in [0,1],\ P(R_2 > t) = P(S_t = 0) + P(S_r = 1) = (1-t)^n + n.t(1-t)^{n-1} = (1-t)^{n-1}(1 + (n-1)t)$$

Comme à nouveau, $R_2(\Omega) = [\![0,1]\!]$, on en déduit la fonction de répartition de R_2 :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_{R_2}(t) = P(R_2 \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 1 \\ 1 - P(R_2 > t) = 1 - (1-t)^{n-1}(1 + (n-1)t) & \text{si } t \in [0,1] \end{cases}$$

À nouveau, F_{R_2} est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ et $]1, +\infty[$, et :

$\lim\limits_{t \to 0^+} F_{R_2}(t) = 1 - 1^{n-1}(1+0) = 0 = \lim\limits_{t \to 0^-} F_{R_2}(t)$ et $\lim\limits_{t \to 1^-} F_{R_2}(t) = 1 - 0^n.(1 + n - 1) = 1 = \lim\limits_{t \to 1^+} F_{R_2}(t)$.

La fonction F_{R_2} est donc continue sur tout $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ saut peut-être en 0 et 1 : R_2 est donc une variable à densité.

Une densité de R_2 est par exemple, définie par dérivation de F_{R_2} là où c'est possible :

$$\begin{aligned} \forall t \in]0,1[,\ F'_{R_2}(t) &= (n-1)(1-t)^{n-2}(1 + (n-1)t) - (1-t)^{n-1}.(n-1) \\ &= (n-1)(1-t)^{n-2}[1 + (n-1)t - (1-t)] = n(n-1)t(1-t)^{n-2} \end{aligned}$$

Donc une densité f_{R_2} de R_2 est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_{R_2}(t) = \begin{cases} n(n-1)t(1-t)^{n-2} & \text{si } t \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$