MATHÉMATIQUES - EMLyon E 2003

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

EXERCICE 1

On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note I la matrice identité d'ordre 3.

I. Première partie.

1. Le calcul matriciel donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui est bien la relation : $A^3 = A^2 + 2A$.

2. Soient a et b deux réels tels que :

$a.A + b.A^2 = 0_3 \iff \begin{pmatrix} a+3b & a+b & a+b \\ a+b & b & b \\ a+b & b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui entraîne de façon immédiate,

par identification des coefficients : $\begin{cases} a+b & = 0 \\ b & = 0 \end{cases} \iff a = b = 0.$

La famille (A, A^2) est bien libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$\exists!(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2;\ A^n = a_n.A + b_n.A^2$".

Montrons que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 1$, l'égalité : $A^1 = a_1.A + b_1.A^2$ est évidemment vérifiée pour $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$, et il est clair que seules ces deux valeurs peuvent convenir.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons sous cette hypothèse que $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie, c'est-à-dire qu'il existe un couple de réels unique (a_{n+1}, b_{n+1}) tel que : $A^{n+1} = a_{n+1}.A + b_{n+1}.A^2$.

On sait que : $A^n = a_n.A + b_n.A^2$, donc on peut écrire :

$A^{n+1} = A \times A^n (= A^n \times A) = A \times (a_n.A + b_n.A^2) = a_n.A^2 + b_n.A^3$,

or $A^3 = A^2 + 2.A$ (q.1.), donc :

$A^{n+1} = a_n.A^2 + b_n.(A^2 + 2.A) = 2b_n.A + (a_n + b_n).A^2$.

En posant : $\begin{cases} a_{n+1} & = 2b_n \\ b_{n+1} & = a_n + b_n \end{cases}$, on obtient bien la relation voulue. La famille (A, A^2) étant libre, le couple obtenu est bien unique et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie, d'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Les relations de récurrence obtenues précédemment permettent d'écrire le script suivant :

```
n = input('Donner un entier n>=1 : ')
a = 1; b = 0
for i=2:n
    t = a
    a = 2*b
    b = t + b
end
disp('a_'+string(n)+' = '+string(a)+' et b_'+string(n)+' = '+string(b))
```

5. a) La récurrence précédente a fourni les relations de récurrence qui donnent directement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+2} = 2b_{n+1} = 2.(a_n + b_n) = 2a_n + 2b_n = a_{n+1} + 2a_n$$

b) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie donc une relation de récurrence linéaire d'ordre deux, qui a pour équation caractéristique :
$x^2 = x + 2 \iff x^2 - x - 2 = 0$, de discriminant $\Delta = 1 + 2.4 = 9 > 0$ et admet donc deux solutions : $\quad r_1 = \dfrac{1-3}{2} = -1 \quad$ et $\quad r_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2$.
Il existe donc deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = a.(-1)^n + b.2^n$$

Cette relation est en particulier vraie pour $n = 1$ et $n = 2$, d'où :

$$\begin{cases} a.(-1)^1 + b.2^1 & = a_1 \\ a.(-1)^2 + b.2^2 & = a_2 \end{cases} \iff \begin{cases} -a + 2b & = 1 \\ a + 4b & = 0 \end{cases} (a_2 = 2b_1 = 0) \iff \begin{cases} -a + 2b & = 1 \\ \quad\quad 6b & = 1 \; L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & = -1 + 2b = -2/3 \\ b & = 1/6 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi :} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \; a_n = \frac{1}{6}.2^n - \frac{2}{3}.(-1)^n$$

On trouve alors b_n à l'aide de la relation, vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_{n+1} = 2b_n \iff b_n = \frac{1}{2}.a_{n+1}$, qui donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad b_n = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{6}.2^{n+1} - \frac{2}{3}.(-1)^{n+1}\right) = \frac{1}{6}.2^n + \frac{1}{3}.(-1)^n$$

c) On peut donc finir le calcul explicite de A^n en fonction de n, selon la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = a_n.A + b_n.A^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}.2^n + \frac{1}{3}.(-1)^n & \frac{1}{3}.2^n - \frac{1}{3}.(-1)^n & \frac{1}{3}.2^n - \frac{1}{3}.(-1)^n \\ \frac{1}{3}.2^n - \frac{1}{3}.(-1)^n & \frac{1}{6}.2^n + \frac{1}{3}.(-1)^n & \frac{1}{6}.2^n + \frac{1}{3}.(-1)^n \\ \frac{1}{3}.2^n - \frac{1}{3}.(-1)^n & \frac{1}{6}.2^n + \frac{1}{3}.(-1)^n & \frac{1}{6}.2^n + \frac{1}{3}.(-1)^n \end{pmatrix}$$

II. Seconde partie

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est A.

1. La propriété du cours donne, à partir de la base canonique :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3, e_1, e_1) = \mathrm{Vect}(e_1, e_1 + e_2 + e_3)$$

On a supprimé le vecteur redondant dans la famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. La famille restante est toujours génératrice, et comme elle est constituée de deux vecteurs non-colinéaires, elle est aussi libre. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$, et $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$.

2. a) La matrice A est symétrique réelle : cela suffit d'après le théorème admis du cours, pour conclure que f est diagonalisable.

   b) Il est clair que la matrice A n'est pas inversible, puisque ses colonnes C_2 et C_3 sont identiques : cela suffit pour conclure que f n'est pas bijectif.

3. La relation : $A^3 = A^2 + 2A \iff A^3 - A^2 - 2A = 0_3$ implique que $P(X) = X^3 - X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de la matrice A ; on sait par conséquent que les valeurs propres de A (et donc de f) sont à chercher parmi les racines de $P(X) = X(X^2 - X - 2)$.

   0 est racine évidente de $P(X)$; $x_1 = -1$ est racine évidente du trinôme $X^2 - X - 2$, et l'autre racine est $x_2 = 2$ (par exemple à cause de la relation coefficients-racines : $x_1 \times x_2 = -2$).

   Il reste donc à vérifier au cas par cas, si $0, -1$ et 2 sont bien valeurs propres de A, et on calcule par la même occasion le sous-espace propre associé :

   - Pour $\lambda = 0$: on sait déjà que $A = A - 0.I$ n'est pas inversible, donc que 0 est bien valeur propre de A.

     Il suffit de résoudre le système suivant d'inconne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

     $$AX = 0_{3,1} \iff \begin{cases} x + y + z & = 0 \\ x & = 0 \\ x & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}$$

     Donc : $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ et $E_0(f) = \mathrm{Vect}(e_2 - e_3)$.

     Le sous-espace propre obtenu est engendré par un seul vecteur non nul : on en a bien trouvé une base.

   - Pour $\lambda = -1$: $A - (-1).I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est clairement non-inversible, puisque sa première colonne est la somme des deux autres. Cela prouve que -1 est bien valeur propre de A, mais aussi que $A + I$ est de rang 2 (ses colonnes 2 et 3 étant non-proportionnelles), et donc d'après le théorème du rang, que $E_{-1}(A)$ est de dimension 1.

     Il suffit donc de trouver un vecteur propre $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $(A+I)X = 0_{3,1}$: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ convient, et forme une base de $E_{-1}(A)$. Ainsi : $E_{-1}(f) = \mathrm{Vect}(2e_1 - e_2 - e_3)$.

   - Pour $\lambda = 2$: $A - 2.I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, et on résout le système $(A - 2.I)X = 0_{3,1}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

     $$(A - 2I)X = 0_{3,1} \iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -y + z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ y - z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

     $$\iff \begin{cases} x = y + z = 2z \\ y = z \end{cases}$$

On obtient une infinité de solutions : cela prouve que $\lambda = 2$ est bien valeur propre de A (et donc de f), de sous-espace propre associé :

$E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, donc $E_2(f) = \mathrm{Vect}(2e_1 + e_2 + e_3)$. On a obtenu un sous-espace engendré par un seul vecteur non-nul : $(2e_1 + e_2 + e_3)$ est bien une base de $E_2(f)$.

L'endomorphisme f admet donc trois valeurs propres : $-1, 0$ et 2, et ses sous-espaces propres associés sont tous les trois de dimension 1 (ce qui confirme au passage que f est bien diagonalisable).

4. D'après ce qui précède : la famille $\mathcal{B}' = \big(2e_1 - e_2 - e_3, e_2 - e_3, 2e_1 + e_2 + e_3\big)$ est une base de vecteurs propres pour f, dans laquelle la matrice de f est $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, et la formule de changement de base donne : $A = PDP^{-1} \iff D = P^{-1}AP$.

Pour calculer P^{-1}, on résout le système $PX = Y$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et de second membre $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

$$PX = Y \iff \begin{cases} 2x \phantom{{}+y} + 2z = a \\ -x + y + z = b \\ -x - y + z = c \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 2z = a \\ 2y + 4z = a + 2b \quad L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ -2y + 4z = a + 2c \quad L_3 \leftarrow L_1 + 2L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 2z = a \\ 2y + 4z = a + 2b \\ 8z = 2a + 2b + 2c \quad L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 2z = a \\ 2y + 4z = a + 2b \\ 4z = a + b + c \end{cases} \iff \begin{cases} 4x = a - b - c \quad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\ 2y = b - c \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ 4z = a + b + c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}b - \frac{1}{4}c \\ y = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \\ z = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c \end{cases} \quad \text{donc} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

5. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; d'après ce qui précède, on peut écrire les équivalences :

$$AM + MA = 0_3 \iff PDP^{-1}M + MPDP^{-1} = 0_3 \iff DP^{-1}MP + P^{-1}MPD = P^{-1}0_3P$$
$$\iff DN + ND = 0_3$$

en notant $N = P^{-1}MP$. On cherche donc dans un premier temps les matrices $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telles que :

$$DN + ND = 0_3 \iff \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 0 & 0 & 0 \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & 0 & 2c \\ -d & 0 & 2f \\ -g & 0 & 2i \end{pmatrix} = 0_3 \iff \begin{pmatrix} -2a & -b & c \\ -d & 0 & 2f \\ g & 2h & 4i \end{pmatrix} = 0_3$$

Par identification des coefficients, on obtient directement que $DNND = 0_3$ si et seulement si :

$$a = 0 = b = c = d = f = g = h = i$$

donc si et seulement si $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour un certain réel e.

Une matrice M vérifie donc $AM + MA = 0_3$ si et seulement s'il existe un réel e tel que :

$$M = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e/2 & -e/2 \\ 0 & -e/2 & e/2 \end{pmatrix} \quad \text{après calculs}$$

On peut conclure ici que l'ensemble cherché est le sous-espace vectoriel : $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 2

On note, pour tout nombre réel a non nul, l'application $f_a : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad f_a(x, y) = \frac{xe^{-x}}{y} - \frac{y}{a}.$$

I. Première partie

Dans cette partie, on prend $a = -e$ et on note g à la place de f_{-e}.

Ainsi, l'application $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ est définie par : $\quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad g(x, y) = \dfrac{xe^{-x}}{y} + \dfrac{y}{e}$.

1. Une question à rédiger soigneusement : les *fonctions coordonnées* $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, sur lequel la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
   Par composition, puis par quotient et somme, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\partial_1(g)(x, y) = \frac{1}{y}\left(e^{-x} - xe^{-x}\right) = \frac{e^{-x}}{y}(1 - x)$$

$$\partial_2(g)(x, y) = -\frac{xe^{-x}}{y^2} + \frac{1}{e}$$

3. La recherche des points critiques correspond à celle des couples $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\begin{cases} \partial_1(g)(x, y) & = 0 \\ \partial_2(g)(x, y) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{y}(1 - x) = 0 \\ -\dfrac{xe^{-x}}{y^2} + \dfrac{1}{e} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - x = 0 \quad \text{car } \dfrac{e^{-x}}{y} > 0 \\ -\dfrac{xe^{-x}}{y} + \dfrac{1}{e} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ -\dfrac{e^{-1}}{y^2} = -\dfrac{1}{e} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \quad \text{car } y > 0 \end{cases}$$

Il existe donc un unique point critique de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, c'est le couple $(1, 1)$.

4. Pour déterminer la nature de ce point critique, on calcule d'abord les dérivées partielles d'ordre 2 de g ; pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\partial^2_{1,1}(g)(x,y) = -\frac{e^{-x}}{y}(1-x) - \frac{e^{-x}}{y} = \frac{e^{-x}}{y}(x-2)$$

$$\partial^2_{2,2}(g)(x,y) = \frac{2xe^{-x}}{y^3}$$

$$\partial^2_{1,2}(g)(x,y) = -\frac{e^{-x}}{y^2}(1-x) = \partial^2_{2,1}(g)(x,y)$$

d'après le théorème de Schwarz, qui s'applique bien à g de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. La matrice Hessienne de g au point $(1,1)$ est :

$$H = \begin{pmatrix} -e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}$$

La hessienne est déjà diagonale, donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, en l'occurrence $-e^{-1} < 0$ et $2e^{-1} > 0$: ce sont deux réels de signes opposés, donc g n'admet pas d'extrémum local en $(1,1)$, et pas d'extrémum du tout sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par conséquent.

II. Seconde partie

Dans cette seconde partie, on prend $a = 1$.
On considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'application $h_n :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad h_n(x) = f_1(x, x^n) = \frac{xe^{-x}}{x^n} - x^n = \frac{e^{-x}}{x^{n-1}} - x^n$$

et l'application $\varphi_n :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad \varphi_n(x) = e^{-x} - x^{2n-1}.$$

1. a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, et pour $x \in]0;+\infty[$:

$$h_n(x) = 0 \iff \frac{e^{-x}}{x^{n-1}} = x^n \iff e^{-x} = x^{2n-1} \iff e^{-x} - x^{2n-1} = 0 \iff \varphi_n(x) = 0$$

b) La fonction φ_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, avec :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad \varphi_n'(x) = -e^{-x} - (2n-1)x^{2n-2} < 0$$

comme somme de deux termes strictement négatifs. La fonction φ_n est donc strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. Elle est aussi continue sur $]0;+\infty[$, car de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle.
$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x} = e^0 = 1$, et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{2n-1} = 0$ puisque $2n-1 \geqslant 1$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi_n(x) = 1$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2n-1} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_n(x) = -\infty$.
La fonction φ_n est ainsi à valeurs dans $]-\infty, 1[$ qui contient zéro : combinée à la stricte décroissance et continuité de cette fonction sur cet intervalle, cette propriété permet de citer le thorème de la bijection, qui assure que pour chaque $n\mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $u_n \in]0;+\infty[$ solution de l'équation $\varphi_n(x) = 0$, donc de l'équation équivalente $\varphi_n(x) = 0$.

Par ailleurs : $\varphi_n(1) = e^{-1} - 1^{2n-1} = \dfrac{1}{e} - 1 < 0$ car $e > 1$.

Ainsi : $0 = \varphi_n(u_n) = 0 > \varphi_n(1) \iff u_n < 1$ par stricte décroissance de φ_n sur $]0;+\infty[$, ce qui donne bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_n < 1$$

2. a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est l'unique réel strictement positif tel que :

$$\varphi(u_n) = 0 \iff e^{-u_n} = (u_n)^{2n-1} \iff -u_n = (2n-1)\ln(u_n) \iff \ln(u_n) = -\frac{u_n}{2n-1}$$

b) On a vu plus haut que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n < 1$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 > -\frac{u_n}{2n-1} > -\frac{1}{2n-1};$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{2n-1} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} 0$: le *théorème d'encadrement* s'applique, qui donne :

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{u_n}{2n-1} = 0 = \lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

Exercice 3

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{1}{x\sqrt{2x}} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$.

- La fonction f est clairement positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.
- La fonction f est continue sur $]-\infty; 2[$ comme fonction constante (nulle), et continue sur $]2; +\infty[$ comme inverse d'un produit de fonctions continues, ne s'annulant pas sur cet intervalle. Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en $x = 2$.
- Sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{2} 0\ \mathrm{d}x + \int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{2x}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}.\left[\frac{x^{-3/2+1}}{-3/2+1}\right]_2^A \\ &= \lim_{A\to+\infty} -\frac{2}{\sqrt{2}}.\left[\frac{1}{\sqrt{A}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = -\sqrt{2}.\left(0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1\end{aligned}$$

Finalement, f est bien une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

a) La fonction f étant nulle sur $]-\infty; 2[$, on a $X(\Omega) = [2; +\infty[$, et :

- $\forall x < 2, \quad F_X(x) = P(X \leqslant x) = 0$
- $\forall x \geqslant 2, \quad F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x = \int_2^x \frac{1}{x\sqrt{2x}}\mathrm{d}x = -\frac{2}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 1 - \sqrt{\frac{2}{x}}$

d'après les calculs déjà faits à la question précédente.

b) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.
Sous réserve d'une telle convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{2} 0\mathrm{d}x + \int_{2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}\mathrm{d}x.$$

On reconnaît une intégrale de Riemann sur $[2;+\infty[$, divergente car $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$. On peut donc conclure que la v.a.r. X n'admet pas d'espérance.

3. On considère trois variables aléatoires T_1, T_2, T_3 indépendantes, chacune de même loi que X.
On considère aussi la variable aléatoire $U = \inf(T_1, T_2, T_3)$.

a) On sait que pour déterminer la loi du minimum de variables à densité indépendantes, il faut commencer par calculer $P(U > t)$ pour tout réel t.
En effet : $[U > t]$ est réalisé si et seulement si les trois événements $[T_1 > t]$, $[T_2 > t]$ et $[T_3 > t]$ sont simultanément réalisés :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad [U > t] = [T_1 > t] \cap [T_2 > t] \cap [T_3 > t]$$

Remarque : cette relation était rappelée dans l'énoncé original.
Les v.a.r. T_1, T_2 et T_3 étant indépendantes, on a donc :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(U > t) &= P(T_1 > t) \times P(T_2 > t) \times P(T_3 > t)\\ &= \big[1 - P(T_1 \leqslant t)\big] \times \big[1 - P(T_2 \leqslant t)\big] \times \big[1 - P(T_3 \leqslant t)\big]\\ &= \big[1 - F_X(t)\big]^3 \quad \text{puisque ces trois v.a.r. suivent la même loi que } X.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G(t) = P(U \leqslant t) = 1 - P(U > t) = 1 - \big[1 - F_X(t)\big]^3 = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 - \dfrac{2\sqrt{2}}{x\sqrt{x}} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

b) Comme f est une densité de probabilité, on sait que F_X est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sauf en un nombre fini de points (concrètement, sauf en 2).
La relation : $\forall t \in \mathbb{R},\ G(t) = 1 - \big[1 - F_X(t)\big]^3$ permet de conclure, par opérations usuelles sur les fonctions, que G est elle-même continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en 2.
La variable aléatoire U est donc bien à densité, et une densité g de U est définie par la dérivée de G, sauf en 2 où on choisit une valeur positive arbitraire, par exemple : pour tout $t \leqslant 2$, $g(t) = 0$ et pour tout $t > 2$:

$$g(t) = -3.\big(-f(t)\big).\big[1 - F_X(t)\big]^2 = \frac{3}{x\sqrt{2x}}.\left[\sqrt{\frac{2}{x}}\right]^2 = \frac{3\sqrt{2}}{x^2\sqrt{x}}$$

c) Sous réserve de convergence absolue de l'intégrale impropre :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{2} 0\ \mathrm{d}x + \int_{2}^{+\infty} \frac{3\sqrt{2}}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 3\sqrt{2}.\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\mathrm{d}x$$

On reconnaît une intégrale de Riemann (absolument) convergente car $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$. On en déduit que U admet une espérance qui vaut :

$$E(U) = 3.\sqrt{2}.\lim_{A\to+\infty}\left[\frac{-2}{\sqrt{x}}\right]_2^A = 3\sqrt{2}.\lim_{A\to+\infty}\left[\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{A}}\right] = 6.$$

4. On considère la variable aléatoire $V = \sup(T_1, T_2, T_3)$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad [V \leqslant t] = [T_1 \leqslant t] \cap [T_2 \leqslant t] \cap [T_3 \leqslant t]$$

a) L'indépendance mutuelle des trois variables aléatoires T_1, T_2 et T_3 est invoquée une fois de plus ici, et donne :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad H(t) = P(V \leqslant t) &= P(T_1 \leqslant t) \times P(T_2 \leqslant t) \times P(T_3 \leqslant t) \\ &= \big(F_X(t)\big)^3 = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \left(1 - \sqrt{\dfrac{2}{x}}\right)^3 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases} \end{aligned}$$

b) On sait déjà que X est une variable à densité, dont la fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$.

Puisque : $\forall t \in \mathbb{R},\ H(t) = \big(F_X(t)\big)^3$, la fonction H a les mêmes propriétés que F_X, ce qui fait bien de V une variable à densité.

Une densité h de V est définie par dérivation de H sur $\mathbb{R}$, sauf en 2 où on lui donne la valeur arbitraire 0 :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 3 \times (-\sqrt{2}) \times \dfrac{-1}{2} \times x^{-3/2} \times \left(1 - \sqrt{\dfrac{2}{x}}\right)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 2 \\ \dfrac{3}{x\sqrt{2x}}\left(1 - \sqrt{\dfrac{2}{x}}\right)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

c) La variable aléatoire V admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t.h(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente. Comme h est nulle sur $]-\infty, 2]$ et positive sur $]2, +\infty[$, cela revient à montrer la convergence simple de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{3}{\sqrt{2x}}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{x}}\right)^2 \mathrm{d}x$.

Or : $\displaystyle\frac{3}{\sqrt{2x}}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{x}}\right)^2 \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{3}{\sqrt{2x}}$ puisque $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{x}}\right)^2 = 1$.

L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{3}{\sqrt{2x}}\mathrm{d}x = \frac{3}{\sqrt{2}} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}\mathrm{d}x$ est divergente (intégrale de Riemann avec $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$), donc la variable aléatoire V n'admet pas d'espérance.