MATHÉMATIQUES - EMLyon E 2001

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

1. La matrice A n'est évidemment pas inversible, car ses deux premières lignes sont identiques. Cela revient à dire que $A - 0.I_3$ est non-inversible, donc que $\lambda = 0$ est bien valeur propre de A.

2. a) Les calculs matriciels donnent : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et enfin $A^4 = 0_4$ (matrice nulle). La matrice A est donc nilpotente d'indice 4...

   b) Le résultat précédent montre que $P(X) = X^4$ est un polynôme annulateur de la matrice A. Les valeurs propres possibles de A sont donc les racines de $P(X)$. Et comme 0 est la seule racine de P, c'est la seule valeur propre possible de A. Réciproquement, on vu que 0 est bien valeur propre de A, donc c'est la seule valeur propre de A.

   c) Un vecteur (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ appartient au noyau de f si et seulement si :

$$f(x,y,z,t) = (0,0,0,0) \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & & & - & t & = & 0 \\ x & & & & & - & t & = & 0 \\ & & y & & & - & t & = & 0 \\ & & & & z & - & t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x & = t \\ y & = t \\ z & = t \end{array}\right.$$

   On en déduit que :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(t,t,t,t) |\ t \in \mathbb{R}\} = \{t.(1,1,1,1) |\ t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left((1,1,1,1)\right)$$

   Le noyau de f est engendré par un unique vecteur non nul, qui en constitue donc une base, et par conséquent : $\boxed{\dim \mathrm{Ker}(f) = 1}$.

   d) L'endomorphisme f admet 0 pour seule valeur propre, et le sous-espace propre associé, à savoir $\mathrm{Ker}(f)$, est de dimension $1 < 4$.

   On en conclut que f n'est pas diagonalisable.

3. On note $\varepsilon_1 = e_1,\ \varepsilon_2 = f(\varepsilon_1),\ \varepsilon_3 = f(\varepsilon_2),\ \varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$, et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.

   a) La donnée de la matrice A représentative de f, permet dans un premier temps de calculer les vecteurs :

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = f(\varepsilon_1) = f(e_1) = e_1 + e_2 = (1,1,0,0) \\ \varepsilon_3 = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3 = (1,1,1,0) \\ \varepsilon_4 = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = (1,1,1,1) \end{cases}$$

On peut alors facilement vérifier que $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$; on part d'une combinaison linéaire nulle de cette famille :

$$\lambda_1.\varepsilon_1 + \lambda_2.\varepsilon_2 + \lambda_3.\varepsilon_3 + \lambda_4.\varepsilon_4 = 0$$
$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & & & & & & \lambda_4 & = & 0 \end{array}\right. \iff \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

La famille $\mathcal{C}$ est donc une famille libre de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui est un espace vectoriel de dimension 4, donc $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) La définition de la famille $\mathcal{C}$ donne déjà la valeur de l'image des trois premiers vecteurs de cette famille par l'endomorphisme f.
Il suffit alors de remarquer que $\varepsilon_4 = (1, 1, 1, 1)$ appartient au noyau de f d'après la question 2.c), c'est-à-dire que : $f(\varepsilon_4) = (0, 0, 0, 0)$.
La matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est donc :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Le problème qui consiste à chercher un automorphisme g de $\mathbb{R}^4$ tel que $g \circ f \circ f^{-1} = f^2$, revient à chercher une matrice inversible P telle que $PNP^{-1} = N^2$, lorsqu'on traduit matriciellement l'équation dans la base $\mathcal{C}$.

La question est donc de savoir si N et $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Or deux matrices semblables ont toujours même rang (elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes), et il est évident que :

$$\text{rg}(N) = 3 \text{ et } \text{rg}(N^2) = 2$$

car il s'agit de matrices échelonnées ayant respectivement 3 et 2 pivots non-nuls.

On peut aussi, encore plus simplement, raisonner par l'absurde en disant que si P existait, alors :

$$PNP^{-1} = N^2 \text{ implique } (PNP^{-1})(PNP^{-1}) = (N^2)^2 \iff PN^2P^{-1} = N^4 = 0 \iff N^2 = 0$$

ce qui est clairement faux...

Exercice 2

On considère l'application $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in [0; +\infty[$, ar :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. a) La fonction f est continue sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions de référence, continues sur cet intervalle et où le dénominateur ne s'annule pas.

De plus : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ (limite classique du taux d'accroissement de exp en 0), donc par inverse : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x-1} = 1 = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

La fonction f est donc continue en 0, et en définitive continue sur $[0;+\infty[$.

b) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions de référence, de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle et où le dénominateur ne s'annule pas.

$$\forall x > 0 : \quad f'(x) = \frac{1.(e^x-1) - x.e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2}$$

c) On utilise ici le Développement Limité de exp à l'ordre 2 en 0 : $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, qui permet d'écrire :

$$f'(x) = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x - x^2 - \frac{x^3}{2} - o(x^3)}{(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2))} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)}$$

On a donc en effet : $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$.

d) ⚠ *La rédaction proposée ici est faite dans l'esprit de l'ancien programme de ECE, qui contenait le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, et qui n'est plus en vigueur depuis 2013.*

La fonction f est :

⋆ continue sur $[0;+\infty[$.
⋆ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.
⋆ et $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$.

Ce sont les trois hypothèses nécessaires à l'utilisation du *théorème de prolongement de la dérivée*, qui assure alors que : f est dérivable en 0 avec $f'(0) = -\dfrac{1}{2} = \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

En particulier, f' est ainsi continue en 0, et au final f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$.

ⓘ *En l'absence de ce théorème, l'énoncé aurait dû rajouter l'étude du taux d'accroissement en 0, dont la limite en 0 doit être $-\dfrac{1}{2}$ pour que f soit dérivable en 0 avec $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$. On enchaînerait alors avec la question 1.c) qui prouve en fait, dans ce cas, que f' est continue en 0, et on conclut comme avant.*

e) $\forall x > 0 : \ f'(x) = \dfrac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{xe^x(\frac{1}{x} - \frac{1}{xe^x} - 1)}{e^{2x}(1 - \frac{1}{e^x})^2} = \dfrac{x}{e^x}.\dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{xe^x} - 1}{(1 - \frac{1}{e^x})^2}$, où :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0^+$ par croissances comparées, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{xe^x} - 1 = -1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 - \frac{1}{e^x})^2 = 1$,

ce qui donne par produit et quotient de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0^-$.

2. a) La fonction f' est elle-même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$ (quotient de sommes de fonctions de référence), donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ et :

$$\forall x > 0, \quad f''(x) = \frac{(e^x - e^x - xe^x)(e^x-1)^2 - (e^x - 1 - xe^x).2e^x.(e^x-1)}{(e^x-1)^4}$$

$$= \frac{-xe^x.(e^x-1) - (e^x - 1 - xe^x).2e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{xe^x - 2e^{2x} + 2e^x + xe^{2x}}{(e^x-1)^3}$$

$$= \frac{e^x}{(e^x-1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2)$$

b) Soit $g:\ [0;+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par : $\forall x\geqslant 0,\ g(x)=xe^x-2e^x+x+2$. Elle est dérivable sur $[0;+\infty[$, et :

$$\forall x\geqslant 0,\quad g'(x)=e^x+xe^x-2e^x+1=(x-1)e^x+1$$

Le signe sur $\mathbb{R}^+$ n'étant pas évident, on dérive à nouveau, g étant en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;+\infty[$:

$\forall x\geqslant 0,\quad g''(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x\geqslant 0$, et ne s'annule qu'en 0.
La fonction g' est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$, et : $\forall x\geqslant 0,\ g'(x)\geqslant g'(0)=-e^0+1=0$.

La fonction g est par conséquent, elle-même strictement croissante sur $[0;+\infty[$, avec $g(0)=0-2e^0+0+2=0$.

Ainsi : $\quad\forall x\in]0;+\infty[,\quad g(x)>g(0)=0\Longrightarrow f''(x)=\dfrac{e^x}{(e^x-1)^3}.g(x)>0.$

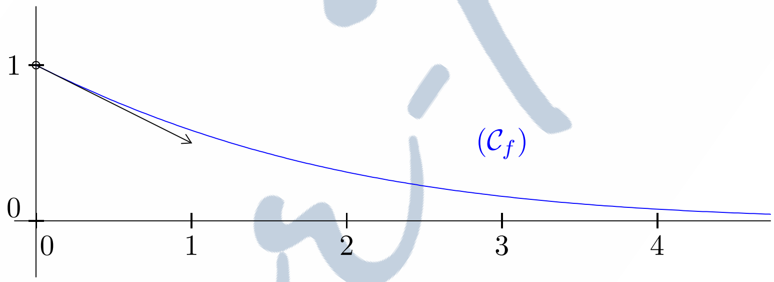
c) De ce qui précède, on déduit que f' est croissante sur $[0;+\infty[$.

Comme on sait que : $\quad f'(0)=-\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, on en déduit que : $\forall x\in[0;+\infty[,\ f'(x)<0$, et la fonction f est finalement strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

$\forall\in]0;+\infty[:\quad f(x)=\dfrac{x}{e^x(1-e^{-x})}=\dfrac{x}{e^x}.\dfrac{1}{1-e^{-x}}$, avec :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ par croissances comparées, et $\lim\limits_{x\to+\infty}1-e^{-x}=1$. D'où : $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

d) On trace la courbe représentative de f en faisant bien apparaître toutes les caractéristiques obtenues précédemment : la (demi)-tangente en 0, d'équation : $y=-\frac{1}{2}x+1$, et une asymptote horizontale en $+\infty$.



3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=0$ et : $\quad\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$.

a) Sur $[0;+\infty[$, la fonction f' étant croissante :

$\forall x\geqslant 0,\ f'(0)\leqslant f'(x)\leqslant\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\iff -\dfrac{1}{2}\leqslant f'(x)\leqslant 0$, ce qui donne bien :

$$\forall x\geqslant 0,\ |f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}.$$

La fonction f est, elle, décroissante sur $[0;+\infty[$, et : $\quad\forall x\geqslant 0,\ f(0)\geqslant f(x)\geqslant\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, soit en effet :

$$\forall x\in[0;+\infty[,\quad 1\geqslant f(x)\geqslant 0$$

b) Sur $]0;+\infty[$ (0 n'est évidemment pas solution de l'équation) :

$$f(x)=x\iff\frac{x}{e^x-1}=x\iff x=x(e^x-1)\iff 2x=xe^x\iff e^x=2\iff\boxed{x=\ln(2)}$$

La fonction f admet donc $\ln(2)$ pour seul *point fixe*.

c) Sur $[0;+\infty[$:

⋆ la fonction f est dérivable

$\star$ $\forall x \in [0;+\infty[,\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$

$\star$ $\ln(2) \in [0;+\infty[$, et par une récurrence immédiate utilisant l'encadrement précédent de f : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0;+\infty[$.

Par conséquent, et d'après l'*Inégalité des Accroissements Finis* :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(u_n) - f(\ln(2))| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)| \iff |u_{n+1} - \ln(2)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|.$$

d) On en déduit par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: "$|u_n - \ln(2)| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 0$: $|u_0 - \ln(2)| = \ln(2) \approx 0.69 \leqslant 1 = (1/2)^0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété vraie à un certain rang n, et montrons qu'alors elle est vraie au rang $n+1$:

On sait que $|u_n - \ln(2)| \leqslant (1/2)^n$, donc $\frac{1}{2}|u_n - \ln(2)| \leqslant (1/2)^{n+1}$ (multiplication des deux membres par $1/2 > 0$).

Comme par ailleurs : $|u_{n+1} - \ln(2)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|$, on a bien par transitivité de l'inégalité : $|u_{n+1} - \ln(2)| \leqslant (1/2)^{n+1}$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

Comme $0 < 1/2 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (1/2)^n = 0$, et comme $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant |u_n - \ln(2)| \leqslant (1/2)^n$, le théorème d'encadrement donne :

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - \ln(2)| = 0, \text{ ce qui exprime que } \underline{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ln(2)}.$$

Exercice 3

1. Pour tout entier naturel n, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t}t^n}{n!} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}$; lorsque t tend vers $+\infty$, $t > 0$ et : $t^2.f_n(t) = \dfrac{1}{n!}.t^{n+2}.e^{-t}$ où : $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{n+2}.e^{-t} = 0$ par croissances comparées, ce qui implique bien que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2.f_n(t) = 0$.

On en déduit donc que $f_n(t) = \underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Or : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente, comme intégrale de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 0$.

Comme f_n est continue, positive sur $[1,+\infty[$, le critère de comparaison d'intégrales de telles fonctions permet d'en déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$ est elle-même convergente.

Comme f_n est continue sur $[0,+\infty[$ (puisque $\lim\limits_{t\to 0^+} f_n(t) = 0 = f_n(0)$), l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$ est bien définie, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$ est donc convergente, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$, on réalise une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\int_0^x t^n.e^{-t}\mathrm{d}t$ en posant :

$$\begin{array}{lcl} u(t) = t^n & \longrightarrow & u'(t) = nt^{n-1} \\ v'(t) = e^{-t} & \longrightarrow & v(t) = -e^{-t} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0, +\infty[, \quad \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{n!}.\Big(\big[-t^n.e^{-t}\big]_0^x + n.\int_0^x t^{n-1}.e^{-t}\mathrm{d}t\Big) \\ &= -\frac{x^n.e^{-x}}{n!} + 0 + \underbrace{\frac{n}{n!}}_{=1/(n-1)!}.\int_0^x t^{n-1}.e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{e^{-x}x^n}{n!} + \int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

c) Puisque les intégrales de la relation précédente sont toutes convergentes d'après a), alors par passage à la limite dans cette égalité, lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = 0 + \int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)\mathrm{d}t$$

Ce qui signifie que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$ garde une valeur constante, quel que soit l'entier n, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_0(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} -e^{-x} + 1 = 1$$

d) Pour tout entier naturel n, la fonction f_n :

- est continue sur $]-\infty, 0[$ comme fonction constante, et sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues sur cet intervalle.
  Comme de plus, $\displaystyle\lim_{t\to0^+} f_n(t) = 0 = f_n(0) = \lim_{t\to0^-} f_n(t)$, f_n est en fait continue sur tout $\mathbb{R}$.
- est positive car nulle sur $]-\infty, 0]$, et positive comme produit de réels positifs sur $]0, +\infty[$.
- vérifie : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\ \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = 0 + 1 = 1$

La fonction f_n est donc bien, pour tout entier naturel n, une densité de probabilité.

2. Pour tout entier naturel n, on définit une variable aléatoire X_n admettant f_n pour densité de probabilité.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$; la variable aléatoire X_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t.f_n(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente. Comme la fonction $t \mapsto t.f_n(t)$ est nulle sur $]-\infty, 0]$ et positive sur $]0, +\infty[$, cela revient à montrer la convergence simple de :

$$\int_0^{+\infty} t.f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} t^{n+1}.e^{-t}\mathrm{d}t = (n+1)\times\frac{1}{(n+1)!}\int_0^{+\infty} t^{n+1}.e^{-t}\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{+\infty} f_{n+1}(t)\mathrm{d}t = n+1$$

d'après 1.c) ; ainsi, X_n admet une espérance qui vaut : $\quad E(X_n) = n + 1$.

De même : X_n admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2 ; il faut donc vérifier, d'après le théorème de transfert, si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2.f_n(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente, ce qui se ramène là encore à vérifier la convergence simple de :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^2.f_n(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} t^{n+2}.e^{-t}\mathrm{d}t = (n+1)(n+2)\times\frac{1}{(n+2)!}\int_0^{+\infty} t^{n+2}.e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= (n+1)(n+2).\int_0^{+\infty} f_{n+2}(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Ainsi : X_n admet un moment d'ordre 2 qui vaut :

$$E(X_n^2) = (n+1)(n+2)$$

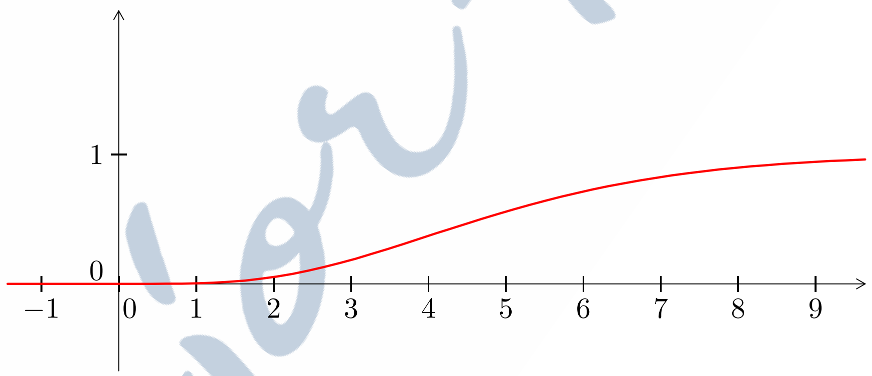
d'après la formule de Koenig-Huygens, X_n admet donc une variance qui vaut :

$$\begin{aligned}V(X_n) &= E(X_n^2) - E(X_n)^2 = (n+1)(n+2) - (n+1)^2 = (n+1)(n+2-n-1) \\ &= n+1\end{aligned}$$

b) Dans cette question, on suppose que $n = 4$. La fonction de répartition de X_4 est définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F_{X_4}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_4(t)\mathrm{d}t = \begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant 0\\ \int_0^x f_4(t)\mathrm{d}t & \text{si } x>0\end{cases}$$

Les trois intégrales données par l'énoncé sont donc les valeurs de $F_{X_4}(4)$, $F_{X_4}(6)$ et $F_{X_4}(8)$. On trace grâce à elles une allure cohérente de la courbe de F_{X_4}, en respectant ses propriétés fondamentales : elle est nulle sur $]-\infty, 0]$, strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et a pour limite 1 en $+\infty$.



3. Pour tout réel $t > 0$, on définit la variable aléatoire Y_t égale au nombre de voitures arrivant à un péage d'autoroute de l'instant 0 à l'instant t.
On suppose que la variable aléatoire Y_t suit une loi de Poisson de paramètre t.

a) D'après le cours sur la loi de Poisson : $\quad\forall t>0,\quad E(Y_t) = V(Y_t) = t.$

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la variable aléatoire réelle Z_n, prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$, égale à l'instant d'arrivée de la n-ième voiture au péage à partir de l'instant 0.

b) Soient $t\in]0, +\infty[$ et $n\in\mathbb{N}^*$: l'événement $[Z_n\leqslant t]$ est réalisé si et seulement si la n-ième voiture arrive au péage au plus tard à l'instant t : cela signifie qu'à l'instant t, la n-ième voiture est arrivée, et donc les $(n-1)$ précédentes aussi, voire même d'autres voitures après la n-ième : $[Z_n\leqslant t]$ est réalisé si et seulement si il y a eu *au moins* n voitures passées par le péage à l'instant t, ce qui donne bien :

$$\forall t\in]0, +\infty[,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad [Z_n\leqslant t] = [Y_t\geqslant n]$$

c) La variable aléatoire Z_n est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, donc : $\forall t \in]-\infty, 0]$, $F_{Z_n}(t) = P(Z_n \leqslant t) = 0$.

Pour tout $t \in]0, +\infty[$: $\quad F_{Z_n}(t) = P(Z_n \leqslant t) = P(Y_t \geqslant n) = 1 - P(Y_t \leqslant n-1) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}.e^{-t}$.

d) La fonction de répartition de Z_n est clairement continue et même de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ comme constante, et de classe C^1 (donc continue) sur $]0, +\infty[$ comme somme de produits de fonctions de classe C^1 sur cet intervalle, elle est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.

La continuité en 0 est bien assurée :

$$\lim_{t\to 0^+} F_{Z_n}(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{0^k}{k!}.e^0 = 1 - 1 = 0 = F_{Z_n}(0) = \lim_{t\to 0^-} F_{Z_n}(t)$$

puisque dans la somme, tous les termes sont nuls sauf celui d'indice $k = 0$ qui vaut $\lim_{t\to 0^+} e^{-t} = e^0 = 1$.

La variable aléatoire Z_n est donc une variable à densité, et une densité f de Z_n est obtenue par dérivation de F_{Z_n} (sauf en zéro où on lui donne la valeur arbitraire 0) :

$\forall t \in]-\infty, 0], \quad f(t) = 0$ et :

$$\begin{aligned}
\forall t \in]0, +\infty[, \quad f(t) &= 0 - \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{kt^{k-1}}{k!}.e^{-t} - \frac{t^k}{k!}.e^{-t}\right] = - \sum_{k=\cancel{0}\ 1}^{n-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}.e^{-t} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}.e^{-t} \\
&= - \sum_{j=0}^{n-2} \frac{t^j}{j!}.e^{-t} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}.e^{-t}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad f(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.e^{-t}$$

Une densité de Z_n coïncide bien sur $\mathbb{R}$ tout entier avec la fonction f_{n-1}.