MATHÉMATIQUES - EMLyon E 2000

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On considère une matrice carrée d'ordre 3 :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice J dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère, pour tout nombre réel a, la matrice carrée réelle d'ordre 3 :

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

1. a) Un réel λ est valeur propre de f si et seulement si la matrice $J - \lambda.I_3$ est non-inversible, on échelonne donc cette matrice :

$$J-\lambda.I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3+(1+\lambda)L_2} \underbrace{\begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda(1+\lambda) \end{pmatrix}}_{J_\lambda}$$

Les valeurs propres de f sont alors les réels qui annulent l'un au moins des coefficients diagonaux de la réduite de Gauss obtenue, soit :

$$\begin{cases} -\lambda = 0 \\ \text{ou} \\ -\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \end{cases} \iff \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -2$$ après résolution de l'équation du second degré (dont les racines sont à peu près évientes...

On en conclut que les valeurs propres de f sont : $\quad -2,\ 0$ et 1.

On calcule ensuite les trois sous-espaces propres correspondants en résolvant successivement les systèmes : $(J-\lambda)X = 0$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour chaque valeur propre λ, système équivalent à $J_\lambda X = 0$ (utilisation de la réduite de Gauss) :

- $\lambda = 0 : (J-\lambda.I_3)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2y + z & = 0 \\ y & = 0 \\ z & = 0 \end{cases}$

  $\iff y = z = 0.$

  On en déduit le sous-espace propre : $E_0(f) = \{(x,0,0) |\ x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left((1,0,0)\right)$.

  Le vecteur $(1,0,0)$ étant non-nul, il forme à lui seul une famille génératrice également libre de $E_0(f)$, donc une base de ce sous-espace.

- $\lambda = 1 : (J - \lambda.I_3)X = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x + 2y + z & = & 0 \\ y - z & = & 0 \end{array} \right.$

  $\iff \begin{cases} x & = 2y + z = 3z \\ y & = z \end{cases}.$

  On en déduit le sous-espace propre : $E_1(f) = \{(3z, z, z) |\ z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left((3, 1, 1)\right)$.
  Le vecteur $(3, 1, 1)$ étant non-nul, il forme à lui seul une famille génératrice également libre de $E_1(f)$, donc une base de ce sous-espace.

- $\lambda = -2 : (J - \lambda.I_3)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2y + z & = & 0 \\ y + 2z & = & 0 \end{array} \right.$

  $\iff \begin{cases} x & = \frac{1}{2}(-z - 2y) = \frac{3}{2}z \\ y & = -2z \end{cases}.$

  On en déduit le sous-espace propre :

  $E_{-2}(f) = \{(\frac{3}{2}z, -2z, z) |\ z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left((\frac{3}{2}, -2, 1)\right) = \text{Vect}\left((3, -4, 2)\right)$. À nouveau, le vecteur $(3, -4, 2)$ étant non-nul, il forme à lui seul une famille génératrice également libre de $E_{-2}(f)$, donc une base de ce sous-espace.

b) L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$, espace de dimension 3, possède donc 3 valeurs propres distinctes : c'est une condition *suffisante* pour pouvoir affirmer que f est diagonalisable (et tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1, comme on l'a vérifié plus haut).
La formule de changement de base donne alors la relation :

$$J = PDP^{-1} \iff P^{-1}JP = D$$

où $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 12 & \end{pmatrix}$ est la matrice de passage et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

c) En remarquant que, pour tout réel a : $M_a = J + a.I_3$, le même changement de base donne :
$P^{-1}M_aP = P^{-1}(J + a.I_3)P = P^{-1}JP + aP^{-1}I_3P = D + a.P^{-1}P = D + a.I_3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 + a & 0 \\ 0 & 0 & a - 2 \end{pmatrix}$,
matrice à nouveau diagonale qu'on note D_a.
On vient donc de prouver que M_a est toujours semblable à une matrice diagonale D_a, donc est diagonalisable.

d) On sait que M_a est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de cette matrice. Or les valeurs propres de M_a sont les mêmes que celles de D_a, c'est-à-dire : $a,\ 1 + a$ et $a - 2$.
On en déduit que M_a est inversible pour tout réel $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 2\}$.

2. On se propose, dans cette question, de déterminer l'ensemble des nombres réels a tels qu'il existe une matrice carrée réelle d'ordre trois vérifiant $X^2 = M_a$.

   a) Soient a un nombre réel et X une matrice carrée réelle d'ordre trois tels que $X^2 = M_a$.

      i. Au vu des relations précédentes : $XM_a = X \times X^2 = X^3 = X^2 \times X = M_aX$, donc M_a et X commutent.
      Et comme $M_a = J + a.I_3 \iff J = M_a - a.I_3$:

      $XJ = XM_a - a.X = M_aX - a.X = (M_a - a.I_3)X = JX$, donc X commute également avec J.

      ii. On note h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice X dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$: puisque X et J commutent, alors f et h commutent ; pour tout vecteur propre v de f, associé à la valeur propre λ :
      $f(v) = \lambda.v$, donc $h \circ f(v) = h(\lambda.v) = \lambda.h(v) \iff f \circ h(v) = \lambda.h(v)$, relation qui prouve que $h(v)$ appartient au sous-espace propre de f pour la même valeur propre λ.

Il reste à rappeler un point très important ici : tous les sous-espaces propres de f sont de dimension 1 !

Par conséquent, deux vecteurs appartenant au même sous-espace propre sont toujours colinéaires; c'est le cas ici des vecteurs v et $h(v)$, il existe donc un réel μ tel que : $h(v) = \mu.v$, c'est-à-dire que v est aussi vecteur propre de h.

iii. Le résultat précédent a une conséquence importante : la base de vecteurs propres de f dans laquelle la matrice de cet endomorphisme est diagonale, est encore une base de vecteurs propres pour h, dans laquelle la matrice de cet endomorphisme est encore diagonale. Il existe donc bien une matrice réelle diagonale Δ d'ordre trois telle que : $X = P\Delta P^{-1}$.

On repart de la relation $X^2 = M_a$, qui peut alors se réécrire :

$$P\Delta P^{-1}P\Delta P^{-1} = PD_aP^{-1} \iff P\Delta^2P^{-1} = PD_aP^{-1} \iff \Delta^2 = D_a.$$

iv. La matrice Δ étant diagonale, elle s'écrit sous la forme : $\Delta = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, et l'équation $\Delta^2 = M_a$ se réécrit :

$$\begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x^2 & = a \\ y^2 & = a+1 \\ z^2 & = a-2 \end{cases}.$$

Ce système d'équation possède (au moins) un triplet (x, y, z) solution si et seulement si a, $a+1$ et $a-2$ sont tous positifs, ce qui demande d'obtenir : $a \geqslant 0$, $a \geqslant -1$ et $a \geqslant 2$.

On en conclut que pour que l'équation $X^2 = M_a$ possède au moins une solution, il faut $a \geqslant 2$ (on garde la condition la plus contraignante).

b) Réciproquement bien sûr, si $a \geqslant 2$, les équations : $\begin{cases} x^2 & = a \\ y^2 & = a+1 \\ z^2 & = a-2 \end{cases}$ possèdent chacune au moins une solution réelle, ce qui garantit qu'il existe au moins une matrice Δ telle que $\Delta^2 = D_a$, dont on déduit au moins une matrice $X = P\Delta P^{-1}$ telle que $X^2 = M_a$.

c) On conclut logiquement que l'équation matricielle : $X^2 = M_a$ possède au moins une solution *si et seulement si* $a \geqslant 2$.

Exercice 2

On considère la fonction $f :]-1;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]-1;+\infty[$, par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[\end{cases}$$

1. a) La fonction f est tout d'abord continue sur chacun des intervalles $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$ où elle est bien définie (il faut $1+x > 0 \iff x > -1$ et $x \neq 0$), comme composée de fonctions de référence continues.

La limite classique : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ signifie aussi que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, donc que f est aussi continue en 0 : f est bien continue sur tout l'intervalle $]-1;+\infty[$.

b) La fonction f est de classe C^1 sur chacun des intervalles $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$ comme composée de fonctions de classe C^1 ; pour tout réel x de l'un de ces deux intervalles :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}.x - \ln(1+x)}{x^2}$$

c) La fonction f est dérivable en 0 si et seulement si le taux d'accroissement de f en 0, soit $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, admet une limite finie lorsque x tend vers 0.

Pour $x \neq 0$ au voisinage de 0 :

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\dfrac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$; on utilise alors le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 2 en 0 :

$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \iff \ln(1+x) - x = -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \iff \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\dfrac{1}{2} + o(1)$, ce qui donne :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

qui prouve que f est bien dérivable en 0, avec $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

d) La fonction f est alors de classe C^1 en 0 si et seulement si f' est continue en 0, soit : $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

On reprend alors l'expression de $f'(x)$ pour $x \neq 0$ obtenue en 1.b), et on fait à nouveau intervenir des développements limités à l'ordre 2 en 0 :

$$f'(x) = \frac{x.\dfrac{1}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{x(1-x+x^2+o(x^2)) - (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x^2}$$

$$= \frac{x - x^2 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1)$$

ce qui prouve bien que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{2} = f'(0)$: la fonction f est bien de classe C^1 sur tout l'intervalle $]-1;+\infty[$.

2. On introduit ici la fonction $g:\ x \mapsto \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)$, bien définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$ où $1+x>0$, avec :

$$\forall x \in]-1;+\infty[,\quad g'(x) = \frac{1.(1+x)-x.1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1-(1+x)}{(1+x)^2} = -\frac{x}{(1+x)^2}$$

Pour tout x de $]-1;+\infty[$, $(1+x)^2 > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $-x$.

On en déduit que g est croissante sur $]-1;0]$, puis décroissante sur $[0;+\infty[$, et donc que g admet un maximum en $x=0$ qui vaut $g(0) = \dfrac{0}{1+0} - \ln(1+0) = 0$.

Cela signifie bien donc que : $\quad \forall x \in]-1;+\infty[,\ g(x) \leqslant 0 \iff \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x) \leqslant 0.$

Par conséquent : $\forall x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[,\quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2} \leqslant 0$, et comme $f'(0) = -\dfrac{1}{2} < 0$, on en déduit que f' est négative sur tout l'intervalle $]-1;+\infty[$: la fonction f est décroissante sur son domaine.

Calcul des limites en -1^+ et $+\infty$:

$\lim\limits_{x \to -1^+} 1+x = 0^+$ et $\lim\limits_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -1^+} \ln(1+x) = -\infty$

et $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = +\infty = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$.

Au voisinage de $+\infty$: $\quad f(x) = \dfrac{\ln\left(x(\frac{1}{x}+1)\right)}{x} = \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}$, où :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln(1) = 0$,

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

x	-1	0	$+\infty$
f	‖ $+\infty$	$\searrow$ 1 $\searrow$	0

3. Pour tout x de l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$: $\quad x > -\dfrac{1}{2} > -1$ et $2x > -1$, donc l'intervalle de bornes x et $2x$ ($[x;2x]$ si $x > 0$ et $[2x;x]$ si $-\frac{1}{2} < x \leqslant 0$) est toujours inclus dans $]-1;+\infty[$, domaine où f est bien définie et continue. Cela suffit pour garantir que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t$ est bien définie pour tout réel x de $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

4. On considère donc la fonction $F : \left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[,\ f(x) = \int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t.$$

   a) Pour voir que F est dérivable sur son domaine, on introduit la fonction Φ définie comme une primitive sur $]-1;+\infty[$ de la fonction f, continue sur cet intervalle, et qui permet d'écrire :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[, \quad F(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$$

   Sous cette forme, F est bien de classe C^1 sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ comme composée et différence de fonctions de classe C^1, et :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[, \quad F'(x) = 2\Phi'(2x) - \Phi'(x) = 2f(2x) - f(x)$$
$$= \begin{cases} 2\dfrac{\ln(1+2x)}{2x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(1+2x)-\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2-1 = 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   Ainsi :
   Pour tout x de $]0;+\infty[$:

$$1+2x > 1+x \iff \ln(1+2x) > \ln(1+x) \iff \frac{\ln(1+2x)-\ln(1+x)}{x} > 0 \iff F'(x) > 0;$$

pour tout x de $\left]-\frac{1}{2};0\right[$:

$$0<1+2x<1+x \Longrightarrow \ln(1+2x)<\ln(1+x) \Longrightarrow \ln(1+2x)-\ln(1+x)<0$$

et comme $x<0$, alors $F'(x)=\dfrac{\ln(1+2x)-\ln(1+x)}{x}>0$.

On en conclut que F' est strictement positive sur tout l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$, et donc que F est strictement croissante sur son domaine.

b) Pour tout x de $]0;+\infty[$: la fonction f étant décroissante sur son domaine $]-1;+\infty[$, elle atteint sur l'intervalle $[x;2x]$, son minimum en $t=2x$, de sorte que :

$\forall x>0,\ \forall t\in[x;2x],\ f(t)\geqslant f(2x)$. La fonction f étant continue sur son domaine, et puisque $2x>x$ pour $x>0$, la propriété de croissance de l'intégrale (ou ici : l'inégalité de la moyenne) donne :

$$\forall x\in]0;+\infty[,\quad \int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t \geqslant (2x-x).f(2x) \iff \forall x\in]0;+\infty[,\quad F(x)\geqslant xf(2x)$$

c) Pour tout $x>0$: $xf(2x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{2}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. L'inégalité obtenue à la question précédente et le théorème de comparaison des limites, assurent donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$.

d) L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t$ est impropre en 1 ; sur $]-1;0[$, f est continue et positive comme on l'a vu plus haut, et $f(t)=\dfrac{\ln(1+t)}{t} \underset{t\to-1^+}{\sim} -\ln(1+t)$, où pour $a\in]0;\frac{1}{2}[$:

$$\int_{-1+a}^{-\frac{1}{2}} -\ln(1+t)\mathrm{d}t \overset{x=1+t}{=} -\int_a^{\frac{1}{2}} \ln(x)\mathrm{d}x = -\Big[x\ln(x)-x\Big]_a^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{1}{2}-a\ln(a)+a$$

où : $\lim\limits_{a\to0^+} a\ln(a)=0$ par croissances comparées, ce qui assure que $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} -\ln(1+t)\mathrm{d}t$, est une intégrale convergente (et vaut $\dfrac{1+\ln(2)}{2}$).

Le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives assure alors que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t$, est elle-même convergente.

Lorsque x tend vers $-\dfrac{1}{2}$, $2x$ tend vers -1 : la convergence qu'on vient de montrer assure bien que $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers $-\dfrac{1}{2}$, qui vaut $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{-1} f(t)\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 3

Soit a un entier strictement positif.
On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges, et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants :

I. Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignées sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $E(X)$ son espérance.

1. Pour tout entier $i \in [\![1; 2n-1]\!]$, on définit l'événement R_i : « la i-ème carte retournée est un roi rouge ».

   La variable aléatoire X a bien pour univers-image : $X(\Omega) = \{1, \ldots, 2n-1\}$ car au mieux, on retourne un roi rouge dès la première carte, et au pire les deux rois rouges sont en dernière position, donc le premier roi rouge est retiré à la $(2n-1)$-ième carte.

   $[X = 1] = R_1$ et $\forall k \in \{2, \ldots, 2n-1\}$: $\quad [X = k] = \overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-1}} \cap R_k$, et d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= P(\overline{R_1}) \times P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) \times \ldots \times P_{\overline{R_1}\cap\ldots\cap\overline{R_{k-2}}}(\overline{R_{k-1}}) \times P_{\overline{R_1}\cap\ldots\cap\overline{R_{k-1}}}(R_k) \\
&= \frac{2n-2}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-1} \times \ldots \times \frac{2n-k}{2n-k+2} \times \frac{2}{2n-k+1} \\
&= \frac{\prod\limits_{i=2n-k}^{2n-2} i}{\prod\limits_{i=2n-k+1}^{2n} i} \times 2 = \frac{(2n-k)}{(2n-1) \times 2n} \times 2 \\
&= \frac{2n-k}{n(2n-1)}
\end{aligned}$$

   Après télescopage entre les deux produits, dont la partie commune des indices est $[\![2n-k+1; 2n-2]\!]$.

   Remarque : dans la première version du corrigé, j'avais proposé cette rédaction où on écrit les produits d'entiers consécutifs comme des *quotients* de factorielles, ce qui est une autre façon de voir les simplifications qui ont lieu : chacun décidera ce qu'il préfère !

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= P(\overline{R_1}) \times P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) \times \ldots \times P_{\overline{R_1}\cap\ldots\cap\overline{R_{k-2}}}(\overline{R_{k-1}}) \times P_{\overline{R_1}\cap\ldots\cap\overline{R_{k-1}}}(R_k) \\
&= \frac{2n-2}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-1} \times \ldots \times \frac{2n-k}{2n-k+2} \times \frac{2}{2n-k+1} \\
&= \frac{\frac{(2n-2)!}{(2n-k-1)!} \times 2}{\frac{(2n)!}{(2n-k)!}} = \frac{(2n-2)! \times 2 \times (2n-k)!}{(2n)! \times (2n-k-1)!} \\
P(X = k) &= \frac{2(2n-k)}{2n(2n-1)} = \frac{2n-k}{n(2n-1)}
\end{aligned}$$

   Remarquons que le détail des calculs précédents a du sens si $2 \leqslant k \leqslant 2n-1$, mais on a aussi : $P(X = 1) = P(R_1) = \dfrac{2}{2n} = \dfrac{1}{n} = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$ avec $k = 1$.

   La formule : $\quad P(X = k) = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$ est vraie pour tout entier $k \in \{1, \ldots, 2n-1\}$.

2. La variable aléatoire X est finie, donc admet une espérance, qui vaut :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{2n-1} kP(X=k) = \frac{1}{n(2n-1)} \sum_{k=1}^{2n-1} k(2n-k) \\
&= \frac{2n}{n(2n-1)} \sum_{k=1}^{2n-1} k - \frac{1}{n(2n-1)} \sum_{k=1}^{2n-1} k^2 \\
&= \frac{2}{2n-1} \times \frac{(2n-1)\times 2n}{2} - \frac{1}{n(2n-1)} \times \frac{(2n-1)\times 2n \times (4n-1)}{6} \\
&= 2n - \frac{4n-1}{3} = \frac{6n-4n+1}{3} \\
E(X) &= \frac{2n+1}{3}
\end{aligned}$$

3. Le joueur paie un euro chaque fois qu'il découvre une carte, et gagne a euros lorsqu'il obtient le premier roi rouge.

   On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
   Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la k-ième carte découverte, G_1 est égale à $a-k$.

   En clair, il y a égalité des variables aléatoires : $G_1 = a - X$. La linéarité de l'espérance donne alors :

$$E(G_1) = a - E(X) = a - \frac{2n+1}{3}$$

II. Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignées sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes.

Le joueur paie un euro chaque fois qu'il découvre une carte, et gagne a euros lorsqu'il obtient le premier roi rouge.

On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la k-ième carte découverte ($k \leqslant n$), G_2 est égale à $a-k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

1. Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, l'événement $[G_2 = a-k]$ a la même description que l'événement $[X = k]$ de la partie I. Le calcul de probabilité est identique également, donc :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad P(G_2 = a-k) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}$$

2. L'événement $[G_2 = -n]$ est ici réalisé si et seulement si les n cartes retournées ne font apparaître aucun roi rouge :
   $[G_2 = -n] = \overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \ldots \cap \overline{R_n}$, et par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
P(G_2 = -n) &= P(\overline{R_1}) \times P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) \times \ldots \times P_{\overline{R_1}\cap\ldots\cap\overline{R_{n-1}}}(\overline{R_n}) \\
&= \frac{2n-2}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-1} \times \frac{2n-4}{2n-2} \times \ldots \times \frac{2n-(n-2)-2}{2n-(n-2)} \times \frac{2n-(n-1)-2}{2n-(n-1)} \\
&= \frac{\prod_{i=n-1}^{2n-2} i}{\prod_{i=n+1}^{2n} i} \times \frac{1}{2n-1} = \frac{(n-1)n}{(2n-1)\times 2n} = \frac{n-1}{2(2n-1)}
\end{aligned}$$

Le télescopage a cette fois pour partie commune des indices $[\![n+1;2n-2]\!]$.

On pouvait là encore écrire la troisième étape sous la forme :

$$P(G_2=-n)=\frac{\dfrac{(2n-2)!}{(n-2)!}}{\dfrac{(2n)!}{n!}}=\frac{(2n-2)!}{(n-2)!}\times\frac{n!}{(2n)!}=\frac{n(n-1)}{2n(2n-1)}=\frac{n-1}{2(2n-1)}$$

3. La variable aléatoire G_2 est finie, donc admet une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned}
E(G_2) &= \sum_{x\in G_2(\Omega)} xP(G_2=x)=\sum_{k=1}^{n}(a-k)P(G_2=a-k)-nP(G_2=-n)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(a-k)(2n-k)}{n(2n-1)}-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{2an-(2n+a)k+k^2}{n(2n-1)}-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\\
&=n\times\frac{2an}{n(2n-1)}-\frac{2n+a}{n(2n-1)}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{n(2n-1)}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\\
&=\frac{2an}{2n-1}-\frac{2n+a}{n(2n-1)}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n(2n-1)}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\\
&=\frac{12an-3(2n+a)(n+1)+(n+1)(2n+1)-3n(n-1)}{6(2n-1)}\\
&=\frac{12an-6n^2-6n-3an-3a+2n^2+3n+1-3n^2+3n}{6(2n-1)}\\
&=\frac{9an-3a-7n^2+1}{6(2n-1)}=\frac{3(3n-1)a-(7n^2-1)}{6(2n-1)}
\end{aligned}$$

III. Comparaison des deux protocoles

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n=16$). Alors :
$E(G_1)=a-\dfrac{33}{3}=a-11$, et $E(G_2)=\dfrac{141a-1791}{186}$ après calculs.
La différence des deux espérances est donc :

$$E(G_1)-E(G_2)=\frac{186a-2046-141a+1791}{186}=\frac{45a-255}{186}$$

et : $\quad E(G_1)\geqslant E(G_2)\iff 45a\geqslant 255\iff a\geqslant\dfrac{255}{45}\iff a\geqslant\dfrac{17}{3}.$

Ainsi, le premier protocole est le plus favorable des deux au joueur si $a\geqslant\dfrac{17}{3}$, et sinon c'est le deuxième protocole qui est le plus favorable.