

EXERCICE 1

Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
 On note I_3 la matrice identité de E et 0_3 la matrice nulle de E .
 Soit \mathcal{A} l'ensemble des matrices M de E vérifiant l'égalité :

$$M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3. \quad (*)$$

Partie A : Exemples de matrices appartenant à \mathcal{A} .

1. Déterminer l'ensemble des réels α tels que $\alpha I_3 \in \mathcal{A}$.
2. L'ensemble \mathcal{A} est-il sous-espace vectoriel de E ?
3. On note $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
 - (a) On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer BX_1 et BX_2 .
 - (b) En déduire deux valeurs propres de B .
Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres associés.
 - (c) Démontrer que B est diagonalisable, et expliciter une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que : $B = PDP^{-1}$.
 - (d) Démontrer que $D \in \mathcal{A}$, puis que $B \in \mathcal{A}$.
4. Plus généralement, on suppose que M est une matrice de E diagonalisable, telle que le spectre de M soit inclus dans $\{0, -1, -2\}$.
Montrer que $M \in \mathcal{A}$.

Partie B : Diagonalisabilité des matrices de \mathcal{A}

Soit M une matrice appartenant à \mathcal{A} . On note $\text{Sp}(M)$ le spectre de M .

5. Déterminer un polynôme annulateur de M , et démontrer que le spectre de M est inclus dans $\{0, -1, -2\}$.
6. On suppose dans cette question que M admet $0, -1$ et -2 comme valeurs propres.
Justifier que M est diagonalisable.
7. (a) On suppose dans cette question que -1 est l'unique valeur propre de M .
Justifier que M et $M + 2I_3$ sont inversibles, puis démontrer que $M = -I_3$.
(b) Que peut-on dire de M si $\text{Sp}(M) = \{-2\}$? Si $\text{Sp}(M) = \{0\}$?
8. On suppose dans cette question que M n'admet aucune valeur propre.
Justifier que les matrices $M, M + I_3$ et $M + 2I_3$ sont inversibles. Aboutir à une contradiction.

9. Dans cette question, on suppose que M admet exactement deux valeurs propres distinctes. On traite ici le cas où $\text{Sp}(M) = \{-1, -2\}$ (et on admet que dans les autres situations, le résultat serait similaire).

On veut démontrer par l'absurde que la matrice M est diagonalisable, et on suppose donc que M ne l'est pas. On note \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base \mathcal{B} est M . On note enfin Id l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^3 .

- (a) Montrer que :

$$(f + Id) \circ (f + 2Id) = 0 \quad \text{et} \quad (f + 2Id) \circ (f + Id) = 0$$

- (b) Démontrer que $\dim(\text{Ker}(f + Id)) \geq 1$ et que $\dim(\text{Ker}(f + 2Id)) \geq 1$.

- (c) En utilisant que M n'est pas diagonalisable, démontrer que :

$$\dim(\text{Ker}(f + Id)) = 1 \quad \text{et} \quad \dim(\text{Ker}(f + 2Id)) = 1.$$

- (d) Soit u un vecteur propre de f associé à la valeur propre -1 .

Soit v un vecteur propre de f associé à la valeur propre -2 .

~~i.~~ Justifier que (u, v) forme une famille libre dans \mathbb{R}^3 .

~~ii.~~ Soit w un vecteur de \mathbb{R}^3 n'appartenant pas à $\text{Vect}(u, v)$.

Montrer que la famille (u, v, w) est une base de \mathbb{R}^3 .

- iii. En utilisant le fait que $((f + Id) \circ (f + 2Id))(w) = 0$ et $((f + 2Id) \circ (f + Id))(w) = 0$, montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$f(w) + 2w = \alpha u \quad \text{et} \quad f(w) + w = \beta v.$$

En déduire que w est une combinaison linéaire de u et v , et aboutir à une contradiction.

10. Montrer alors que pour toute matrice M de E :

$$M \in \mathcal{A} \iff M \text{ est diagonalisable et } \text{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}.$$

EXERCICE 2

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose, si ces intégrales convergent :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt, \quad J_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt \quad \text{et} \quad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt.$$

Partie A

Dans cette partie, on fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

1. ~~a.~~ Démontrer que : $\frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t)$.

- ~~b.~~ Démontrer que : $\forall y \in]0, 1], \int_y^1 \ln(t) dt = -1 + y - y \ln(y)$.

En déduire que l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge et déterminer sa valeur.

- ~~c.~~ Démontrer que l'intégrale définissant J_n converge.

2. ~~a.~~ Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(t^{3/2} \frac{\ln(t)}{1+t^n} \right)$.

- ~~b.~~ En déduire la nature de l'intégrale définissant K_n .

- ~~c.~~ Quelle est la nature de l'intégrale définissant I_n ?

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. (a) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $\forall t \in]0, 1], 0 \leq \frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leq -t^n \ln(t)$.

(b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'intégrale $\int_0^1 -t^n \ln(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{(n+1)^2}$.

(c) Dédire des questions précédentes que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = -1$.

5. (a) Démontrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 : $0 \leq \ln(x) \leq x$.

En déduire que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 et pour tout entier n supérieur ou égal à 3 :

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^{n-1}}$$

(b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $0 \leq K_n \leq \frac{1}{n-2}$.

(c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Partie C

L'objectif de cette partie est d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale J_n à l'aide de Scilab.

6. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et y un réel de $]0, 1]$.

À l'aide du changement de variable : $u = -\ln(t)$, montrer que :

$$\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+e^{-nu}} e^{-u} du.$$

7. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

(a) Donner une densité de X .

(b) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose $Y_n = \frac{-X}{1+e^{-nX}}$.

Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, Y_n admet une espérance, et que $E(Y_n) = J_n$.

On rappelle qu'en langage Scilab, l'instruction `grand(1,1,'exp',1)` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

Recopier et compléter la fonction ci-dessous qui prend en argument deux entiers n et m , et qui renvoie une matrice à une ligne et m colonnes dont chaque coefficient est une simulation de la réalisation de Y_n :

```
function Y=simulY(n,m)
    Y=zeros(1,m)
    for i=1:m
        X=grand(1,1,'exp',1)
        Y(i)=-X/(1+exp(-nX))
    end
endfunction
```

9. (a) Énoncer la loi faible des grands nombres.

(b) On tape dans Scilab le script suivant :

```
n=input('Entrer la valeur de n')
disp(mean(simulY(n,1000)))
```

Expliquer ce que fait ce script dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.

On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux « Pile » consécutifs.

On modélise cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient deux « Pile » consécutifs. Si on n'obtient jamais deux « Pile » consécutifs, on conviendra que X vaut -1 .

Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face, ... alors X prend la valeur 5.

Pour tout entier n supérieur ou égal 1, on pose les événements suivants :

- F_n : « Obtenir Face au n -ième lancer »,
- P_n : « Obtenir Pile au n -ième lancer ».

La suite $(P_n)_{n \geq 1}$ est donc une suite d'événements mutuellement indépendants.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose les événements suivants :

- U_n : « Au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs »,
- $B_n = P_{n-1} \cap P_n$.

Enfin, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note :

$$u_n = \mathbf{P}(U_n) \quad \text{et} \quad a_n = \mathbf{P}(X = n).$$

Partie A

1. Exprimer les événements $[X = 2]$, $[X = 3]$ et $[X = 4]$ à l'aide de certains événements P_k et F_k .
En déduire les valeurs de a_2 , a_3 et a_4 .

2. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $u_n = \sum_{k=2}^n a_k$.

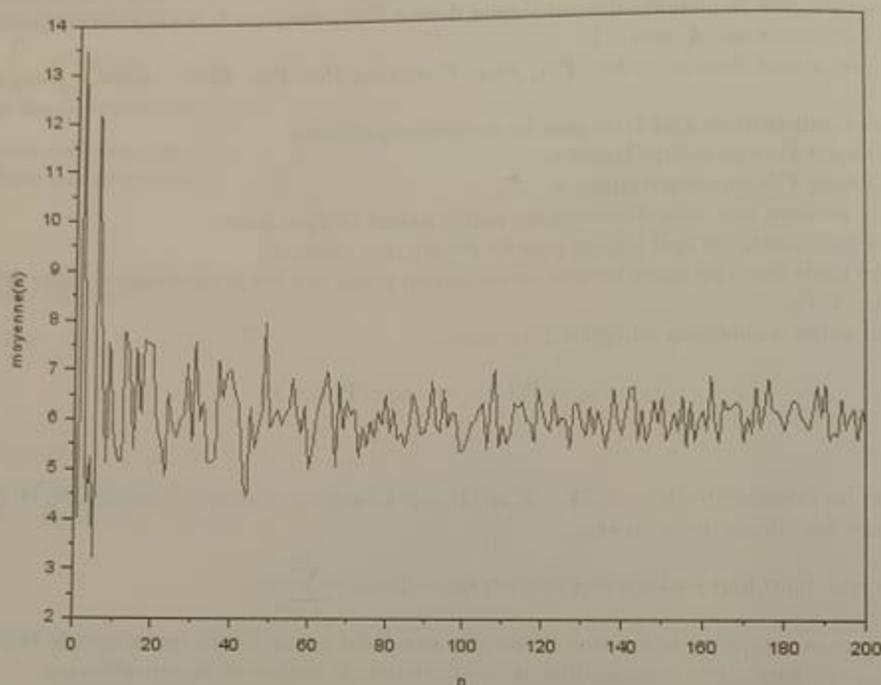
3. (a) Recopier et compléter la fonction Scilab ci-dessous afin qu'elle simule les lancers de la pièce jusqu'à l'obtention de deux « Pile » consécutifs, et qu'elle renvoie le nombre de lancers effectués.

```

function y=simulX()
  tirs=0
  pile=0
  while pile < 2
    if rand() < 1/2 then pile=pile+1
    else
      pile=0
    end
    tirs=tirs+1
  end
  y=tirs
endfunction
  
```

3. (b) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function s=moyenne(n)` qui simule n fois l'expérience ci-dessus et renvoie la moyenne des résultats obtenus.

On calcule moyenne(n) pour chaque entier n de [1, 200], et on trace les résultats obtenus dans le graphe suivant.



Que pouvez-vous conjecturer sur la variable aléatoire X ?

Partie B

4. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$P(U_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}).$$

(b) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}).$$

(c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}).$$

5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 4}$ est croissante, puis qu'elle converge vers 1.

6. En déduire que :

$$P(X = -1) = 1 - P\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = 0.$$

Partie C : Étude de l'espérance de X .

Dans cette partie, on pose pour tout entier $n \geq 2$:

$$v_n = 1 - u_n \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=2}^n k \mathbf{P}(X = k).$$

7. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8} v_{n-2}.$$

8. Justifier que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbf{P}(X = n + 1) = v_n - v_{n+1}.$$

9. Démontrer alors par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n.$$

10. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est croissante et majorée.

11. Montrer que X admet une espérance.

12. (a) Démontrer que la suite $(nv_n)_{n \geq 2}$ converge vers un réel λ .

(b) Montrer que si λ est non nul, alors la série de terme général v_n est divergente.

À l'aide de l'égalité démontrée à la question 7, obtenir une contradiction.

(c) Donner alors la valeur de l'espérance de X .