

# prépa

2

## Mathématiques

Option Économique

● Mercredi 20 avril 2016 de 8h00 à 12h00

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :*  
8h00 – 13h20

L'énoncé comporte 5 pages.

### **CONSIGNES**

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, vous devez le restituer aux examinateurs à la fin de la session ou le laisser sur table selon la consigne donnée dans votre centre d'écrits.

## EXERCICE 1

### Partie A

Pour tout couple de réels  $(x, y)$ , on définit la matrice  $M(x, y)$  par :

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x + 2y & 2x - y \\ -x - y & 4x - 3y & -2x - y \\ -2y & 4x - 4y & -x - y \end{pmatrix}$$

On appelle  $E$  l'ensemble des matrices  $M(x, y)$  où  $x$  et  $y$  décrivent  $\mathbb{R}$  :

$$E = \{M(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On note  $A = M(1, 0)$  et  $B = M(0, 1)$ .

1. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . En déterminer une base et donner sa dimension.
2. Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de  $A$  et déterminer les espaces propres associés.  $A$  est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer une matrice inversible  $P$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  dont la première ligne est  $(1 \ -2 \ 1)$ , et telle que :

$$A = PD_A P^{-1} \quad \text{où} \quad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Déterminer  $P^{-1}$  (faire figurer le détail des calculs sur la copie).
5. En notant  $X_1, X_2$  et  $X_3$  les trois vecteurs colonnes formant la matrice  $P$ , calculer  $BX_1, BX_2$  et  $BX_3$ .  
En déduire l'existence d'une matrice diagonale  $D_B$  que l'on explicitera telle que :

$$B = PD_B P^{-1}.$$

6. En déduire que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , il existe une matrice diagonale  $D(x, y)$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que :

$$M(x, y) = PD(x, y)P^{-1}.$$

7. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur  $(x, y)$  pour que  $M(x, y)$  soit inversible.
8. Montrer que  $B^2$  est un élément de  $E$ . La matrice  $A^2$  est-elle aussi un élément de  $E$  ?

### Partie B

On souhaite dans cette partie étudier les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par les conditions initiales  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = 0$ ,  $c_0 = 0$  et les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4b_n - c_n \\ b_{n+1} = -4a_n - 5b_n + c_n \\ c_{n+1} = -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{cases}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ .

1. Que vaut  $X_0$  ?
2. Déterminer une matrice  $C$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on ait :

$$X_{n+1} = CX_n.$$

Déterminer ensuite deux réels  $x$  et  $y$  tels que  $C = M(x, y)$ .

3. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = C^n X_0$ .
4. À l'aide des résultats de la partie A, exprimer  $a_n, b_n$  et  $c_n$  en fonction de  $n$ .

## EXERCICE 2

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction  $g_n : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}.$$

(a) Étudier les variations de la fonction  $g_0$ , définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $g_0(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ .

Préciser la limite de  $g_0$  en  $+\infty$ , donner l'équation de la tangente en 0, et donner l'allure de la courbe représentative de  $g_0$ .

(b) Pour  $n \geq 1$ , justifier que  $g_n$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  et montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g'_n(x) \geq 0 \iff n \geq 2 \ln(1+x).$$

En déduire les variations de la fonction  $g_n$  lorsque  $n \geq 1$ .

Calculer soigneusement  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$ .

(c) Montrer que, pour  $n \geq 1$ ,  $g_n$  admet un maximum sur  $[0, +\infty[$  qui vaut :

$$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$

et déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$ .

(d) Montrer enfin que pour tout  $n \geq 1$  :

$$g_n(x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^{3/2}} \right)$$

2. On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt.$$

(a) Montrer que l'intégrale  $I_0$  est convergente et la calculer.

(b) Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , l'intégrale  $I_n$  est convergente.

(c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = (n+1)I_n$$

(d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = n!.$$

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction  $f_n$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{n!} g_n(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est une densité de probabilité.

On considère à présent, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n$  une variable aléatoire réelle admettant  $f_n$  pour densité.

On notera  $F_n$  la fonction de répartition de  $X_n$ .

(b) La variable aléatoire  $X_n$  admet-elle une espérance ?

(c) Que vaut  $F_n(x)$  pour  $x < 0$  et  $n \in \mathbb{N}$  ?

(d) Calculer  $F_0(x)$  pour  $x \geq 0$ .

(e) Soit  $x \geq 0$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que :

$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = \frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$$

(f) En déduire une expression de  $F_n(x)$  pour  $x \geq 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  faisant intervenir une somme (on ne cherchera pas à calculer cette somme).

- (g) Pour  $x \in \mathbb{R}$  fixé, déterminer la limite de  $F_n(x)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- (h) La suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle en loi ?
4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $Y_n = \ln(1 + X_n)$ .
- (a) Justifier que  $Y_n$  est bien définie. Quelles sont les valeurs prises par  $Y_n$  ?
- (b) Justifier que  $Y_n$  admet une espérance et la calculer.
- (c) Justifier que  $Y_n$  admet une variance et la calculer.
- (d) On note  $H_n$  la fonction de répartition de  $Y_n$ . Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_n(x) = F_n(e^x - 1).$$

- (e) Montrer que  $Y_n$  est une variable aléatoire à densité et donner une densité de  $Y_n$ .
- (f) Reconnaître la loi de  $Y_0$ . À l'aide de ce qui précède, déterminer le moment d'ordre  $k$  de  $Y_0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

### EXERCICE 3

Dans tout l'exercice,  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On dit que les deux variables  $X$  et  $Y$  sont **échangeables** si :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P([X = i] \cap [Y = j]) = P([X = j] \cap [Y = i])$$

#### Résultats préliminaires

- On suppose que  $X$  et  $Y$  sont deux variables indépendantes et de même loi. Montrer que  $X$  et  $Y$  sont échangeables.
- On suppose que  $X$  et  $Y$  sont échangeables. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, P(X = i) = P(Y = i)$$

#### Étude d'un exemple

Soient  $n$ ,  $b$  et  $c$  trois entiers strictement positifs.

Une urne contient initialement  $n$  boules noires et  $b$  boules blanches. On effectue l'expérience suivante, en distinguant trois variantes.

- On pioche une boule dans l'urne.  
On définit  $X$  la variable aléatoire qui vaut 1 si cette boule est noire et 2 si elle est blanche.
  - On replace la boule dans l'urne et :
    - \* Variante 1 : on ajoute dans l'urne  $c$  boules de la même couleur que la boule qui vient d'être piochée.
    - \* Variante 2 : on ajoute dans l'urne  $c$  boules de la couleur opposée à celle de la boule qui vient d'être piochée.
    - \* Variante 3 : on n'ajoute pas de boule supplémentaire dans l'urne.
  - On pioche à nouveau une boule dans l'urne.  
On définit  $Y$  la variable aléatoire qui vaut 1 si cette seconde boule piochée est noire et 2 si elle est blanche.
3. (a) Compléter la fonction Scilab suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant  $b$  boules blanches et  $n$  boules noires et qui retourne 1 si la boule tirée est noire, et 2 si la boule tirée est blanche.

```

function res = tirage( b , n )
    r = rand()
    if ..... then
        res = 2
    else
        res = 1
    end
endfunction
  
```

- (b) Compléter la fonction suivante, qui effectue l'expérience étudiée avec une urne contenant initialement  $b$  boules blanches,  $n$  boules noires et qui ajoute éventuellement  $c$  boules après le premier tirage, selon le choix de la variante dont le numéro est `variante`.

Les paramètres de sortie sont :

- `x` : une simulation de la variable aléatoire  $X$
- `y` : une simulation de la variable aléatoire  $Y$

```

function [ x , y ] = experience ( b , n , c , variante )
    x = tirage ( b , n )
    if variante == 1 then
        if x == 1 then
            .....
        else
            .....
        end
    else if variante == 2 then
        .....
        .....
        .....
        .....
    end
    y = tirage ( b , n )
endfunction

```

- (c) Compléter la fonction suivante, qui simule l'expérience  $N$  fois (avec  $N \in \mathbb{N}^*$ ), et qui estime la loi de  $X$ , la loi de  $Y$  et la loi du couple  $(X, Y)$ .

Les paramètres de sortie sont :

- `loiX` : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime  $[ P(X=1), P(X=2) ]$
- `loiY` : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime  $[ P(Y=1), P(Y=2) ]$
- `loiXY` : un tableau bidimensionnel à deux lignes et deux colonnes qui estime :

$$\begin{bmatrix} P([X = 1] \cap [Y = 1]) & P([X = 1] \cap [Y = 2]) \\ P([X = 2] \cap [Y = 1]) & P([X = 2] \cap [Y = 2]) \end{bmatrix}$$

```

function [ loiX, loiY , loiXY ] = estimation(b,n,c,variante,N)
    loiX = [ 0 , 0 ]
    loiY = [ 0 , 0 ]
    loiXY = [ 0 , 0 ; 0 , 0 ]
    for k = 1 : N
        [x , y] = experience( b , n , c , variante )
        loiX(x) = loiX(x) + 1
        .....
        .....
    end
    loiX = loiX / N
    loiY = loiY / N
    loiXY = loiXY / N
endfunction

```

(d) On exécute notre fonction précédente avec  $b = 1$ ,  $n = 2$ ,  $c = 1$ ,  $N = 10000$  et dans chacune des variantes. On obtient :

```

-->[loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,1,10000)
LoiXY =
      0.49837 0.16785
      0.16697 0.16681
LoiY =
      0.66534 0.33466
LoiX =
      0.66622 0.33378

-->[loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,2,10000)
LoiXY =
      0.33258 0.33286
      0.25031 0.08425
LoiY =
      0.58289 0.41711
LoiX =
      0.66544 0.33456

-->[loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,3,10000)
LoiXY =
      0.44466 0.22098
      0.22312 0.11124
LoiY =
      0.66778 0.33222
LoiX =
      0.66564 0.33436
  
```

En étudiant ces résultats, émettre des conjectures quant à l'indépendance et l'échangeabilité de  $X$  et  $Y$  dans chacune des variantes.

On donne les valeurs numériques approchées suivantes :

$$\begin{aligned}
 0.33 \times 0.33 &\simeq 0.11 \\
 0.33 \times 0.41 &\simeq 0.14 \\
 0.33 \times 0.58 &\simeq 0.19 \\
 0.33 \times 0.66 &\simeq 0.22 \\
 0.41 \times 0.66 &\simeq 0.27 \\
 0.58 \times 0.66 &\simeq 0.38 \\
 0.66 \times 0.66 &\simeq 0.44
 \end{aligned}$$

4. On se place dans cette question dans le cadre de la variante 1.

- (a) Donner la loi de  $X$ .
- (b) Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ .
- (c) Déterminer la loi de  $Y$ .
- (d) Montrer que  $X$  et  $Y$  sont échangeables mais ne sont pas indépendantes.

