

2

# Mathématiques

Option Economique

■ Mercredi 20 avril 2011 de 8h00 à 12h00

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps" :  
8h00 – 13h20*

Aucun document n'est autorisé.  
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages.

*Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.*

Tournez la page s.v.p.

## EXERCICE 1

On dit qu'une matrice  $A$  carrée d'ordre  $n$  est une matrice nilpotente s'il existe un entier naturel  $k$  non nul tel que

$$A^{k-1} \neq 0_n \text{ et } A^k = 0_n$$

où  $0_n$  représente la matrice carrée nulle d'ordre  $n$ .

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ , on dit que le couple  $(\Delta, N)$  est une décomposition de Dunford de  $A$  lorsque :

$$\begin{cases} \Delta \text{ est une matrice diagonalisable} \\ N \text{ est une matrice nilpotente} \\ \Delta N = N\Delta \text{ et } A = N + \Delta \end{cases}$$

1. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que  $(\Delta, N)$  est une décomposition de Dunford de  $A$ .

Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Déterminer les valeurs propres de  $A$ .
- (b) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
3. On considère les matrices colonnes

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer les produits  $\Delta X_1$ ,  $\Delta X_2$  et  $\Delta X_3$ .
- (b) Justifier que la matrice  $\Delta$  est diagonalisable et déterminer une matrice  $P$  inversible telle que :  $P^{-1}\Delta P = D$ .
- (c) Calculer  $P^{-1}$ .
4. (a) Etablir que  $N$  est une matrice nilpotente.
- (b) Vérifier que  $(\Delta, N)$  est une décomposition de Dunford de la matrice  $A$ .
- (c) En utilisant la formule du binôme de Newton que l'on justifiera, donner l'expression de  $A^n$  en fonction des puissances de  $\Delta$ , de  $N$  et de  $n$ .
- (d) Etablir que : Pour tout entier naturel  $k \geq 1$ ,  $\Delta^k N = N$ .
- (e) Proposer une décomposition de Dunford de  $A^n$ .

## EXERCICE 2

On considère l'application  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 - x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

ainsi que la fonction numérique  $f$  des variables réelles  $x$  et  $y$  définie par :

$$\forall (x, y) \in ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[, \quad f(x, y) = xy + \ln(x) \ln(y).$$

### PARTIE I. Etude des zéros de $\varphi$ .

- Déterminer la limite de  $\varphi(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , ainsi que la limite de  $\frac{\varphi(x)}{x}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . Interpréter graphiquement cette limite.
- Prouver que  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Justifier la dérivabilité de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et calculer sa fonction dérivée.
- Montrer que  $\varphi$  est dérivable en 0. Donner l'allure de la représentation graphique de  $\varphi$  au voisinage du point d'abscisse 0.
- Dresser le tableau de variations de  $\varphi$ .
- On rappelle que  $\ln(2) \simeq 0,7$ . Montrer l'existence d'un unique réel  $\alpha$  tel que :  $\varphi(\alpha) = 0$  et justifier que :  $\sqrt{2} < \alpha < 2$ .
- Etablir la convergence de l'intégrale  $I = \int_0^\alpha \varphi(x) dx$  et vérifier que :

$$I = \frac{\alpha(6 + \alpha^2)}{9}.$$

- On considère les deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :

$$a_0 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad b_0 = 2,$$

$$\forall n \geq 0, \quad \text{si } \varphi(a_n)\varphi\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 \text{ alors } a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$\forall n \geq 0, \quad \text{si } \varphi(a_n)\varphi\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0 \text{ alors } a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n$$

Ecrire un programme en Pascal calculant  $a_7$  et  $b_7$ .

Tournez la page s.v.p.

## PARTIE II. Extrema de $f$ sur $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .

Rappelons que  $\alpha$  est l'unique réel vérifiant  $\varphi(\alpha) = 0$ .

1. Justifier que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .
2. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que le point de coordonnées  $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$  est l'unique point critique de  $f$  sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .
3. Calculer les dérivées partielles secondes sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  et établir que pour tous réels  $x$  et  $y$  strictement positifs :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \left(1 - \varphi\left(\frac{1}{y}\right)\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 1 + \frac{1}{xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \left(1 - \varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right) \end{cases}$$

4. La fonction  $f$  présente-t-elle un extremum local sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ ? Si oui, en donner sa nature (maximum ou minimum).

## EXERCICE 3

### PARTIE I. Un jeu en ligne.

La société Leazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.

Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements  $H, V, D, N$  par :

- $H$  : « les trois jetons sont alignés horizontalement ».
- $V$  : « les trois jetons sont alignés verticalement ».

- $D$  : « les trois jetons sont alignés en diagonale ».
  - $N$  « les trois jetons ne sont pas alignés ».
1. Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases.
  2. Déterminer les probabilités  $p(H), p(V), p(D)$  des événements  $H, V, D$ .
  3. En déduire que la probabilité de l'événement  $N$  est égale à :

$$p(N) = \frac{19}{21} \simeq 0,9048.$$

4. La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.
  - (a) Pour chaque entier naturel  $i$  non nul, on note  $Z_i$  le gain de la société à la  $i^{\text{e}}$  relance.  
Calculer l'espérance mathématique  $E(Z_i)$  de  $Z_i$ .
  - (b) Quel gain journalier  $Z$  la société peut-elle espérer ?

## PARTIE II. Cas de joueurs invétérés.

1. Un joueur décide de jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.
  - (a) Donner la loi de la variable aléatoire  $X$  égale au nombre de parties gagnées.
  - (b) Indiquer l'espérance et la variance de  $X$ .
  - (c) Exprimer la perte  $T$  du joueur en fonction de  $X$ .
2. Quel est le nombre minimum  $n$  de parties devrait-il jouer pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure ou égale à 50 % ? (On admettra que  $\ln\left(\frac{19}{21}\right) \simeq -0,1$  et  $\ln(2) \simeq 0,7$ ).
3. Un autre joueur décide de jouer et de miser tant qu'une partie n'est pas gagnée . On note  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées pour gagner la première fois.
  - (a) Donner la loi de la variable aléatoire  $Y$  .
  - (b) Indiquer l'espérance et la variance de  $Y$ .
  - (c) Pour tout entier naturel  $k$ , montrer que la probabilité  $p_k$  que le joueur joue au plus  $k$  parties avant de gagner pour la première fois, est donnée par la formule :

$$p_k = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k .$$

Tournez la page s.v.p.

### PARTIE III. Contrôle de la qualité du jeu.

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est dérégulée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la base  $(A, 1)$ , les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note  $\Delta$  l'événement " la fonction aléatoire est dérégulée" et on pose  $p(\Delta) = x$  avec  $x \in ]0, 1[$ .

1. Calculer les probabilités conditionnelles  $p_{\Delta}(H)$ ,  $p_{\Delta}(V)$ , et  $p_{\Delta}(D)$  des événements  $H, V, D$  sachant l'événement  $\Delta$ .
2. Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $(\Delta, \overline{\Delta})$  pour en déduire que la probabilité que les jetons ne soient pas alignés est égale à :

$$p(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}.$$

3. Soit  $G$  la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée. Déterminer la valeur maximale de  $x$  pour que l'espérance de gain soit positive.
4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés. Quelle est la probabilité, en fonction de  $x$  que la fonction aléatoire ait été dérégulée ?

