ECRICOME 2004
Voie Eco

1 EXERCICE

Soient f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et (u_n) la suite de nombres réels déterminée par :

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 f(x)\,dx \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f, relativement à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1.1 Etude de f.

1. Montrer que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$
2. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$
3. Déterminer la lmite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$
5. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$
6. Montrer que f rélaise une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
7. Pour tout y de l'intervalle $]0, 1]$, déterminer l'unqiue réel x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$ tel que :
$$f(x) = y$$
8. Déterminer alors la bijection réciproqie f^{-1}

1.2 Calcul d'aire

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie par :

$$F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Pour tout réel λ strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire (exprimée en unité d'aire) du domaine constitué par l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$\lambda \leq x \leq 2\lambda \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x)$$

ainsi

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^{2\lambda} f(x)\,dx$$

1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{x^2+1} > 0$$
En déduire l'ensemble de définition de F.

2. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

3. Montrer que F est impaire sur son ensemble de définition.

4. Déterminer la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire la limite de F quand x tend vers $-\infty$

5. Exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ et calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

1.3 Etude de la suite (u_n).

1. Calculer u_0 et u_1.

2. Effectuer une intégrationpar parties et calculer u_3.
(On pourra remarquer que $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$)

3. Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente. (On ne cherchera pas sa limite dans cette question)

5. Justifier l'encadrement suivant :
$$\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$$
en déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n)

2 EXERCICE

Dans cet exercice, on étudie l'exponentielle d'une matrice pour une matrice carrée d'ordre 3, puis d'ordre 2.

2.1 Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

Soient A et P les matrice définies par :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}

2. On pose $T = P\,A\,P^{-1}$.

   a) Calculer la matrice T

   b) Calculer T^2, T^3, puis T^n pour out entier naturel $n \geq 3$.

3. En déduire que :
$$\forall n \geq 3, \quad A^n = 0$$
où 0 désigne la matrice nulle d'ordre 3.

4. Pour tout réel t, on défint la matrice $E(t)$ par :
$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$$
où I désigne la matrice unité d'ordre 3.

   a) Montrer que :
$$\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, \quad E(t)\, E(t') = E(t + t')$$

   b) Pour tout t réel, calculer $E(t)\, E(-t)$. En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$.

   c) Pour tout t réel et pour tout entier naturel n, déterminer $[E(t)]^n$ en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$ et n.

2.2 Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soient B et D les matrices définies par :
$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel n nonnul, et pour tout réel t, on définit la matrice $E_n(t)$ par :
$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} B^k \text{ que l'on note } E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & c_n(t) \\ b_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que B est diagonalisable.

2. Déterminer une matrice Q d'ordre 2, inversible telle que
$$Q^{-1}BQ = D$$

3. Pour tout entier naturel n, montrer que :
$$B^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$

4. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}$$
exprimer de même $b_n(t)\,,\ c_n(t)\,,\ d_n(t)$ sous le forme d'une somme.

5. Déterminer les limites de $a_n(t)\,,\ b_n(t)\,,\ c_n(t)\,,\ d_n(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Pour tout t réel, onpose alors :
$$E(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} c_n(t) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} d_n(t) \end{pmatrix}$$

a) Montrer que

$$E(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$$

b) Déterminer les matrice E_1 et E_2, telles que pour tout t réel on ait :

$$E(t) = e^t E_1 + e^{2t} E_2$$

c) Calculer $E_1^2,\ E_2^2,\ E_1E_2,\ E_2E_1$.

d) En déduire que pour tout t réel, $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse.

3 Exercice

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B.
On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas. (Ce qui revient à dire que la probabilité pour que le serveur A soit choisi est de 0.7). Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de 0.1, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de 0.05.

   a) Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier.

   b) Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur A ?

2. Un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisé par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite $AABBBA\ldots$ signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3. 4 et 5 il a choisi le le serveur B, et le jour 6 le serveur A. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (Ce qui est également le cas de la série $BBAAAB\ldots$)

   On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la premièer série et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.

   Ainsi, pour $k \geq 1$, dire que $L_1 = k$ signifie que pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jours suivant l'autre serveur.

   a) Jusitifier soigneusement la formule :

   $$\forall k \geq 1 \quad P(L_1 = k) = (0.3)^k (0.7) + (0.7)^k (0.3)$$

   b) Vérifier par le calcul que

   $$\sum_{k=1}^{+\infty} p(L_1 = k) = 1$$

   c) Déterminer l'espérance mathématique de L_1.

   d) Déterminer la loi du couple aléatoire (L_1, L_2).

   e) En déduire la loi de L_2

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A partir d'un jour donné, que l'on appelera le jour 1, on note : N_n la variable aléatoire représentant le nombrede fois où l'ordinateur choisit le serveur A pendant les n premiers jours, T_1 le numéro du jour où pour la première fois le serveur A est choisi et T_2 le numéro du jour où pour la deuxième fois le serveur A est choisi.

   a) Déterminer la loi de N_n, son espérance mathématique et sa variance.

   b) Déterminer la loi de T_1, son espérance mathématique et sa variance.

   c) Montrer que
   $$\forall k \geq 2, \quad P(T_2 = k) = (k-1)(0.7)^2(0.3)^{k-2}$$

4. Le temps de transmission en seconde d'un message par le serveur A est une variable aléatoire Z qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.

   Le prix en euros W de cette trammission, est calculé de la façon suivante : on multiplie la durée de transmission en seconde par 0.1 euro, auquel on ajoute une somme forfaitaire de 1 euro.

   a) Rappeler une densité f_Z de Z ainsi que sa fonction de répartition F_Z.

   b) Quel est le temps moyen (en seconde) de la transmission d'un message par le serveur A

   c) Exprimer W en fonction de Z.

   d) Montrer que mW est une variable al&atoire à densité. En déterminer une densité f_W

   e) Déterminer l'espérance de la variable W.

5. On suppose que le temps de transmission d'un message en seconde par le serveur B est reprèsenté par la variable aléatoire X dont une densité de probabilité f est donnée par :

$$\begin{cases} f(t) = te^{-t^2/2} \text{ si } t \geq 0 \\ f(t) = 0 \quad \text{si } t < 0 \end{cases}$$

(On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$)

   a) Vérifier que f est bien une densité de probabiltié.

   b) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

   c) Calculer l'espérance de la variable X.