

CONCOURS D'ADMISSION 2002

option économique

MATHÉMATIQUES

mercredi 22 mai 2002 de 8 h 00 à 12 h 00

durée : 4 heures

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 6 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

1. EXERCICE

Dans l'ensemble $M_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on considère le sous-ensemble E des matrices $M(a, b)$ définies par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$E = \{M(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

On note $f_{a,b}$ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 représenté par la matrice $M(a, b)$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 .

1.1. Structure de E .

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de E , ainsi que sa dimension.

1.2. Etude d'un cas particulier.

On pose $A = M(1, 0)$.

1. Calculer A^2 . En déduire que A est une matrice inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A .
2. Déterminer les valeurs propres de A .
3. Trouver une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de $f_{1,0}$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.3. Diagonalisation des éléments de E et application.

On considère les vecteurs de \mathbb{R}^3 suivants :

$$\vec{u} = (1, 1, 1), \quad \vec{v} = (1, -1, 0), \quad \vec{w} = (1, 1, -2)$$

1. Justifier que les matrices de l'ensemble E sont diagonalisables.

2. Montrer que $\mathcal{C} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de \mathbb{R}^3 .
3. On note P la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{C} . Ecrire P .
4. Déterminer P^{-1} .
5. Exprimer les vecteurs $f_{a,b}(\vec{u}), f_{a,b}(\vec{v}), f_{a,b}(\vec{w})$ en fonction de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
6. En déduire l'expression de la matrice $D_{a,b}$ de $f_{a,b}$ dans la base \mathcal{C} .
7. Justifier l'égalité :

$$P^{-1}M_{a,b}P = D_{a,b}$$

8. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $D_{a,b}$ soit inversible.
9. Cette condition étant réalisée, déterminer la matrice inverse de $D_{a,b}$.
10. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M_{a,b}$ soit inversible.

2. EXERCICE.

On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies sur $] -1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x)$$

2.1. Etude des fonctions f_n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$h_n(x) = n \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$$

1. Etudier le sens de variation des fonctions h_n .
2. Calculer $h_n(0)$, puis en déduire le signe de h_n .
3. Etude du cas particulier $n = 1$.
 - a. Après avoir justifié la dérivabilité de f_1 sur $] -1, +\infty[$, exprimer $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.
 - b. En déduire les variations de la fonction f_1 sur $] -1, +\infty[$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

- a. Justifier la dérivabilité de f_n sur $] -1, +\infty[$ et exprimer $f'_n(x)$ en fonction de $h_n(x)$.
- b. En déduire les variations de f_n sur $] -1, +\infty[$. (On distinguera les cas n pair et n impair). On précisera les limites aux bornes sans étudier les branches infinies.

2.2. Etude d'une suite.

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$U_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

2.2.1. Calcul de U_1 .

1. Prouver l'existence de trois réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in [0, 1] \quad \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{1+x}$$

2. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx.$$

3. Montrer que $U_1 = \frac{1}{4}$.

2.2.2. Convergence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

1. Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone.
2. Justifier la convergence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. (on ne demande pas sa limite).
3. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$$

4. En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2.2.3. Calcul de U_n pour $n \geq 2$.

Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k$$

1. Montrer que :

$$S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$$

2. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

3. En utilisant une intégration par parties dans le calcul de U_n , montrer que :

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1} \left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^k}{k+1} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} \right) \right]$$

3. EXERCICE.

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.

On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geq 2$).

3.1. Étude du cas $c = 0$.

On effectue donc ici n tirages successifs avec remise de la boule dans l'urne.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{\text{ième}} \text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X . Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.

2. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$ de l'événement $(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.

3. Vérifier que :

$$\sum_{k=0}^n P(Y = k) = 1.$$

4. Pour $x \neq 1$ et n entier non nul, montrer que :

$$\sum_{k=1}^n kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$$

5. En déduire $E(Y)$.

3.2. Etude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 \text{ si on obtient une boule blanche au } i^{\text{ème}} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leq p \leq n$, la variable aléatoire Z_p , par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^p X_i$$

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1 .
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) . En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de Z_2 .
5. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p .
6. Soit $p \leq n-1$.
 - a. Déterminer $P(X_{p+1} = 1 / Z_p = k)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
 - b. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}$$

- c. En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
(On raisonnera par récurrence sur p : les variables X_1, X_2, \dots, X_p étant supposées suivre une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et on calculera $E(Z_p)$).