



ECRICOME

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles

ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

J. 0693

CONCOURS D'ADMISSION 2000

Option économique

MATHÉMATIQUES

Lundi 22 mai 2000 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 4 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé. On note f une densité de X , F sa fonction de répartition. On fait les trois hypothèses suivantes :

- i) Si t appartient à $]-\infty, 0[$, $f(t) = 0$.
- ii) Si t appartient à $[0, +\infty[$, $f(t)$ est positif ou nul.
- iii) f est continue sur $]0, +\infty[$.

1) Montrer que l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique sur $]0, +\infty[$.

Cet unique réel, que l'on notera m , sera appelé **médiane** de X .

2) Dans cette question, on suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre 1.

Montrer que X satisfait aux hypothèses du début de l'exercice et déterminer la médiane de X .

3) On suppose dans cette question que la densité de X est donnée sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = te^{-t}$ et sur $]-\infty, 0[$ par $f(t) = 0$.

a) Vérifier que f satisfait aux hypothèses du début de l'exercice.

b) Déterminer la fonction de répartition F de X .

c) Montrer, sans chercher à la calculer, que la médiane m de X vérifie $1 \leq m \leq 2$. (On donne $6 < e^2 < 9$).

On se propose, dans la suite de cette question, de calculer une valeur approchée de m . On introduit pour cela la fonction g définie sur $[1, 2]$ par $g(x) = \ln(2x + 2)$, fonction qui va permettre de construire une suite convergeant vers m .

d) Montrer que $g(m) = m$.

e) Montrer que si x appartient à $[1, 2]$ alors $g(x)$ appartient à $[1, 2]$ et $|g(x) - m| \leq \frac{1}{2} |x - m|$.

f) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour $n > 0$ par $u_n = g(u_{n-1})$.

Montrer que $|u_n - m| \leq (1/2)^n$.

g) Déterminer un entier n tel que u_n soit une valeur approchée de m à 10^{-2} près.

4) On revient maintenant au cas général et on suppose que la variable X admet une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$. On note toujours m la médiane de X .

a) Montrer qu'on a les inégalités :

$$V(X) \geq \int_0^m (t - E(X))^2 \cdot f(t) dt \quad \text{et} \quad V(X) \geq \int_m^{+\infty} (t - E(X))^2 \cdot f(t) dt.$$

b) En distinguant les cas $m \leq E(X)$ et $m > E(X)$ montrer que : $|m - E(X)| \leq \sqrt{2 \cdot V(X)}$.

Exercice 2

E est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 3. On désigne par f l'application qui à un polynôme P de E associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = P(X+1) + P(X).$$

- 1) Montrer que f est un endomorphisme de E .
- 2) On note B la base usuelle de E constituée, dans cet ordre, des quatre polynômes $1, X, X^2, X^3$.

Montrer que la matrice de f dans la base B est

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- 3) Montrer que f est bijectif.
- 4) Calculer la matrice de f^{-1} dans la base B .
- 5) Soit P un élément de E défini par : $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$.

a) Expliciter en fonction des réels a_0, a_1, a_2, a_3 le polynôme $Q = f^{-1}(P)$.

b) On considère pour tout entier strictement positif n , la somme $S(n) = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \cdot P(k)$.

Exprimer simplement $S(n)$ en fonction de $(-1)^n, Q(n+1)$ et $Q(1)$.

c) Expliciter alors la valeur de $S(n)$ en fonction de n, a_0, a_1, a_2, a_3 .

Exercice 3

T est l'ensemble des couples (x, y) de réels solutions du système d'inéquations $x \geq \frac{1}{4}$ $y \geq \frac{1}{4}$ $x + y \leq \frac{3}{4}$.

On note T' "l'intérieur" de T, à savoir l'ensemble des couples (x, y) solutions du système d'inéquations

$$x > \frac{1}{4} \quad y > \frac{1}{4} \quad x + y < \frac{3}{4}.$$

Soit f la fonction définie sur T par : $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{x+y}$.

- 1) Représenter sur un même graphique T et T'.
- 2) On admet que T' est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
 - a) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 sur T' de la fonction f.
 - b) Montrer que f n'admet pas d'extremum local (et donc a fortiori absolu) sur T'.
- 3) Démontrer par de simples considérations sur des inégalités que l'on a pour tout couple (x, y) de T :

$$2 \leq f(x, y) \leq \frac{16}{3}.$$

On considère une urne contenant des boules blanches (en proportion p), des boules rouges (en proportion r) et des boules vertes (en proportion u). On suppose que $p \geq \frac{1}{4}$ $r \geq \frac{1}{4}$ $u \geq \frac{1}{4}$ et que $p + r + u = 1$.

On effectue indéfiniment des tirages successifs d'une boule dans cette urne avec remise entre deux tirages.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note B_n (respectivement R_n, V_n) l'événement :

" Tirer une boule blanche (respectivement rouge, verte) au n-ième tirage. "

On appelle X (resp Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche (resp rouge).

On définit alors la variable $D = |X - Y|$ égale au nombre de tirages séparant la sortie de la première blanche et de la première rouge.

- 4) Déterminer la loi et l'espérance de X. Faire de même pour Y.
- 5) Soient i et j des entiers naturels non nuls. En distinguant les cas $i = j$, $i < j$ et $i > j$, exprimer l'événement $(X = i) \cap (Y = j)$ à l'aide des événements décrits dans l'énoncé. En déduire la loi du couple (X, Y) .
- 6) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
- 7) Soit k un entier naturel non nul, montrer l'égalité : $P(D=k) = \frac{p \cdot r}{p+r} [(1-p)^{k-1} + (1-r)^{k-1}]$.
- 8) Montrer que D admet une espérance et que $E(D) = f(p, r)$. Encadrer alors $E(D)$.

FIN DE L'ÉPREUVE.