



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CODE SUJET :

289

HEC_M3_E

Concepteur : H.E.C.

OPTION : ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Mercredi 2 Mai 2007, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE

1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) ; soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice associée T relativement à cette base s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de t . Déterminer les sous-espaces propres de t associés, et donner une base de chacun d'entre eux.

L'endomorphisme t est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?

L'objet des questions suivantes est une généralisation des résultats précédents.

2. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$. Soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ défini par :

- pour tout entier i de $[1, 2n+1]$, avec $i \neq n+1$: $t(e_i) = e_i$;
- $t(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \dots + e_{2n+1}$.

a) Déterminer la matrice T associée à l'endomorphisme t relativement à la base $(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$.

b) Déterminer le rang de t , ainsi que la dimension du noyau de t .

c) Justifier que 0 est valeur propre de t . Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0, ainsi qu'une base de ce sous-espace.

3. Montrer que $\text{Im}(t \circ t) \subset \text{Im}(t)$, où $\text{Im}(u)$ désigne l'image d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

4. Soit $\tilde{t}$ l'endomorphisme défini sur $\text{Im}(t)$ par : pour tout x de $\text{Im}(t)$, $\tilde{t}(x) = t(x)$.

Établir que $\mathcal{B} = \left(e_1, \sum_{i=1}^{2n+1} e_i \right)$ constitue une base de $\text{Im}(t)$. Écrire la matrice associée à $\tilde{t}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

5. a) Soit λ une valeur propre non nulle de t , et x un vecteur propre associé à λ . Montrer que x appartient à $\text{Im}(t)$.

b) En déduire toutes les valeurs propres de t . L'endomorphisme t est-il diagonalisable ?

PROBLÈME

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont considérées comme définies sur des espaces probabilisés non nécessairement identiques, mais qui, par souci de simplification, seront tous notés $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Partie I

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{2} \times e^{-|x|}$.

a) Montrer que les intégrales $\int_{-\infty}^0 g(x)dx$ et $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ sont convergentes et de même valeur.

b) Établir que g est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Soit Y une variable aléatoire à valeurs réelles admettant g pour densité. On dit que Y suit la loi $\mathcal{L}(0)$.

2. Étudier les variations de g et tracer l'allure de sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

3. a) Montrer, pour tout r de $\mathbb{N}$, l'existence du moment $m_r(Y)$ d'ordre r de la variable aléatoire Y .

b) Calculer, pour tout r de $\mathbb{N}$, $m_r(Y)$ en fonction de r . Quelles sont les valeurs de l'espérance $E(Y)$ et de la variance $V(Y)$ de la variable aléatoire Y ?

4. a) Déterminer la fonction de répartition G de Y .

b) Établir que G est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

c) Montrer que l'équation $G(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution que l'on déterminera.

d) Établir que la fonction qui, à tout réel x associe $G(x)(1 - G(x))$, est paire.

5. a) Montrer que l'application réciproque G^{-1} de G est définie par :

$$G^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(2x) & \text{si } 0 < x \leq 1/2 \\ -\ln(2(1-x)) & \text{si } 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

b) Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est **Laplace** qui permet de simuler la loi $\mathcal{L}(0)$. On rappelle que la fonction **random** permet de simuler en Pascal une loi uniforme sur $]0, 1[$.

6. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère la fonction g_n définie par :

$$g_n(x) = g(x)(1 + xe^{-n|x|})$$

Montrer que g_n définit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on désigne par Y_n une variable aléatoire de densité g_n , et on note G_n la fonction de répartition de Y_n .

7. a) Établir pour tout réel x , la majoration suivante : $|G_n(x) - G(x)| \leq \frac{1}{ne} \times G(x)$.

b) En déduire que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{L}(0)$.

Partie II

Soit θ un paramètre réel inconnu et X une variable aléatoire à densité. On dit que X suit la loi $\mathcal{L}(\theta)$, si une densité f de X est donnée par : pour tout x réel, $f(x) = \frac{e^{-|x-\theta|}}{2}$.

Soit n un entier naturel. On considère un $(2n+1)$ -échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_{2n+1})$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi $\mathcal{L}(\theta)$.

1. a) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X .
b) En déduire que la variable aléatoire $(X - \theta)$ suit la loi $\mathcal{L}(0)$ définie dans la partie I.
c) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .
d) Résoudre l'équation $F(x) = 1/2$.
2. Soit x un réel fixé. Pour tout i de $\llbracket 1, 2n+1 \rrbracket$, on note Z_i la variable aléatoire de Bernoulli telle que $P(\{Z_i = 1\}) = P(\{X_i \leq x\})$.
a) Établir l'indépendance des variables aléatoires $Z_1, Z_2, \dots, Z_{2n+1}$.
b) Soit S_{2n+1} la variable aléatoire définie par : $S_{2n+1} = \sum_{i=1}^{2n+1} Z_i$. Quelle est la loi de probabilité de S_{2n+1} ?
Préciser l'espérance et la variance de S_{2n+1} .
3. On pose $\bar{X}_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} X_i$.
a) Montrer que $\bar{X}_{2n+1}$ est un estimateur sans biais du paramètre θ .
b) Calculer le risque quadratique de $\bar{X}_{2n+1}$ en θ .

Partie III

Le contexte de cette partie est identique à celui de la partie précédente.

Pour tout ω de Ω , on réordonne par ordre croissant les réels $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_{2n+1}(\omega)$, et on note $\widehat{X}_1(\omega), \widehat{X}_2(\omega), \dots, \widehat{X}_{2n+1}(\omega)$, les nombres ainsi rangés, c'est-à-dire que $\widehat{X}_1(\omega) \leq \widehat{X}_2(\omega) \leq \dots \leq \widehat{X}_{2n+1}(\omega)$. On définit ainsi $(2n+1)$ variables aléatoires $\widehat{X}_1, \widehat{X}_2, \dots, \widehat{X}_{2n+1}$ telles que $\widehat{X}_1 \leq \widehat{X}_2 \leq \dots \leq \widehat{X}_{2n+1}$, qui constituent un réarrangement par ordre croissant des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_{2n+1}$. On admet que $P(\{\widehat{X}_1 < \widehat{X}_2 < \dots < \widehat{X}_{2n+1}\}) = 1$.

On s'intéresse dans cette partie à la variable aléatoire $\widehat{X}_{n+1}$.

1. a) Pour tout réel x , justifier l'égalité entre événements suivante : $\{\widehat{X}_{n+1} \leq x\} = \{S_{2n+1} \geq n+1\}$.
b) En déduire la fonction de répartition $\widehat{F}_{n+1}$ de $\widehat{X}_{n+1}$ en fonction de F (on exprimera cette fonction sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer).
2. On note $\widehat{f}_{n+1}$ une densité de $\widehat{X}_{n+1}$, et $\widehat{g}_{n+1}$ une densité de $(\widehat{X}_{n+1} - \theta)$.
a) Établir pour tout j de $\llbracket 0, 2n \rrbracket$, l'égalité suivante : $(j+1) \binom{2n+1}{j+1} = (2n-j+1) \binom{2n+1}{j}$.
b) En déduire, pour tout x réel, l'égalité :

$$\widehat{f}_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} (F(x))^n (1-F(x))^n f(x)$$

c) Établir, pour tout x réel, l'égalité suivante :

$$\widehat{g}_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} (G(x))^n (1-G(x))^n g(x)$$

où g et G ont été définies dans la partie I.

d) En utilisant la question I.4.d, montrer que $\widehat{X}_{n+1}$ est un estimateur sans biais du paramètre θ .

3. Dans cette question, on étudie le comportement de la suite $(\widehat{X}_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, lorsque n tend vers $+\infty$.

On désigne par $\widehat{h}_{n+1}$ une densité de la variable aléatoire $\sqrt{2n+1}(\widehat{X}_{n+1} - \theta)$.

a) Montrer que pour tout réel x , on a :

$$\widehat{h}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \times \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \left(G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \right)^n \times \left(1 - G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \right)^n \times g\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)$$

b) Écrire, lorsque u tend vers 0, le développement limité à l'ordre 2 de e^{-u} , et le développement limité à l'ordre 1 de $\ln(1-u)$.

c) Soit x un réel fixé. Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \left(1 - G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x^2}{2n+1} + o\left(\frac{1}{(2n+1)}\right) \right)$$

d) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n \left[G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \left(1 - G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \right) \right]^n = e^{-x^2/2}$.

e) On admet que lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$\binom{2n}{n} \times \frac{1}{4^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Montrer alors que pour tout réel x , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \widehat{h}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

4. On admet que le résultat de la question précédente entraîne la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(\sqrt{2n+1}(\widehat{X}_{n+1} - \theta))_n$ vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Montrer qu'un intervalle de confiance $[I_n, J_n]$ pour le paramètre θ au risque $\alpha = 0.05$, est donné par :

$$I_n = \widehat{X}_{n+1} - \frac{1.96}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{et} \quad J_n = \widehat{X}_{n+1} + \frac{1.96}{\sqrt{2n+1}}$$

(on rappelle que si Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on a $\Phi(1.96) \approx 0.975$).