



# BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : H.E.C.

CODE ÉPREUVE :

289

HEC\_M3\_E

OPTION : ECONOMIQUE

## MATHÉMATIQUES III

Mercredi 18 Mai 2005, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

### EXERCICE.

Dans cet exercice,  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2. On note  $E$  l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  et  $\text{Id}$  l'application identité de  $E$ .

L'objet de l'exercice est l'étude des endomorphismes  $f$  de  $E$  vérifiant l'équation (\*) :  $f \circ f = 4\text{Id}$ .

#### A. Étude du cas $n = 2$ .

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  dont la matrice dans la base canonique est :  $A = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Soit  $u$  le vecteur de  $\mathbb{R}^2$  défini par  $u = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $f$  vérifie l'équation (\*), puis préciser le noyau et l'image de  $f$ .

2. On note  $F = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$  et  $G = \text{Im}(f - 2\text{Id})$ .

a) Montrer que  $G$  est engendré par le vecteur  $u$ . En déduire la dimension de  $F$  et donner une base de  $F$ .

b) Vérifier que  $G$  est le sous-espace propre de  $f$  associé à la valeur propre  $-2$ .

3. Montrer que  $f$  est diagonalisable ; préciser les valeurs propres de  $f$  et donner la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

#### B. Étude du cas général.

On se place désormais dans le cas où  $n$  est supérieur ou égal à 2, et on considère un endomorphisme  $f$  de  $E$  vérifiant l'équation (\*).

1.a) Justifier que  $f$  est un automorphisme de  $E$  et exprimer l'automorphisme réciproque  $f^{-1}$  en fonction de  $f$ .

b) Déterminer les valeurs propres possibles de  $f$ .

c) Vérifier que  $2\text{Id}$  et  $-2\text{Id}$  satisfont l'équation (\*).

On suppose dans la suite de l'exercice que  $f \neq 2\text{Id}$  et  $f \neq -2\text{Id}$ , et on note  $F = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$  et  $G = \text{Im}(f - 2\text{Id})$ .

2. Soit  $x$  un élément de  $E$ . Montrer que  $(f(x) - 2x)$  appartient à  $\text{Ker}(f + 2\text{Id})$  et que  $(f(x) + 2x)$  appartient à  $F$ . En déduire que  $G \subset \text{Ker}(f + 2\text{Id})$  et que  $\text{Im}(f + 2\text{Id}) \subset F$ .

Montrer que 2 et  $-2$  sont les valeurs propres de  $f$ .

3. Soit  $x$  un vecteur de  $\text{Ker}(f + 2\text{Id})$ .

a) Exprimer  $(f - 2\text{Id})(x)$  en fonction de  $x$  uniquement. En déduire que  $x$  appartient à  $G$ , puis que  $G = \text{Ker}(f + 2\text{Id})$ .

b) Montrer que  $f$  est diagonalisable.

### PROBLÈME.

Dans tout le problème,  $n$  désigne un entier naturel non nul. On considère une urne blanche contenant  $n$  boules blanches numérotées de 1 à  $n$  et une urne noire contenant  $n$  boules noires numérotées de 1 à  $n$ , dans lesquelles on effectue des suites de tirages. À chaque tirage, on tire simultanément et au hasard une boule de chaque urne. On obtient ainsi à chaque tirage, deux boules, une blanche et une noire.

On dira qu'on a obtenu *une paire* lors d'un tirage, si la boule blanche et la boule noire tirées portent le même numéro.

#### Partie I. Tirages avec remise.

1. Dans cette question, on effectue les tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois une paire.

a) Préciser l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  qui modélise cette expérience.

b) On note  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages (de deux boules) effectués.

Déterminer la loi de  $Y$ ; donner son espérance et sa variance.

2. Écrire en Pascal une fonction dont l'en-tête est `pgrm1(n :integer) :integer` qui modélise l'expérience précédente.

3. Dans cette question, on suppose que  $n = 2$ . On effectue des tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois la boule blanche numérotée 1. On note  $U$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués, et  $Z$  la variable aléatoire égale au nombre de paires obtenues à l'issue de ces tirages.

a) Calculer, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $P(U = k)$ . En déduire la probabilité que l'on n'obtienne jamais la boule blanche numéro 1. Reconnaître la loi de  $U$ .

b) Déterminer la loi conjointe du couple  $(U, Z)$ .

c) Montrer que, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $P(Z = k) = \sum_{\ell=k}^{+\infty} \binom{\ell}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^\ell$ .

d) Calculer  $P(Z = 1)$ . Montrer que  $P(Z = 0) = \frac{1}{3}$ .

e) En utilisant la formule dite du triangle de Pascal et le résultat de la question c) pour  $k = i + 1$ , justifier, pour tout  $i$  de  $\mathbb{N}^*$ , l'égalité :  $P(Z = i + 1) = \frac{1}{4}P(Z = i + 1) + \frac{1}{4}P(Z = i)$ .

f) En déduire la loi de  $Z$ .

#### Partie II. Tirages sans remise.

Dans cette partie, les tirages se font *sans remise* dans les deux urnes, jusqu'à ce que les urnes soient vides. On note  $X_n$  le nombre de paires obtenues à l'issue des  $n$  tirages.

##### A. Étude de cas particuliers.

1. Déterminer la loi de  $X_1$ .

2. On suppose dans cette question que  $n = 2$ .

Combien y a-t-il de résultats possibles ? Quelles sont les valeurs prises par  $X_2$  ? On précisera pour chaque valeur prise par  $X_2$ , l'ensemble des événements élémentaires permettant de l'obtenir.

En déduire la loi de  $X_2$ .

## B. Étude du cas général.

On se place dans le cas où  $n$  est un entier naturel non nul.

1. a) Décrire l'univers  $\Omega$  des événements observables.
- b) Déterminer le nombre total de suites de tirages possibles.
- c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par  $X_n$ .

Pour tout entier naturel  $k$ , on note  $a(n, k)$  le cardinal de  $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = k\}$ . Par convention,  $a(0, 0) = 1$ .

2. a) Préciser la valeur de  $\sum_{j=0}^n a(n, j)$ .

b) Déterminer  $a(n, n)$  et  $a(n, n-1)$ .

3. a) Justifier, pour tout entier  $j$  tel que  $0 \leq j \leq n$ , l'égalité suivante :

$$\frac{a(n, j)}{n!} = \binom{n}{j} \frac{a(n-j, 0)}{(n-j)!}$$

En déduire la relation :

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{a(j, 0)}{j!} = n!$$

Donner l'expression de  $a(n, 0)$  en fonction des nombres  $(a(j, 0))_{0 \leq j \leq n-1}$ .

b) Soit  $k$  un entier compris entre 1 et  $n$  et  $i$  un entier compris entre 0 et  $k-1$ .

Justifier l'égalité :  $\binom{j}{i} \binom{k}{j} = \binom{k}{i} \binom{k-i}{j-i}$ , puis montrer que  $\sum_{j=i}^k (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j} = 0$ .

En déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{j=i}^{k-1} (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j}$$

4. a) Soit  $k$  un entier tel que  $1 \leq k \leq n$ .

On suppose que, pour tout entier  $j$  compris entre 0 et  $k-1$ , on a les  $k$  égalités :

$$a(j, 0) = j! \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^{j-i} i!$$

Montrer l'égalité :

$$a(k, 0) = k! \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} i!$$

(On pourra utiliser l'expression, pour  $n = k$ , de  $a(n, 0)$  trouvée dans la question 3.a)

b) En déduire, pour tout entier naturel non nul  $k$ , la valeur de  $a(k, 0)$ .

c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par  $X_n$  et exprimer la loi de  $X_n$  à l'aide d'une somme.

## Partie III. Tirages mixtes

Dans cette partie, les tirages se font *sans remise dans l'urne blanche* et *avec remise dans l'urne noire*, jusqu'à ce que l'urne blanche soit vide. On note  $X_n$  le nombre de paires obtenues à l'issue des  $n$  tirages.

1.a) Montrer que  $X_n$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Donner, sans démonstration, l'espérance et la variance de  $X_n$ .

On désire modéliser cette expérience. On suppose que  $n$  est une constante fixée.

2. Définir un type tableau de  $n$  entiers noté `tab`, puis deux variables de type `tab`, dont les identificateurs sont `blanc` et `noir`.

3. a) Soit `s` un tableau de type `tab`. Écrire une procédure dont l'en-tête est `ECHANGE(Var s :tab ; i, j :integer)` qui échange les éléments `s[i]` et `s[j]` du tableau `s`.

b) On considère les lignes de programme suivantes utilisant la procédure **ECHANGE**.

```
Begin
For i :=1 to n do blanc[i] :=i ;
For i :=1 to n-1 do
  Begin
    j :=RANDOM(n+1-i)+i ;
    ECHANGE( blanc, i, j ) ;
  end ;
writeln ;
For i :=1 to n do write( blanc[i], ' ')
end
```

Expliquer le fonctionnement de ce programme et son résultat.

On précisera ce qui se passe au premier passage puis au  $i$ -ème passage dans la deuxième boucle **For**, et en particulier, la raison pour laquelle on écrit l'instruction  $j :=RANDOM(n+1-i)+i$ .

c) Construire une procédure qui s'appellera **INITIALISE** permettant de simuler le tirage sans remise et au hasard des  $n$  boules numérotées, en mettant dans la variable  $s[i]$  le numéro de la  $i$ -ème boule tirée (On pourra s'inspirer de la question précédente).

4. Écrire un programme complet permettant de simuler l'expérience de cette partie III lorsque  $n = 20$ , puis de donner la valeur de  $X_n$  (Il n'est pas nécessaire ici de recopier les procédures **ECHANGE** et **INITIALISE**).