



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
Direction de l'Enseignement

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES ÉCRITES
POUR LE HAUT ENSEIGNEMENT COMMERCIAL

Concepteur : ECOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES III

Vendredi 14 Mai 2004, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE

1. Étude d'une suite et programmation

On note $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie pour tout entier n strictement positif par :

$$c_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx$$

a) Montrer que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

b) Montrer que, pour tout entier n strictement positif, l'on a : $c_{n+1} + c_n = \frac{1}{n}$.

c) Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité : $\frac{1}{n} \leq 2c_n \leq \frac{1}{n-1}$.
En déduire un équivalent simple de c_n quand n tend vers l'infini.

d) Calculer c_1 et prouver, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité :

$$c_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right)$$

e) Écrire un programme en Turbo-Pascal qui, pour une valeur d'un entier n strictement positif entrée par l'utilisateur, calcule et affiche la valeur de c_n .

2. Étude d'une suite de variables aléatoires à densité

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{1}{c_n t^n (1+t)} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

a) À l'aide d'un changement de variable, établir pour tout entier n strictement positif et pour tout réel x supérieur ou égal à 1, l'égalité : $\int_1^x \frac{1}{t^n (1+t)} dt = \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u} du$.

b) En déduire que, pour tout entier n strictement positif, f_n est une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, telle que, pour tout entier n strictement positif, X_n prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$ et admet f_n comme densité. On note F_n la fonction de répartition de X_n .

- c) Pour quelles valeurs de n la variable aléatoire X_n admet-elle une espérance? Dans le cas où l'espérance de X_n existe, calculer cette espérance en fonction de c_n et de c_{n-1} .
- d) Dans cette question, exclusivement, on suppose que n est égal à 1. Préciser la fonction F_1 .
En déduire l'ensemble des réels y vérifiant $\mathbf{P}([X_1 \leq y]) \geq \frac{1}{2}$.
Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z = \ln(X_1)$.
- e) Soit x un réel strictement supérieur à 1.
Justifier l'encadrement : $0 \leq \int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2} du \leq \frac{1}{n+1}$.
En déduire la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2} du \right)$.
Transformer, pour tout entier naturel n non nul, $F_n(x)$ à l'aide d'une intégration par parties et en déduire l'égalité suivante : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 1$.
- f) Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)$ si x est un réel inférieur ou égal à 1? Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable que l'on précisera.

PROBLÈME

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n$.

Pour tout entier naturel non nul k , on note X^k le polynôme $x \mapsto x^k$ et on rappelle que la famille $(1, X, \dots, X^{2n})$ est une base de E .

Si $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$ sont $2n+1$ réels et Q est le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par : $Q(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$,

on définit le polynôme $s(Q)$ par : $s(Q)(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} x^k$.

Autrement dit, $s(Q)$ est le polynôme obtenu à partir de Q en « inversant l'ordre des coefficients ».

Par exemple, si n est égal à 2 et si $Q(x) = 4x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 1$, on obtient $s(Q)(x) = x^4 + 2x^2 + 7x + 4$.

Les trois parties de ce problème sont largement indépendantes.

PARTIE A

1. Linéarité de s

Montrer que l'application $s : Q \mapsto s(Q)$ est une application linéaire de E dans lui-même.

2. Diagonalisation dans un cas particulier

- a) On considère la matrice carrée d'ordre 3 : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Justifier sans calcul que la matrice M est diagonalisable. Déterminer les valeurs propres de M et, pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé.

- b) Vérifier que, dans le cas particulier $n = 1$, M est la matrice de l'application linéaire s dans la base $(1, X, X^2)$. Donner alors une base de vecteurs propres pour s .

3. Etude du cas général

On définit la famille de polynômes $(A_0, \dots, A_{2n})$ par :

$$\text{pour tout réel } x, \quad \begin{cases} A_k(x) = x^{2n-k} + x^k & \text{si } 0 \leq k \leq n-1 \\ A_n(x) = x^n \\ A_k(x) = x^k - x^{2n-k} & \text{si } n+1 \leq k \leq 2n \end{cases}$$

- Déterminer l'endomorphisme $s \circ s$.
- Soit P un polynôme non nul et λ un réel vérifiant $s(P) = \lambda P$.
Calculer $s \circ s(P)$ et en déduire que les valeurs propres de s appartiennent à $\{1, -1\}$.
- Déterminer $s(A_k)$ pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq 2n$.
- Montrer que la famille $(A_0, \dots, A_{2n})$ est libre.
- En déduire que l'endomorphisme s est diagonalisable, préciser ses valeurs propres et la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

PARTIE B

1. Préliminaires

On définit une suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de polynômes par :

pour tout réel x , $R_1(x) = x$, $R_2(x) = x^2 - 2$

et pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $R_{k+1}(x) = xR_k(x) - R_{k-1}(x)$

- Déterminer les polynômes R_3 et R_4 .
- Montrer que, pour tout entier k strictement positif, R_k est un polynôme de degré k vérifiant pour tout réel x non nul, l'égalité : $R_k\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^k + \frac{1}{x^k}$.
- Pour tout réel a , déterminer, s'ils existent, les réels x non nuls qui vérifient la relation suivante : $x + \frac{1}{x} = a$.

2. Étude des racines des polynômes vecteurs propres de s associés à la valeur propre 1

Dans cette question, Q désigne un polynôme de degré $2n$ défini par : $Q(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$, tel que a_{2n} soit non nul et tel que, pour tout entier k de l'intervalle $\llbracket 0, n \rrbracket$, l'on ait : $a_k = a_{2n-k}$.

On définit alors le polynôme $\tilde{Q}$ par : $\tilde{Q}(x) = a_n + \sum_{k=1}^n a_{n-k} R_k(x)$.

- Vérifier que 0 n'est pas racine de Q .
- Soit x un réel non nul, on pose : $y = x + \frac{1}{x}$.

Montrer que $\frac{Q(x)}{x^n}$ est nul si et seulement si $\tilde{Q}(y)$ est nul.

Quel est l'intérêt de ce résultat dans la recherche des racines de Q ?

- On suppose que n est égal à 3 et que Q est défini par : $Q(x) = x^6 + x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 9x^2 + x + 1$.
Déterminer les racines de Q .

PARTIE C

Dans cette partie, p désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On désigne par Ω l'ensemble des éléments de E dont les coefficients sont des entiers de l'intervalle $\llbracket 1, p \rrbracket$, par $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de Ω et par $\mathbf{P}$ la probabilité uniforme sur $\mathcal{A}$, c'est à dire que, pour tout polynôme Q de Ω , l'on a : $\mathbf{P}(\{Q\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$.

Si Q est un élément de Ω et i un entier naturel non nul, on dit que Q et $s(Q)$ présentent i coïncidences lorsqu'il existe exactement i entiers k qui vérifient $a_k = a_{2n-k}$.

On définit alors la variable aléatoire Z qui, à tout polynôme Q de Ω , associe le nombre de coïncidences entre Q et $s(Q)$.

Par exemple pour $n = 2$, si $Q(x) = x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 5x + 1$, on a $Z(Q) = 3$.

1. Description d'un cas simple

Dans cette question, on suppose que n est égal à 1 et que p est égal à 2.

Ecrire tous les éléments de Ω puis déterminer la loi, l'espérance et la variance de Z .

2. Étude générale de la variable aléatoire Z

On revient au cas général : n est strictement positif et p est supérieur ou égal à 2.

a) Calculer le cardinal de Ω .

b) Montrer que la plus petite valeur que peut prendre Z est 1 et justifier l'égalité suivante :

$$\mathbf{P}([Z = 1]) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^n$$

c) Montrer que la plus grande valeur que peut prendre Z est $2n+1$ et justifier l'égalité suivante :

$$\mathbf{P}([Z = 2n+1]) = \frac{1}{p^n}$$

d) Montrer que Z ne peut prendre que des valeurs impaires et, pour un entier j vérifiant $0 \leq j \leq n$, calculer $\mathbf{P}([Z = 2j+1])$.

e) On pose $Y = \frac{Z-1}{2}$. Montrer que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. En déduire l'espérance et la variance de Z en fonction de n et de p .