Corrigé HEC eco III 2002 par Pierre veuillez

EXERCICE I

Le but de cet exercice est la résolution de l'équation matricielle $AM = MB$, d'inconnue M, dans l'espace vectoriel E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On rappelle que si U_1, U_2, U_3, U_4 sont les matrices définies par :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la famille (U_1, U_2, U_3, U_4) est une base de E, qui est donc de dimension 4. Si A et B sont deux matrices de E, l'ensemble des matrices M de E vérifiant $AM = MB$ est noté $V_{A,B}$.

1. Soit A et B deux matrices de E et $\varphi_{A,B}$ l'application qui, à toute matrice M de E, associe la matrice $AM - MB$.

   a) $\varphi_{A,B}$ est définie sur E à valeurs dans E car $AM - MB$ sera une matrice d'ordre 2.
   Soient M et N de E et α et β réels alors

$$\begin{aligned} \varphi_{A,B}(\alpha M + \beta N) &= A(\alpha M + \beta N) - (\alpha M + \beta N) B = \alpha (AM - MB) + \beta (AN - NB) \\ &= \varphi_{A,B}(N) + \beta \varphi_{A,B}(N) \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\varphi_{A,B} \in \mathcal{L}(E)}$
   Et on a alors
   Conclusion : $\boxed{V_{A,B} = \ker(\varphi_{A,B}) \text{est un sous-espace vectoriel de } E}$

   b) On calcule les images des vecteurs de la base :

$$\begin{aligned} \varphi_{A,B}(U_1) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2U_1 - U_3 \\ \varphi_{A,B}(U_2) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -2U_1 - U_4 \\ \varphi_{A,B}(U_3) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = U_1 + 2U_3 \\ \varphi_{A,B}(U_4) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -2U_2 - 2U_3 \end{aligned}$$

   Donc $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_{A,B}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Pour montrer que cette matrice est inversible, on montre que ses colonnes sont libres :
Si $\alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3 + \delta C_4 = 0$ alors
$L_2 : -2\delta = 0$ donc $\delta = 0$
$L_4 : -\beta = 0$, donc $\beta = 0$
$L_1 + 2L_3 : 5\gamma = 0$ donc $\gamma = 0$ et $\alpha = 0$ en substituant dans L_1.
Donc la famille est libre et la matrice est inversible.
Donc $\varphi_{A,B}$ est bijective et $\ker\left(\varphi_{A,B}\right) = \{0\}$.
Conclusion : $\boxed{V_{A,B} = \{0\}}$

2. Dans cette question, r et s désignent deux réels distincts et différents de 1, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

   a) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} M \in V_{D,\Delta} &\iff DM - M\Delta = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & y - sy \\ rz - z & rt - st \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

   Et comme $s - 1 \neq 0$ et $r - 1 \neq 0$ et $r - s \neq 0$
   Conclusion : $\boxed{M \in V_{D,\Delta} \iff y = z = t = 0}$

   b) Donc $V_{D,\Delta} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ et (U_1) est génératrice et libre (un vecteur non nul)
   Conclusion : $\boxed{(U_1) \text{ est une base de } V_{D,\Delta}}$

3. Soit a, b, c, d des réels non nuls vérifiant $a - b \neq c - d,\ a - b \neq 1,\ c - d \neq 1$, A et B les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ d & 1-d \end{pmatrix}$$

   a) **N.B.** on demande l'existence de P et de Q et pas leur valeur. On n'a donc pas besoin de rechercher les sous-espaces propres.
   $A - I = \begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ b & -b \end{pmatrix}$ dont les colonnes sont proportionnelles donc liées.
   $A - I$ est donc non inversible et 1 est valeur propre de A.
   de même pour $A - (a-b)I = \begin{pmatrix} b & 1-a \\ b & 1-a \end{pmatrix}$ et $a - b$ est valeur propre de A
   Comme $1 \neq a - b$ alors A possède deux valeurs propres distinctes et comme A est d'ordre 2 elle ne peux pas en avoir d'autres.
   Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} a - b \text{ et } 1 \text{ sont les deux valeurs propres distinctes de } A. \\ \text{qui est donc diagonalisable} \\ \text{Donc il existe } P \text{ telle que } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = P^{-1}AP \text{ avec } r = a - b \end{array}}$

b) On réutilise le résultat précédent avec $a = c$ et $b = d$ et $c - d \neq 1$

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} c-d \text{ et } 1 \text{ sont les deux valeurs propres distinctes de } B \\ \text{qui est donc diagonalisable} \\ \text{Donc il existe } Q \text{ telle que } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = P^{-1}AP \text{ avec } s = c-d \end{array}}$.

c) On recopie l'écriture précédente avec $A = PDP^{-1}$ et $B =$:

$$\begin{aligned} M \in V_{A,B} &\iff PDP^{-1}M - MQ\Delta Q^{-1} = 0 \\ &\iff P^{-1}PDP^{-1}MQ - P^{-1}MQ\Delta Q^{-1}Q = 0 \\ &\iff DP^{-1}MQ - P^{-1}MQ\Delta = 0 \\ &\iff P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta} \end{aligned}$$

On a alors $M \in V_{A,B} \iff$ il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P^{-1}MQ = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Conclusion : $\boxed{V_{A,B} = \text{Vect}\left\{P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}\right\} \text{ dont une base est } \left(P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}\right)}$

4. Dans cette question r, s et u, v désignent quatre réels vérifiant $r \neq s$, $r \neq v$, $u \neq s$, $u \neq v$, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

a) Avec $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} M \in V_{D,\Delta} &\iff DM - M\Delta = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} (u-v)\,x & (u-s)\,y \\ (r-v)\,z & (r-s)\,t \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

et comme $u - v$, $u - s$, $r - v$ et $r - s$ sont non nuls, on a $M = 0$.

Conclusion : $\boxed{V_{D,\Delta} = \{0\}}$

b) Donc si A et B sont diagonalisable sans valeurs propres commune, il existe des matrices P et Q inversibles et D et Δ diagonales telles que $A = PDP^{-1}$ et $B = Q\Delta Q^{-1}$. Avec u et r les valeurs diagonales de D et v et s celles de Δ.

Comme elles n'ont pas de valeurs propres communes, $r \neq s$, $r \neq v$, $u \neq s$, $u \neq v$.

Et comme précédemment

$$M \in V_{A,B} \iff P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta}$$

qui a pour unique solution $P^{-1}MQ = 0$ donc $M = 0$.

Conclusion : $\boxed{V_{A,B} = \{0\} \text{ si } A \text{ et } B \text{ sont diagonalisables sans valeurs propres communes}}$

EXERCICE II

Cet exercice met en évidence le fait que l'existence d'une espérance finie, pour une variable aléatoire, n'est pas toujours intuitive. Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle réel $[1, +\infty[$ et on suppose que toutes les variables aléatoires envisagées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Première approche

Montrer que l'application g définie par : $\begin{cases} g(t) = \dfrac{1}{t^2} & \text{si } t \in I \\ g(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

1. g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et positive sur $\mathbb{R}$
   $\int_{-\infty}^{+\infty} g$ est impropre en $\pm\infty$.
   $\int_{-\infty}^{1} g = \int_{-\infty}^{1} 0 = 0$
   $\int_{1}^{+\infty} g = \int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ (Riemann donc converge, mais il faut sa valeur)
   $\int_1^M \frac{dt}{t^2} = \left[\frac{-1}{t}\right]_1^M = 1 - \frac{1}{M} \to 1$ donc $\int_1^{+\infty} g = 1$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} g = 1$
   Conclusion : $\boxed{g \text{ est une densité de probabilité}}$
2. La fonction de répartition est : $F(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\, dt$ donc
   – si $x \leqslant 1$: $\mathrm{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} 0 dt = 0$
   – si $x > 1$: $\mathrm{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{1} 0 dt + \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = 1 - \frac{1}{x}$
   Pour l'espérance, on étudie la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\, dt$ impropre en $\pm\infty$
   Or pour tout $t \geqslant 1$: $tg(t) = \frac{1}{t}$ dont l'intégrale diverge en $+\infty$ (Riemann) et $\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\, dt$ diverge
   Conclusion : $\boxed{X \text{ n'a pas d'espérance}}$
3. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans I admettant g pour densité et telles que, pour tout réel t, les événements $[X \leqslant t]$ et $[Y \leqslant t]$ sont indépendants. On définit alors deux variables aléatoires U et V par : $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, $U(\omega)$ est le plus petit des nombres $X(\omega)$ et $Y(\omega)$, tandis que $V(\omega)$ est le plus grand de ces nombres.

   a) Pour tout réel t, $[V \leqslant t] = [X \leqslant t] \cap [Y \leqslant t]$ donc (indépendance) $\mathrm{P}[V \leqslant t] = \mathrm{P}[X \leqslant t]\, \mathrm{P}[Y \leqslant t]$ et
   La fonction de répartition de V est donc H : $H(t) = F(t)^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \left(1 - \frac{1}{t}\right)^2 & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$

   b) Comme F est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, il en est de même pour H.
   Donc V est à densité est une densité de V est $h = H'$ (valeur en 1 arbitraire)
   Conclusion : $\boxed{V \text{ a pour densité l'application } \begin{cases} h(t) = & \dfrac{2(t-1)}{t^3} & \text{si } t \in I \\ h(t) = & 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

   c) On a $[U > t] = [X > t] \cap [Y > t]$ indépendantes et $M(t) = \mathrm{P}[U \leq t] = 1 - (1 - F(t))^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 - \frac{1}{t^4} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$
   M est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et U est à densité et une densité est $m = M'$
   Conclusion : $\boxed{\text{une densité de } U \text{ est } m : \begin{cases} m(t) = & \dfrac{2}{t^3} & \text{si } t \in I \\ m(t) = & 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

   d) En $+\infty$: $t\, h(t) = \frac{2(t-1)}{t^2} \sim \frac{2}{t}$ dont l'intégrale diverge.
   Donc par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} t\, h(t)\, dt$ diverge également.
   Conclusion : $\boxed{V \text{ n'a pas d'espérance.}}$
   $\int_1^N t\, m(t)\, dt = \int_1^N \frac{2}{t^2} dt = \left[-\frac{2}{t}\right]_1^N = 2 - \frac{1}{N} \to 2$ quand $N \to +\infty$

Donc $\int_1^{+\infty}$ converge, $\int_{-\infty}^{+\infty} t\ m(t)\,dt$ converge et vaut 2

Conclusion : $\boxed{U \text{ a une espérance qui vaut } 2}$

Situation plus générale

Dans cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on suppose que n visiteurs, numérotés de 1 à n, se rendent aléatoirement dans un musée et que, pour tout entier de l'intervalle $[1,n]$, l'heure d'arrivée du visiteur numéro k est une variable aléatoire X_k admettant pour densité l'application g définie dans la partie .
On suppose de plus que, pour tout réel t, les événements $[X_1 \leqslant t]$, $[X_2 \leqslant t]$, $\ldots$, $[X_n \leqslant t]$ sont mutuellement indépendants.
Si r est un entier de l'intervalle $[1,n]$, on note T_r la variable aléatoire désignant l'heure d'arrivée du r-ième arrivant.
La partie traite donc du cas $n=2$, les variables aléatoires U et V étant respectivement égales à T_1 et T_2.

1. Soit t un élément de I fixé. Pour tout entier k de $[1,n]$, on note B_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 lorsque l'événement $[X_k \leqslant t]$ est réalisé et la valeur 0 sinon.

   a) $Z = B_1 + \ldots + B_n$ et B_i compte le nombre de visiteur parmi un (le i) qui arrive au plus tard à t.
   Donc Z est le **nombre** total de visiteur arrivant au plus tard à t parmi n visiteurs **indépendants** qui ont tous la probabilité $F(t)$ d'arriver.
   Et donc $Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, 1-\frac{1}{t}\right)$

   b) $[T_r \leqslant t]$ signifie que le $r^{iéme}$ visiteur est arrivé au plus tard à t
   c'est à dire qu'à t, il y avait au moins r visiteurs arrivés.
   Donc $[T_r \leqslant t] = [Z \geqslant r]$ et donc

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(T_r \leqslant t) &= \mathrm{P}(Z \geqslant r) \\ &= \sum_{k=r}^{n} \mathrm{P}(Z=k) \\ &= \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} \left(1-\frac{1}{t}\right)^k \left(\frac{1}{t}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

   c) Pour tout $k \in [[1,n]]$ on a

$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} &= k\frac{n!}{k!\,(n-k)} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)} \text{ car } k-1 \geq 0 \\ (n+1-k)\binom{n}{k-1} &= (n+1-k)\,\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \text{car } n-k \geq 0 \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{k\binom{n}{k} - (n+1-k)\binom{n}{k-1} = 0 \text{ si } k \in [[1,n]]}$

   d) La fonction de répartition de T_r est donnée par $G(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<1 \\ \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k}\left(1-\frac{1}{t}\right)^k \left(\frac{1}{t}\right)^{n-k} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$
   G est continue sur $]-\infty,1[$ et sur $[1,+\infty[$ et en 1^- :
   $G(t) = 0 \to 0$ et $G(1) = \sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}0^k = 0$ car $r \geq 1$ ($r^{ième}$ visiteur)

et G est C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ donc T_r est à densité et une densité de Z est G' :
$G'(t) = 0$ si $t \notin I$ et

$$G'(t) = \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} k \left(1-\frac{1}{t}\right)^{k-1} \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t}\right)^{n-k} - \binom{n}{k}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{k} (n-k)\left(\frac{1}{t}\right)^{n-k-1}\frac{1}{t^2}$$

Méthode : on réindexe la seconde somme par $k = h-1$ soit $h = k+1$ pour faire apparaître les coef du binôme du a)
(et pas factoriser et simplifier directement)

$$\begin{aligned}
G'(t) &= \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} k \left(1-\frac{1}{t}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{t}\right)^{n-k+2} - \sum_{h=r+1}^{n+1} \binom{n}{h-1}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{h-1} (n-h+1)\left(\frac{1}{t}\right)^{n-h+2} \\
&= \binom{n}{r} r \left(1-\frac{1}{t}\right)^{r-1}\left(\frac{1}{t}\right)^{n-r+2} - 0 \\
&\quad + \sum_{k=r}^{n} \left(1-\frac{1}{t}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{t}\right)^{n-k+2}\left[\binom{n}{k}k - (n-k+1)\binom{n}{k-1}\right] \\
&= \binom{n}{r} r \left(1-\frac{1}{t}\right)^{r-1}\left(\frac{1}{t}\right)^{n-r+2} + \sum_{k=r+1}^{n} 0 \text{ car } k \in [[1,n]]
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{T_r \text{ admet pour densité } \begin{cases} f_r(t) = r\binom{n}{r}\left(\frac{1}{t}\right)^{n+2-r}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{r-1} & \text{si } t \in I \\ f_r(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

e) Comme $\left(1-\frac{1}{t}\right)^{r-1} \to 1$ alors $t f_r(t) \sim r\binom{n}{r}\left(\frac{1}{t}\right)^{n+1-r}$
Or l'intégrale $\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}\right)^{n+1-r} dt$ (Riemann) converge si et seulement si $n+1-r > 1 \iff r < n$
Et par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} f\, f(t)\,dt$ converge si et seulement si $r < n$.
T_r a donc une espérance pour $r < n$ et pas pour $r = n$.
Conclusion : $\boxed{T_1, T_2, \dots, T_{n-1} \text{ admettent une espérance alors que } T_n \text{ n'en admet pas.}}$

2. Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose : $J(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x$.

a) On a $J(p,q+1) = \int_0^1 x^p(1-x)^{q+1}dx$ et $J(p+1,q) = \int_0^1 x^{p+1}(1-x)^q dx$
Soit $u'(t) = x^p$: $u(t) = \frac{1}{p+1}x^{p+1}$: $v(t) = (1-x)^{q+1}$: $v'(t) = -(q+1)(1-x)^q$ avec u et v de classe C^1 sur $[0,1]$ (puissances positives)
Donc

$$\begin{aligned}
J(p,q+1) &= \left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}(1-x)^{q+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-1}{p+1}x^{p+1}(q+1)(1-x)^q\,dx \\
&= \frac{q+1}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^q\,dx
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } (p,q) \in \mathbb{N}^2 : (p+1)\ J(p,q+1) = (q+1)\ J(p+1,q)}$

b) On a

$$\begin{aligned} J(0,q) &= \int_0^1 (1-x)^q\,dx \\ &= \left[\frac{-1}{q+1}(1-x)^{q+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{q+1} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{J(0,q) = \frac{1}{q+1} \text{ pour tout entier } q}$

c) Par récurrence :

– Pour $p = 0$, on a pour tout q entier $J(0,q) = \dfrac{1}{q+1} = \dfrac{0!\,q!}{(1+q)!}$

– Soit $p \geqslant 0$ tel que pour tout $q \in \mathbb{N}$: $J(p,q) = \frac{p!\,q!}{(1+p+q)!}$ alors

$$\begin{aligned} J(p+1,q) &= \frac{p+1}{q+1} J(p,q+1) \\ &= \frac{p!\ (q+1)!}{(1+p+q+1)!}\frac{p+1}{q+1} \\ &= \frac{(p+1)!\,q!}{(1+p+1+q)!} \end{aligned}$$

– Donc pour tout entier p et pour tout entier q la propriété est vraie.

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } (p,q) \in \mathbb{N}^2 : J(p,q) = \dfrac{p!\,q!}{(1+p+q)!}}$

3. Soit r un entier de l'intervalle $[1, n-1]$.

a) Si a est un réel strictement supérieur à 1,
avec $t = \frac{1}{x}$: $dt = \frac{-1}{x^2}dx$: $t = 1 \Longleftrightarrow x = 1$: $t = a \Longleftrightarrow x = \frac{1}{a}$
et $x \to \frac{1}{x}$ de classe C^1 sur $\left[1, \frac{1}{a}\right]$ et $t \to tf_r(t)$ continue sur l'intervalle image de $\left[1, \frac{1}{a}\right]$ par $x \to \frac{1}{x}$: $[1, a]$.

$$\begin{aligned} \int_1^a t\,f_r(t)\,\mathrm{d}t &= \int_1^{1/a} \frac{1}{x} f_r\left(\frac{1}{x}\right)\frac{-1}{x^2}dx \\ &= \int_{1/a}^1 \frac{1}{x^3}\left[r\binom{n}{r}x^{n+2-r}(1-x)^{r-1}\right]dx \text{ car } \frac{1}{x} \geqslant 1 \\ &= \int_{1/a}^1 r\binom{n}{r}x^{n-1-r}(1-x)^{r-1}dx \\ &= r\binom{n}{r}\int_{1/a}^1 x^{n-1-r}(1-x)^{r-1}dx \end{aligned}$$

b) et quand $a \to +\infty$: $\int_1^a t\,f_r(t)\,\mathrm{d}t \to E(T_r)$ et comme $\frac{1}{a} \to 0$ alors
$\int_{1/a}^1 x^{n-1-r}(1-x)^{r-1}dx \to J(n-1-r, r-1)$ car $n-1-r \geq 0$ et $r-1 \geq 0$ ($r \in [[1, n-1]]$)

Finalement

$$\begin{aligned} E(T_r) &= r\binom{n}{r}\frac{(n-r-1)!\,(r-1)!}{(1+n-r-1+r-1)!} \\ &= r\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\frac{(n-r-1)!\,(r-1)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{n}{n-r} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E(T_r) = \dfrac{n}{n-r} \text{ pour } r \in [[1, n-1]]}$

et on retrouve le problème pour $n = r$ dans cette formule.

Mise en perspective :

On a $\sum_{r=1}^{n} T_r = \sum_{k=1}^{n} X_k$ avec les X_k qui ont chacun une espérance infinie.

Le temps d'attente infini se "concentre" sur le dernier arrivé !