MATHÉMATIQUES - Edhec E 2019

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et Id l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I.

1. a) $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, donc $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1-2+1 & -1+2-1 & -1+2-1 \\ 2-4+2 & -2+4-2 & -2+4-2 \\ -1+2-1 & 1-2+1 & 1-2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   b) La relation précédente se réécrit :

$$(A-I)^2 = 0_3 \iff A^2 - 2A + I = 0_3 \iff I = 2A - A^2 \iff I = A(2I - A)$$

   ce qui suffit pour conclure que A est inversible, d'inverse :

$$A^{-1} = 2I - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. On pose $A = N + I$.

   a) Il est évident que les matrices N et I commutent ($NI = IN = N$), donc on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (N+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k$$

   Or : $N = A - I$ donc $N^2 = (A-I)^2 = 0_3$ (matrice nulle) d'après ce qui a été vu en 1.a). On en déduit que dans la somme précédente, les termes d'indices $k \geqslant 2$ sont tous nuls, et il reste seulement les termes pour $k = 0$ et $k = 1$:

$$A^n = \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 = I + n.N$$

   Remarquons que pour utiliser le principe précédemment décrit, il faut a priori avoir pris $n \geqslant 1$, mais la formule finale $A^n = I + n.N$ est aussi vraie pour $n = 0$.
   On en déduit la formule générale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = I + n.(A - I) = n.A - (n-1).I$$

   b) Lorsque $n = -1$, le membre de droite de la relation précédente devient : $-A + 2I$, qui est bien la valeur de A^{-1}.

3. a) Le résultat de la première question prouve que $P(X) = (X-1)^2$ est un polynôme annulateur de la matrice A.

   On sait donc d'après la propriété associée du cours, que les racines de P sont les seules valeurs propres possibles de A. Ici, P a pour unique racine évidente le réel $\lambda_0 = 1$, et la matrice $A - I$, calculée en 1.a), est évidemment non inversible puisque ses trois lignes sont proportionnelles.

   On peut donc conclure que la matrice A a pour unique valeur propre $\lambda_0 = 1$.

   b) Si A était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale D via une matrice de passage inversible Q via une relation du type $A = QDQ^{-1}$, où les éléments diagonaux de D seraient les valeurs propres de A ; ici donc, ces éléments diagonaux seraient donc tous égaux à 1, et D serait donc la matrice identité, ce qui donnerait : $A = QIQ^{-1} = QQ^{-1} = I$, égalité évidemment fausse !

   On en conclut donc que A n'est pas diagonalisable.

4. On pose $u_1 = \big(f - Id\big)(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.

   a) Le rang de l'endomorphisme $f - Id$ est égal à celui de sa matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$, qui est $A - I$. Comme on l'a dit, ses trois lignes (et ses trois colonnes aussi, en fait) sont proportionnelles et non nulles, ce qui garantit que :

$$\mathrm{rg}(A - I) = 1 = \mathrm{rg}(f - Id).$$

   b) Le théorème du rang s'applique à l'endomorphisme $f - Id$ pour donner :

$$\dim \mathrm{Ker}(f - Id) + \mathrm{rg}(f - Id) = \dim \mathbb{R}^3 \iff \dim \mathrm{Ker}(f - Id) = 3 - 1 = 2$$

   De plus : $\big(f - Id\big)(u_1) = \big(f - Id\big)^2(e_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$ puisque $(A - I)^2 = 0_3$, donc $u_1 \in \mathrm{Ker}(f - Id)$.
   Par ailleurs, d'après la matrice représentative de f dans la base canonique :

$$(f - Id)(u_2) = f(e_1 + e_3) - (e_1 + e_3) = -2e_2 + e_3 + e_1 + 2e_2 - e_1 - e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

   donc $u_2 = e_1 + e_3$ appartient également à $\mathrm{Ker}(f - Id)$. La famille (u_1, u_2) est ainsi constituée de deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Ker}(f - Id)$: il s'agit donc d'une famille libre de deux vecteurs d'un espace dont on sait qu'il est de dimension 2, ce qui suffit pour pouvoir affirmer que (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f - Id)$.

5. a) La famille (u_1, u_2, e_3) est une famille de trois vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 : il suffit de prouver qu'elle est libre pour que ce soit une base de cet espace vectoriel.

   Pour cela, considérons trois réels a, b, c tels que :

$$a.u_1 + b.u_2 + c.e_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & b & + & c & = & 0 \\ -2a & & & & & = & 0 \\ a & + & b & & & = & 0 \end{array}\right.$$

   Il est évident que ce système possède une unique solution, on obtient successivement :
   $a = 0 \quad (L_2)$, qui implique $b = 0 \quad (L_2)$, et enfin $c = 0 \quad (L_3)$.
   La famille (u_1, u_2, e_1) est donc bien libre, et c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

   b) Puisque le vecteur u_1 appartient à $\mathrm{Ker}(f - Id)$, il vérifie : $f(u_1) - u_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff f(u_1) = u_1$ (vecteur propre pour la valeur propre 1), et de même, $f(u_2) = u_2$.
   Il reste à se rappeler que, par définition : $u_1 = (f - Id)(e_1) \iff f(e_1) = u_1 + e_1$, et ainsi :

$$T = \mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(e_1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ e_1 \end{array}$$

6. La matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est en fait celle de la famille (u_1, u_2, e_1) écrite dans la base (e_1, e_2, e_3) :
   P est donc la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la nouvelle base (u_1, u_2, e_1).
   À ce titre, P est inversible, et la formule de changement de base donne la relation fondamentale :
   $$A = PTP^{-1} \iff T = P^{-1}AP$$

7. On appelle $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ les neuf matrices élémentaires qui forment la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   a) On cherche ici toutes les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ qui commutent avec T, c'est-à-dire qui vérifient :
   $$MT = TM \iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$
   $$\iff \begin{pmatrix} a & b & a+c \\ d & e & d+f \\ g & h & g+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a & = a+g \\ b & = b+h \\ a+c & = c+i \\ d & = d \\ e & = e \\ d+f & = f \\ g & = g \\ h & = h \\ g+i & = i \end{cases}$$
   par identification des coefficients
   $$\iff \begin{cases} g & = 0 \\ h & = 0 \\ a & = i \\ d & = 0 \\ g & = 0 \end{cases} \quad \text{en éliminant les équations toujours vraies}$$
   L'ensemble des matrices M qui commutent avec T est donc :
   $$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b,c,e,f) \in \mathbb{R}^5 \right\} = \left\{ a.(E_{1,1}+E_{3,3})+b.E_{1,2}+c.E_{1,3}+e.E_{2,2}+f.E_{2,3} \,\middle|\, (a,b,c,e,f) \in \mathbb{R}^5 \right\}$$
   La famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{2,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$ apparaît donc bien comme une famille *génératrice* de E ; elle est assez clairement libre aussi, en effet :
   $$a.(E_{1,1}+E_{3,3})+b.E_{1,2}+c.E_{1,3}+e.E_{2,2}+f.E_{2,3} = 0_3 \iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = 0_3 \iff a = b = c = e = f = 0.$$
   La famille $(E_{1,1}+E_{3,3}, E_{1,2}, E_{2,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$ est donc bien une base de E, qui est donc de dimension 5.
   b) Soit N une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; d'après les relations qui existent entre A, P et T :
   $$NA = AN \iff NPTP^{-1} = PTP^{-1}N \iff P^{-1}NPTP^{-1}P = P^{-1}PTP^{-1}NP$$
   $$\iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)$$

c) Le résultat précédent signifie qu'une matrice N commute avec A si et seulement si la matrice $M = P^{-1}NP$ commute avec T : c'est donc le cas, d'après 7.a), si et seulement s'il existe 5 réels (a, b, c, e, f) tels que :

$$\begin{aligned}
& P^{-1}NP = a.(E_{1,1} + E_{3,3}) + b.E_{1,2} + c.E_{1,3} + e.E_{2,2} + f.E_{2,3} \\
\iff & N = P\big(a.(E_{1,1} + E_{3,3}) + b.E_{1,2} + c.E_{1,3} + e.E_{2,2} + f.E_{2,3}\big)P^{-1} \\
\iff & N = a.P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1} + b.PE_{1,2}P^{-1} + c.PE_{1,3}P^{-1} + e.PE_{2,2}P^{-1} + f.PE_{2,3}P^{-1}
\end{aligned}$$

On a bien prouvé ce faisant, que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\big(P(E_{1,1}+E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}\big)$. *(Et il serait facile de prouver que cette famille est aussi libre, ce qui en fait une base de F, mais ce n'était pas demandé).*

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. La boule noire peut sortir dès le premier tirage, et peut aussi au pire être tirée en dernier, soit au n-ième tirage une fois que toutes les autres boules ont été retirées. Toutes les valeurs intermédiaires sont possibles, donc $X(\Omega) = [\![1; n]\!]$.

2. a) Pour tout entier i de $[\![2; n-1]\!]$: sachant que l'événement $B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}$ est réalisé, on a retiré $i-1$ boules blanches de l'urne : il reste donc $n-(i-1) = n-i+1$ boules dans l'urne, dont la noire ; les $n-i$ autres sont blanches, donc $P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

   b) $P(X=1) = P(N_1) = \dfrac{1}{n}$, et pour tout i de $[\![2; n]\!]$, $[X = k] = B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \times N_k$, donc d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times \ldots \times P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{k-2}}(B_{k-1}) P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1}}(N_k) \\
&= \prod_{i=1}^{k-1} \frac{n-i}{n-i+1} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{\prod_{i=1}^{k-1}(n-i)}{\prod_{j=0}^{k-2}(n-j)} \times \frac{1}{n-k+1} \qquad [j = i-1] \\
&= \frac{n-k+1}{n} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

   On reconnaît donc que X suit la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$, et le cours donne donc :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.

a) Pour tout k de $X(\Omega)$: $[X = k] \cap [Y = 0]$ est réalisé si et seulement si on a tiré successivement $k-1$ boules blanches numérotés 0, puis la boule noire. En notant Z_k l'événement : « on tire une boule blanche numérotée 0 », on a donc :

$[X = 1] \cap [Y = 0] = N_1$ donc $P([X = 1] \cap [Y = 0]) = P(X = 1) = \dfrac{1}{n}$,

et pour tout $k \in [\![2; n]\!]$: $[X = k] \cap [Y = 0] = Z_1 \cap \ldots \cap Z_{k-1} \cap N_k$, donc d'après la formule des probabilités composées :

$$P\big([X = k] \cap [Y = 0]\big) = P(Z_1) \times P_{Z_1}(Z_2) \times \ldots \times P_{Z_1 \cap \ldots \cap Z_{k-2}}(Z_{k-1}) \times P_{Z_1 \cap \ldots \cap Z_{k-1}}(N_k)$$

$$= \prod_{j=1}^{k-1} \frac{n-1-i}{n-i+1} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{\prod\limits_{j=2}^{k} (n-j)}{\prod\limits_{\ell=0}^{k-2} (n-\ell)} \times \frac{1}{n-k} \qquad [j = i+1] \text{ et } [\ell = i-1]$$

$$= \frac{(n-k)(n-k+1)}{n(n-1)} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

On remarque d'ailleurs que cette formule est vraie lorsque $k = 1$, donc elle est vraie pour tout k de $X(\Omega)$.

b) La formule des probabilités totales est ici utilisée avec le système complet d'événements $\big([X = k]\big)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ associé à X, ce qui donne :

$$P(Y = 0) = \sum_{k=1}^{n} P\big([X = k] \cap [Y = 0]\big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=0}^{n-1} j = \frac{1}{n(n-1)} \times \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2}$$

c) On a $Y(\Omega) = \{0; 1\}$, donc la loi de Y est donnée par les probabilités $P(Y = 0) = \dfrac{1}{2}$ et $P(Y = 1) = 1 - P(Y = 0) = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire que Y suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{2}$.

Le cours sur cette loi donne : $E(Y) = \dfrac{1}{2}$ et $V(Y) = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{4}$.

4. Simulation informatique.

a) La boule noire est codée dans le script suivant par le nombre `nB+1` : à tout instant, le tirage d'une boule dans l'urne est simulé par le choix d'un entier au hasard entre 1 et `nB+1` : si on tire le numéro maximal, il s'agit de la boule noire, sinon il s'agit d'une boule blanche. Le nombre total de boules diminue d'une unité à chaque fois pour prendre en compte les tirages sans remise.

```
n = input('entrez une valeur pour n : ')
nB = n-1
X = 1
u = grand(1,1,'uin',1,nB+1)
while u < nB+1
    nB = nB-1
    u = grand(1,1,'uin',1,nB+1)
    X = X+1
end
disp(X,'le boule noire est apparue au tirage numéro : ')
```

b) Le script précédent est complété par la prise en compte de la boule blanche particulière numérotée 1 : dans la simulation, cela correspond à l'obtention de l'entier 1 dans le choix d'un entier compris entre 1 et `nB+1`.

```
n = input('entrez une valeur pour n : ')
nB = n-1
X = 1
Y = 0
u = grand(1,1,'uin',1,nB+1)
while u < nB+1
    nB = nB-1
    if u == 1 then Y = 1
    end
    u = grand(1,1,'uin',1,nB+1)
    X = X+1
end
disp(X,'la boule noire est apparue au tirage numéro')
disp(Y,'la valeur de Y est ')
```

Exercice 3

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t$. On a donc, en particulier, $u_0 = 1$.

1. On a : $\quad u_1 = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)\mathrm{d}t = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - 0 = \frac{2}{3}$, et :

$$u_2 = \int_0^1 (1-t^2)^2\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-2t^2+t^4)\mathrm{d}t = \left[t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - 0 = \frac{15-10+3}{15} = \frac{8}{15}$$

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque : pour tout t de $[0;1]$, $0 \leqslant 1-t^2 \leqslant 1$ donc $(1-t^2)^n \geqslant (1-t^2)^{n+1}$.
Les fonctions concernées sont continues sur $[0;1]$ et les bornes sont dans l'ordre croissant $(0<1)$, donc par croissance de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\mathrm{d}t \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant u_{n+1}$$

On a bien démontré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) D'après le théorème de limite monotone : la suite décroissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si elle est minorée. Comme souvent, il suffit ici de remarquer et justifier que la suite est positive, donc minorée par 0 ; en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t$ est l'intégrale d'une fonction positive et continue sur $[0;1]$, les bornes de l'intégrale étant dans l'ordre croissant, donc par positivité de l'intégrale : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 : elle converge d'après le théorème cité ci-dessus, vers un réel $\ell \geqslant 0$.

3. On détermine dans cette question la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$ est celle de la densité de la loi normale de paramètres $(0, \sigma^2)$:
à ce titre, cette intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ vaut 1.

b) On cherche ici un réel positif σ tel que : $\dfrac{1}{2\sigma^2} = n \iff 2\sigma^2 = \dfrac{1}{n} \iff \sigma^2 = \dfrac{1}{2n} \iff \sigma = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

Avec cette valeur de σ, le résultat de la question précédente s'applique encore, qui donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-nt^2}\mathrm{d}t = 1 \iff \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

Il reste à remarquer que la fonction $g:\ t \mapsto e^{-nt^2}$ définie sur $\mathbb{R}$, est paire ($\forall t \in \mathbb{R},\ g(-t) = e^{-n(-t)^2} = e^{-nt^2}$) et continue sur $\mathbb{R}$, ce qui permet d'écrire :

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-nt^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

c) L'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x$ est très classique, et vient de la convexité de la fonction exp (fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp''(x) = \exp(x) > 0$) ; ceci implique notamment que la courbe de exp se situe entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 0 qui a pour équation : $y = \exp'(0).(x-0) + \exp(0) \iff y = x + 1$.

L'inégalité : $e^x \geqslant 1 + x$ étant valable pour tout réel x, on peut poser, pour tout réel t, $x = -t^2$ et on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{-t^2} \geqslant 1 - t^2$$

d) De ce qui précède, on déduit que pour tout réel t de $[0;1]$ et tout entier non-nul $n \in \mathbb{N}^*$: $e^{-t^2} \geqslant 1 - t^2 \geqslant 0 \Longrightarrow \left(e^{-t^2}\right)^n \geqslant (1-t^2)^n$ par croissance de la fonction puissance n-ième sur $\mathbb{R}^+$, soit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0;1], \quad e^{-nt^2} \geqslant (1-t^2)^n \geqslant 0$$

Les fonctions concernées sont continues sur $[0;1]$, et $0 < 1$, donc par croissance et positivité de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \int_0^1 (1-t^2)^n\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 e^{-nt^2}\mathrm{d}t \iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} = 0$, le théorème d'encadrement permet de conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

4. Pour tout entier naturel n :

$$\int_0^1 (1-t)^n\mathrm{d}t = -\int_0^1 \underbrace{(-1).(1-t)^n}_{\text{forme } u'.u^n}\mathrm{d}t = -\left[\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = -\left(0 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$$

Or pour tout t de $[0;1]$, $t \geqslant t^2 \Longrightarrow 0 \leqslant 1 - t \leqslant 1 - t^2 \Longrightarrow 0 \leqslant (1-t)^n \leqslant (1-t^2)^n$ par croissance de la fonction puissance sur $\mathbb{R}^+$.

Les fonctions concernées sont continues sur $[0;1]$ et $0 < 1$, donc par croissance de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 (1-t)^n\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (1-t^2)^n\mathrm{d}t \iff \frac{1}{n+1} \leqslant u_n$$

Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1}$ est, à un décalage d'indice près, la série harmonique dont on sait qu'elle diverge.

Le théorème de comparaison des séries à termes positifs permet donc de conclure que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est elle aussi divergente.

5. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans l'intégrale $u_{n+1} = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\mathrm{d}t$, on réalise une intégration par parties en posant :

$$u(t) = (1-t^2)^{n+1} \longrightarrow u'(t) = -2t(n+1)(1-t^2)^n$$
$$v'(t) = 1 \longrightarrow v(t) = t$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \Big[t(1-t^2)^{n+1}\Big]_0^1 + 2(n+1)\int_0^1 t^2(1-t^2)^{n+1}\mathrm{d}t \\ &= 0 + 2(n+1)\int_0^1 (t^2-1+1)(1-t^2)^n\mathrm{d}t = (2n+2)\int_0^1 \big((1-t^2)^n - (1-t^2)^{n+1}\big)\mathrm{d}t \\ u_{n+1} &= (2n+2)(u_n - u_{n+1}) \qquad CQFD \end{aligned}$$

b) On isole alors u_{n+1} en fonction de u_n dans la relation précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (2n+2)u_n - (2n+2)u_{n+1} \iff (2n+3)u_{n+1} = (2n+2)u_n \iff u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}u_n$$

Montrons alors par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$u_n = \dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 0$: on sait que $u_0 = 1$, et par ailleurs $\dfrac{4^0.(0!)^2}{(2\times 0+1)!} = \dfrac{1}{0!} = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et sous cette hypothèse, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie, soit : "$u_{n+1} = \dfrac{4^{n+1}\big((n+1)!\big)^2}{(2n+3)!}$".

On sait que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2n+2}{2n+3}u_n \overset{H.R.}{=} \frac{(2n+2).4^n.(n!)^2}{(2n+3).(2n+1)!} = \frac{(2n+2)^2.4^n.(n!)^2}{(2n+3)!} \\ &= \frac{4.(n+1)^2.4^n.(n!)^2}{(2n+3)!} = \frac{4^{n+1}.\big((n+1)!\big)^2}{(2n+3)!} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.
La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence. On peut donc écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$

(et en profiter ainsi pour vérifier les calculs effectués à la question 1.)

c) L'énoncé admet l'équivalent $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$ (formule de Stirling). En écrivant $u_n = \dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$, l'équivalent de Stirling et les règles de calcul avec les équivalents (compatibilité avec le produit et le quotient ici) donnent :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^n.2\pi n.n^{2n}.e^{-2n}}{(2n+1).\sqrt{2\pi\times 2n}.(2n)^{2n}.e^{-2n}} = \frac{4^n.2\pi.n^{2n+1}}{2n.2\sqrt{\pi n}.4^n.n^{2n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

6. Informatique.
L'énoncé rappelle que si `t` est un vecteur, la commande `prod(t)` renvoie le produit des éléments de `t`. On peut ainsi facilement refaire le calcul des factorielles nécessaires à celui de u_n :

```
n = input('entrez une valeur pour n : ')
x = 1:n
m = 2*n+1
y = 1:m
v = prod(x)  // calcul de n!
w = prod(y)  // calcul de (2n+1)!
u = 4^n*v^2/w  // calcul de u_n = 4^n*(n!)^2/(2n+1)!
disp(u)
```

Problème

Partie 1 : étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire X

Dans cet exercice, θ (theta) désigne un réel élément de $\left]0;\frac{1}{2}\right[$.

On considère la fonction f définie par : $\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta x^{1+\frac{1}{\theta}}} & \text{si } x\geqslant 1\\ 0 & \text{si } x<1\end{cases}.$

1. On vérifie les trois points qui font d'une fonction une densité de probabilité :
   - La fonction f est nulle donc positive sur $]-\infty;1[$, et positive sur $[1;+\infty[$ puisque θ est positif, et x aussi.
   - La fonction f est continue comme fonction constante sur $]-\infty;-1[$, et continue sur $]1;+\infty[$ comme fonction puissance réelle de référence (à un facteur constant près).
   - Enfin, sous réserve de convergence :

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{\theta}x^{-1-\frac{1}{\theta}}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\theta}\left[\frac{x^{-1/\theta}}{-1/\theta}\right]_1^A=\frac{1}{\theta}\times\left(-\theta.A^{-1\theta}+\theta\right)=\frac{1}{\theta}.(0+\theta)=1$$

   En effet, $-\frac{1}{\theta}$ est un exposant négatif donc $\lim\limits_{A\to+\infty}A^{-1/\theta}=0$, et on a bien $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$.

   Les trois points sont vérifiés : f est bien une densité de probabilité.

   On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition.

2. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.
   Comme la fonction $x\mapsto xf(x)$ est nulle (car f l'est) sur $]-\infty;1[$ et positive sur $[1;+\infty[$, cela revient à étudier la convergence simple de $\displaystyle\int_1^A xf(x)\mathrm{d}x$.

   Pour tout réel $A>1$: $\quad\displaystyle\int_1^A xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\theta}\int_1^A x^{-1/\theta}\mathrm{d}x=\frac{1}{\theta}\left[\frac{x^{1-\frac{1}{\theta}}}{1-\frac{1}{\theta}}\right]=\frac{1}{\theta-1}\left(A^{1-\frac{1}{\theta}}-1\right).$

   Or : $\quad\theta\in\left]0;\frac{1}{2}\right[\iff 0<\theta<\frac{1}{2}\iff\frac{1}{\theta}>2\iff 1-\frac{1}{\theta}<-1.$

   On en déduit que $\lim\limits_{A\to+\infty}A^{1-\frac{1}{\theta}}=0$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ converge, et X admet une espérance qui vaut :

   $$E(X)=\frac{1}{\theta-1}.(0-1)=\frac{1}{1-\theta}$$

Ensuite : la variable aléatoire X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2, donc si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Par les mêmes arguments que ci-dessus, cela revient à prouver la convergence simple de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\theta}\int_1^{+\infty} x^{1-\frac{1}{\theta}}\mathrm{d}x$.

Pour tout réel $A > 1$: $\displaystyle\frac{1}{\theta}\int_1^A x^{1-\frac{1}{\theta}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\theta}\Big[\frac{x^{2-1/\theta}}{2-1/\theta}\Big]_1^A = \frac{1}{2\theta-1}\big(A^{2-\frac{1}{\theta}}-1\big)$.

Or à nouveau : $0 < \theta < \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{1}{\theta} > 2 \iff 2-\frac{1}{\theta} < 0$, donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} A^{2-1/\theta} = 0$ et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_1^A x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\theta-1}.(0-1) = \frac{1}{1-2\theta}$.

La variable aléatoire X admet donc un moment d'ordre 2 qui vaut $E(X^2) = \dfrac{1}{1-2\theta}$.

La variable aléatoire X admet donc une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{1-2\theta} - \Big(\frac{1}{1-\theta}\Big)^2 = \frac{(1-\theta)^2-(1-2\theta)}{(1-2\theta)(1-\theta)^2} = \frac{\theta^2}{(1-2\theta)(1-\theta)^2}$$

3. La fonction de répartition de X est définie par la formule générale : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t$.

   On distingue deux cas :

   - Pour tout $x < 1$: $\quad F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x 0\ \mathrm{d}t = 0$
   - Pour tout $x \geqslant 1$: $\quad F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^1 0\ \mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1}{\theta}.t^{-1-\frac{1}{\theta}}\mathrm{d}t = \frac{1}{\theta}.\Big(\frac{x^{-\frac{1}{\theta}}}{-1/\theta} - \frac{1}{1-1/\theta}\Big) = 1 - x^{-\frac{1}{\theta}}$.

   Bilan : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - x^{-\frac{1}{\theta}} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

4. a) L'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ n'a évidemment aucune solution sur $]-\infty;-1[$.

   Pour $x \geqslant 1$: $\quad F(x) = \dfrac{1}{2} \iff 1 - x^{-\frac{1}{\theta}} = \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{1}{2} = x^{-\frac{1}{\theta}} \iff 2 = x^{\frac{1}{\theta}} \iff x = 2^\theta$

   Par principe de puissance réciproque, on trouve bien une unique solution $M_e = 2^\theta$.

   b) La fonction $g :\ x \mapsto 2^x(1-x)$ est bien définie et dérivable sur $\Big[0;\dfrac{1}{2}\Big]$; en rappelant que $2^x = e^{x\ln(2)}$ pour tout réel x :

   $$\forall x \in \Big[0;\frac{1}{2}\Big],\quad g'(x) = \ln(2).2^x(1-x) + 2^x.(-1) = 2^x(\ln(2) - 1 - \ln(2).x)$$

   Pour tout réel x de $\Big[0;\dfrac{1}{2}\Big]$, $2^x > 0$ et $\ln(2) - 1 < 0$, $-\ln(2).x \leqslant 0$ donc $g'(x) < 0$, et g est strictement décroissante sur $\Big[0;\dfrac{1}{2}\Big]$, de sorte que :

   $$\forall x \in \Big[0;\frac{1}{2}\Big],\quad g(x) \leqslant g(0) \iff 2^x(1-x) \leqslant 1$$

   c) On compare ici $E(X) = \dfrac{1}{1-\theta}$ et $M_e = 2^\theta$.

   Or on vient de voir que, puisque $\theta \in \Big[0;\dfrac{1}{2}\Big]$: $\quad 2^\theta(1-\theta) \leqslant 1 \iff 2^\theta \leqslant \dfrac{1}{1-\theta}$

   (on a divisé les deux membres de l'inégalité par $1-\theta > 0$.

   Ainsi : $\quad M_e \leqslant E(X) \qquad$ (la *médiane* de X est inférieure à sa *valeur moyenne*.)

5. Soit a un réel supérieur ou égale à 1 et b un réel strictement positif.

   a) Par définition de la probabilité conditionnelle :

   $P_{(X>a)}(X > a+b) = \dfrac{P\big([X > a] \cap [X > a+b]\big)}{P(X > a)} = \dfrac{P(X > a+b)}{P(X > a)}$ car $[X > a+b] \subset [X > a]$, soit :

   $$P_{(X>a)}(X > a+b) = \frac{1 - F(a+b)}{1 - F(a)} = \frac{(a+b)^{-\frac{1}{\theta}}}{a^{-\frac{1}{\theta}}} = \left(\frac{a+b}{a}\right)^{-\frac{1}{\theta}} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^{1/\theta}$$

   b) Lorsque a tend vers $+\infty$: $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \frac{a}{a+b} = 1$ (en effet $a + b \underset{a\to+\infty}{\sim} a$), donc puisque $\dfrac{1}{\theta} > 0$, $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \left(\frac{a}{a+b}\right)^{1/\theta} = 1 = \lim_{a\to+\infty} P_{(X>a)}(X > a+b)$.

   Si on admet que la variable X représente la durée de vie d'un certain appareil : ce résultat signifie que si l'appareil a déjà "survécu" un très long temps a, il survivra très probablement un temps b fixe supplémentaire.

Partie 2 : simulation de X

6. On pose $Y = \ln(X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note G sa fonction de répartition.

   a) Pour tout réel x : $G(x) = P(Y \leqslant x) = P(\ln(X) \leqslant x) = P(X \leqslant e^x) = F(e^x)$ puisque exp est une bijection continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   Au vu du calcul de $F(x)$ réalisé à la question 3., on en déduit :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } e^x < 1 \\ 1 - (e^x)^{-\frac{1}{\theta}} & \text{si } e^x \geqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x/\theta} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

   b) On reconnaît ici la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{\theta}$, loi qui est donc suivie par la variable aléatoire Y.

7. La commande `Scilab` rappelée par l'énoncé permet de simuler Y ; on prend bien garde au fait que le dernier paramètre de la fonction `grand(1,1,'exp',1/lambda)` correspond à l'espérance de la loi exponentielle simulée : pour Y, il s'agit de θ.

```
theta = input('Donner un réel compris entre 0 et 1/2 : ')
Y = grand(1,1,'exp',theta)
X = exp(Y)
disp(X)
```

Partie 3 : estimation d'un paramètre

On considère n variables aléatoire $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ toutes définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que Y.

8. On pose $T_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

   a) La variable aléatoire T_n est classiquement la moyenne empirique de l'échantillon : c'est bien une variable aléatoire donc la loi dépend du paramètre θ puisque c'est le cas de chacune des variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$, mais pas de façon explicite (le réel θ n'intervient pas dans la définition de T_n) ; ceci suffit à faire de T_n un estimateur de θ.

b) On redémontre facilement que T_n est un estimateur sans biais de l'espérance $E(Y)=\theta$, en écrivant grâce à la propriété de linéarité de l'espérance, que T_n admet une espérance qui vaut :

$$E(T_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(Y_k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta=\frac{1}{n}\times n\theta=\theta$$

Donc $b_\theta(T_n)=E(T_n)-\theta=0$.

c) Le risque quadratique de l'estimateur sans biais T_n est, sous réserve d'existence : $r_\theta(T_n)=V(T_n)$. Or T_n est une combinaison linéaire de variables aléatoires mutuellement indépendantes admettant toutes une variance (d'après le cours sur la loi exponentielle) ; T_n elle-même admet donc une variance qui vaut, par indépendance mutuelle des $(Y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$:

$$V(T_n)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}V(Y_k)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\theta^2}=\frac{1}{n^2}\times n\times\theta^2=\frac{\theta^2}{n}$$

On en déduit évidemment que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_\theta(T_n)=0$, ce qui fait bien de T_n un estimateur convergent de θ.

9. a) La variable aléatoire T_n admet une variance, on peut donc écrire pour elle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall\varepsilon>0,\quad P\big(|T_n-E(T_n)|\geqslant\varepsilon\big)\leqslant\frac{V(T_n)}{\varepsilon^2}\iff P\big(|T_n-\theta|\geqslant\varepsilon\big)\leqslant\frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$$

b) On sait que : $|T_n-\theta|\geqslant\varepsilon$ signifie que la distance de T_n à θ est supérieure ou égale à ε : du point de vue de θ, cela signifie qu'il n'appartient pas à l'intervalle $]T_n-\varepsilon;T_n+\varepsilon[$ des réels qui sont justement à une distance de T_n inférieure à ε.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ci-dessus peut donc se réécrire, pour tout $\varepsilon>0$:

$$P\big(\theta\notin]T_n-\varepsilon;T_n+\varepsilon[\big)\leqslant\frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}\iff 1-P\big(\theta\in]T_n-\varepsilon;T_n+\varepsilon[\big)\leqslant\frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}\iff P\big(\theta\in]T_n-\varepsilon;T_n+\varepsilon[\big)\geqslant 1-\frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$$

Et comme $P\big(\theta\in[T_n-\varepsilon;T_n+\varepsilon]\big)\geqslant P\big(\theta\in]T_n-\varepsilon;T_n+\varepsilon[\big)$, on a bien :

$$\forall\varepsilon>0,\quad P\big(\theta\in[T_n-\varepsilon;T_n+\varepsilon]\big)\geqslant 1-\frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$$

c) Puisque $0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}$, alors $\theta^2\leqslant\frac{1}{4}\iff 1-\frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}\geqslant 1-\frac{1}{4n\varepsilon^2}$.
D'après ce qui précède : l'intervalle $[T_n-\varepsilon;T_n+\varepsilon]$ est alors un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance 90% avec $n=1000$, dès que :

$$1-\frac{1}{4000\varepsilon^2}\geqslant 0.9\iff 0.1\geqslant\frac{1}{4000\varepsilon^2}\iff 10\leqslant 4000\varepsilon^2\iff\frac{1}{400}\leqslant\varepsilon^2\iff\varepsilon\geqslant\frac{1}{20}$$

puisqu'on cherche $\varepsilon>0$.
Un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance 90% lorsque $n=1000$, est donc

$$\left[T_n-\frac{1}{20};T_n+\frac{1}{20}\right]$$