MATHÉMATIQUES - Edhec E 2017

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On considère la fonction f qui à tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynômiale des deux variables x et y.
2. a) Calcul des dérivées partielles d'ordre 1 : pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\partial_1(f)(x,y) = 4x^3 - 2(2x-2y) = 4x^3 - 4x + 4y$$
$$\partial_2(f)(x,y) = 4y^3 - 2(-2x+2y) = 4y^3 + 4x - 4y$$

b) On constate, au vu des calculs précédents, que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \nabla f(x,y) = 4\begin{pmatrix} x^3-x+y \\ y^3+x-y\end{pmatrix}$,

le gradient est donc bien nul si et seulement si : $\begin{cases} x^3-x+y &= 0 \\ y^3+x-y &= 0\end{cases}$.

c) En additionnant les lignes L_1 et L_2 du système, on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} x^3+x-y=0 \\ x^3+y^3=0\end{cases} \iff \begin{cases} x^3+x-y=0 \\ x^3=-y^3\end{cases}$$

Or : $x^3=-y^3 \iff x^3=(-y)^3$ par imparité de la fonction cube. Cette fonction est également strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective : $x^3=(-y)^3$ est vrai si et seulement si $x=-y$, et le système devient équivalent à :

$$\begin{cases} x^3-2x=0 \\ x=-y\end{cases}$$

Le polynôme x^3-2x se factorise : $x^3-2x = x(x^2-2) = x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$, il a donc trois racines : 0, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, et f admet bien trois points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

3. a) Calcul des dérivées partielles d'ordre 2 : pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 12x^2-4, \qquad \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 12y^2-4,$$

$$\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = 4 = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) \quad \text{d'après le théorème de Schwarz}$$

b) En $(0,0)$, la matrice hessienne de f est :

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(0,0) & \partial^2_{1,2}(f)(x,y) \\ \partial^2_{2,1}(f)(x,y) & \partial^2_{2,2}(f)(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4\end{pmatrix}$$

En $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, la matrice hessienne de f est :

$$H(\sqrt{2},-\sqrt{2})=\begin{pmatrix}20 & 4\\ 4 & 20\end{pmatrix}$$

On constate, au vu de la parité des exposants dans les dérivées partielles d'ordre 2, que la matrice hessienne est identique au point $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

c) Rappelons ici que les points critiques de f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, sont les seuls points en lesquels f est susceptible de présenter un extrémum local.

- En $(0,0)$:

$$\begin{aligned}\lambda\in \mathrm{Sp}\big(H(0,0)\big) &\iff H(0,0)-\lambda.I_2 \text{ est non-inversible}\\ &\iff \det\begin{pmatrix}-4-\lambda & 4\\ 4 & -4-\lambda\end{pmatrix}=0\\ &\iff (-4-\lambda)^2-16=0 \iff (-4-\lambda-4)(-4-\lambda+4)=0 \iff \lambda(\lambda+8)=0\end{aligned}$$

Les valeurs propres de $H(0,0)$ sont donc 0 et -8 : comme 0 est valeur propre, on ne peut pas conclure via cette méthode, quant à la nature du point critique $(0,0)$.

- En $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ (donc aussi en $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$) :

$$\begin{aligned}\lambda\in \mathrm{S}\big(H(\sqrt{2},-\sqrt{2})\big) &\iff H(\sqrt{2},-\sqrt{2})-\lambda.I_2 \text{ est non-inversible}\\ &\iff \det\begin{pmatrix}20-\lambda & 4\\ 4 & 20-\lambda\end{pmatrix}=0\\ &\iff (20-\lambda)^2-16=0 \iff (20-\lambda-4)(20-\lambda+4)=0\end{aligned}$$

Les valeurs propres de $H(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ sont donc 16 et 24 : comme elles sont toutes deux strictement positives, on peut en déduire qu'au point critique $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, la fonction f admet un minimum local.

Il en est de même au point critique $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, en lequel la matrice hessienne est identique à la précédente.

La fonction f admet bien un minimum local en deux de ses trois points critiques, qui vaut :

$$f(\sqrt{2},-\sqrt{2})=(\sqrt{2})^4+(-\sqrt{2})^4-2(\sqrt{2}+\sqrt{2})^2=4+4-2\times 8=-8.$$

C'est aussi la valeur, en fait, de $f(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

d) Pour x au voisinage de 0 :

$$f(x,x)=x^4+x^4-2(x-x)^2=2x^4 \quad\text{et}\quad f(x,-x)=x^4+(-x)^4-2(x+x)^2=2x^4-8x^2=2x^2(x^2-4)$$

- Lorsque x est au voisinage de 0 (avec $x\neq 0$) : (x,x) est au voisinage de $(0,0)$, et $f(x,x)=2x^4>0=f(0,0)$: on en déduit que f n'admet pas de maximum local en $(0,0)$, puisqu'on trouve des points très proches de celui-ci en lesquels f prend des valeurs supérieures.

- De même : lorsque x est au voisinage de 0 ($x\neq 0$) : $(x,-x)$ est au voisinage de $(0,0)$, et $f(x,-x)=2x^2(x^2-4)$ est le produit de deux réels de signes opposés ($2x^2>0$ et $x^2-4<0$),

  donc $f(x,-x)<0=f(0,0)$; on en conclut que f n'admet pas non plus un minimum local en $(0,0)$; il s'agit en fait d'un point selle !

4. a) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2)^2 - 2(x+y)^2 = x^4 + y^4 - 2(x^2 - 2xy + y^2) - (x^4 - 4x^2 + 4) - (y^4 - 4y^2 + 4) - 2(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 - x^4 + 4x^2 - 4 - y^4 + 4y^2 - 4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$$
$$= -8$$

On en déduit : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2 - 8$ qui est toujours supérieur ou égal à 8, puisqu'on ajoute à ce réel la somme de trois carrés positifs.

b) Ce qui précède permet donc d'écrire :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \geqslant -8 \iff \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \geqslant f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

Relation qui exprime qu'en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, la fonction f admet en fait un *minimum global* ! Il en est de même, d'ailleurs, au point $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

5. a) Il suffit de compléter le script avec l'expression de $f(x,y)$!

```
function z = f(x,y)
    z = x^4 + y^4 - 2*(x-y)^2
endfunction

x = linspace(-2,2,101)
y = x
fplot3d(x,y,f)
```

b) La nappe qui représente f, doit faire apparaître 2 points de mêmes images en lesquels f admet un minimum global : seule la nappe 1 fait apparaître une telle propriété, où l'on vérifie d'ailleurs qu'en $(0,0)$ il n'y a pas d'extrémum local.

Exercice 2

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E, les fonctions e_0, e_1, e_2 étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e_0(t) = 1, \quad e_1(t) = t \quad \text{et} \quad e_2(t) = t^2$$

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(\varphi(P)\big)(x) = \int_0^1 P(x+t)\mathrm{d}t$$

1. a) La rédaction de cette question est toujours plus délicate du point de vue des notations lorsqu'on travaille dans un espace de poynômes, ou plus généralement de fonctions.

Soient P, Q deux éléments de E, et λ un scalaire réel quelconques : montrer que deux applications sont égales, c'est montrer que leurs expressions sont égales pour tout réel x :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(\varphi(\lambda.P + Q)\big)(x) = \int_0^1 \big(\lambda.P + Q\big)(x+t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \big(\lambda.P(x+t) + Q(x+t)\big)\mathrm{d}t \quad \text{par définition d'une somme d'applications}$$

$$= \lambda . \int_0^1 P(x+t)\mathrm{d}t + \int_0^1 Q(x+t)\mathrm{d}t \qquad \text{par linéarité de l'intégrale}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(\varphi(\lambda.P+Q)(x) = \lambda.\big(\varphi(P)\big)(x) + \big(\varphi(Q)\big)(x)$$

On a bien montré l'égalité d'applications : $\forall (P,Q) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda.P+Q) = \lambda.\varphi(P) + \varphi(Q)$, donc φ est une application linéaire.

b) Pour tout réel x :

$$\big(\varphi(e_0)\big)(x) = \int_0^1 e_0(x+t)\mathrm{d}t = \int_0^1 1\mathrm{d}t = 1 - 0 = 1$$

$$\big(\varphi(e_1)\big)(x) = \int_0^1 e_1(x+t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (x+t)\mathrm{d}t = \left[xt + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = x + \frac{1}{2}$$

$$\big(\varphi(e_2)\big)(x) = \int_0^1 e_2(x+t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (x+t)^2\mathrm{d}t = \int_0^1 (x^2+2tx+t^2)\mathrm{d}t = \left[x^2t + xt^2 + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = x^2 + x + \frac{1}{3}$$

Ces résultats s'écrivent aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(\varphi(e_0)\big)(x) = 1 = e_0(x) \quad \text{donc } \varphi(e_0) = e_0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(\varphi(e_1)\big)(x) = x + \frac{1}{2} = e_1(x) + \frac{1}{2}e_0(x) \quad \text{donc } \varphi(e_1) = \varphi(e_1) + \frac{1}{2}\varphi(e_0)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(\varphi(e_2)\big)(x) = x^2 + x + \frac{1}{3} = e_2(x) + e_1(x) + \frac{1}{3}e_0(x) \quad \text{donc } \varphi(e_2) = e_2 + e_1 + \frac{1}{3}e_0$$

c) La famille $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est la base canonique de E, donc tout élément P de E s'écrit de façon unique : $P = a.e_0 + b.e_1 + c.e_2$, les réels a, b, c étant les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$. La linéarité de φ permet d'écrire :

$$\varphi(P) = a.\varphi(e_0) + b.\varphi(e_1) + c.\varphi(e_2) = a.e_0 + b.(e_1 + \frac{1}{2}.e_0) + c.(e_2 + e_1 + \frac{1}{3}.e_0)$$

L'image de tout élément de E par φ, s'écrit donc toujours comme combinaison linéaire de (e_0, e_1, e_2) : c'est donc toujours un élément de E, et φ est un endomorphisme de E.

2. a) Les trois calculs d'images faits en 1.b) permettent d'écrire la matrice de φ dans la base (e_0, e_1, e_2) de E :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi(e_0) & \varphi(e_1) & \varphi(e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_0 \\ e_1 \\ e_2 \end{array} = A$$

b) La matrice A qui représente φ est triangulaire supérieure, sans aucun élément diagonal nul : elle est donc inversible, ce qui fait de φ un automorphisme de E.

c) On sait également que les valeurs propres de φ sont aussi celles de la matrice triangulaire A qui sont ses éléments diagonaux, donc :

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathrm{Sp}(A) = \{1\}$$

La matrice A a pour unique valeur propre $\lambda = 1$: si elle était diagonalisable, elle serait semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$, et il existerait une matrice inversible P telle que :

$A = PI_3P^{-1} \iff A = PP^{-1} \iff A = I_3$; être semblable à A serait être *égal* à I_3, ce qui n'est évidemment pas le cas !

La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

3. Question `Scilab` à deux cents... il suffit de définir la matrice A et de laisser le programme calculer et afficher sa puissance n-ième !

```
n = input('entrez une valeur pour n : ')
A = [1,1/2,1/3;0,1,1;0,0,1]
disp(A^n)
```

4. a) Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "il existe un réel u_n tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$" est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 0$: $A^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0/2 & u_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $u_0 = 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons sous cette hypothèse que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, soit : il existe un réel u_{n+1} tel que $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)/2 & u_{n+1} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^{n+1} = A^n \times A \overset{H.R.}{=} \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 + n/2 & 1/3 + n/2 + u_n \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (n+1)/2 & u_{n+1} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2} + \frac{n}{3} = u_n + \frac{3n+2}{6}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

b) La relation précédente s'écrit : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{6}(3n+2)$; la sommation de cette relation va faire apparaître un télescopage dans le membre de gauche :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n-1}(3k+2)$$

$$\iff \sum_{j=1}^{n+1} u_j - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k + \frac{1}{3}n$$

$$\iff u_n - u_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n}{3}$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{3n^2 - 3n + 4n}{12} = \frac{3n^2 + n}{12}$$

Remarquons enfin que : $\dfrac{3 \cdot 0^2 - 0}{12} = 0 = u_0$, donc la formule obtenue est bien vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

c) Il suffit donc de conclure : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & \frac{n(3n-1)}{12} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

1. a) Pour tout réel x :

$$P(-\ln(W) \leqslant x) = P(\ln(W) \geqslant -x) = P(W \geqslant e^{-x}) = 1 - P(W < e^{-x}) = 1 - P(W \leqslant e^{-x})$$

Par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$, et parce que W est une variable à densité. Comme pour tout réel x, $e^{-x} > 0$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_W(x) = 1 - \left(1 - e^{-e^{-x}}\right) = e^{-e^{-x}}$$

b) Il est clair que F_W est de classe $\mathcal{C}^1$, donc continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que W est une variable à densité.

2. a) Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
F_{Y_n}(x) &= P(Y_n \leqslant x) = P\big(\max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leqslant x\big) \\
&= P\big([X_1 \leqslant x] \cap [X_2 \leqslant x] \cap \ldots \cap [X_n \leqslant x]\big) \\
&= P(X_1 \leqslant x) \times P(X_2 \leqslant x) \times \ldots \times P(X_n \leqslant x) \qquad \text{par indépendance mutuelle des } X_i \\
&= \big(P(V \leqslant x)\big)^n \qquad \text{car les } X_i \text{ suivent toutes la même loi que } V \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \left(1 - e^{-x}\right)^n & \text{si } x > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

b) L'énoncé admet que Y_n est une variable à densité, obtenue par dérivation de F_{Y_n} sauf peut-être en 0, où on choisit une valeur arbitraire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ n.e^{-x}.\left(1 - e^{-x}\right)^{n-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3. a) Lorsque t tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{t \to +\infty} -e^{-t} = 0$, donc on peut utiliser l'équivalent classique $(1+u)^\alpha - 1 \underset{u \to 0}{\sim} \alpha.u$, qui donne ici, pour t au voisinage de $+\infty$:

$$\left(1 - e^{-t}\right)^n - 1 \underset{t \to +\infty}{\sim} -n.e^{-t} \iff 1 - F_{Y_n}(t) = 1 - \left(1 - e^{-t}\right)^n \underset{t \to +\infty}{\sim} n.e^{-t}$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge (et vaut 1 : c'est la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t)\mathrm{d}t$, intégrale d'une densité !). Les deux fonctions de la dernière équivalence sont continues et positives sur $[0, +\infty[$, donc par comparaison d'intégrales de telles fonctions, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_{Y_n}(t)\big)\mathrm{d}t$ est convergente.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$: dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \big(1 - F_{Y_n}(t)\big)\mathrm{d}t$, on réalise une intégration par parties en posant :

$$\begin{aligned}
u(t) &= 1 - F_{Y_n}(t) &&\longrightarrow && u'(t) = -f_{Y_n}(t) \\
v'(t) &= 1 &&\longrightarrow && v(t) = t
\end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, donc par intégration par parties :

$$\int_0^x \big(1 - F_{Y_n}(t)\big)\mathrm{d}t = \Big[t\big(1 - F_{Y_n}(t)\big)\Big]_0^x + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\mathrm{d}t = x\big(1 - F_{Y_n}(x)\big) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\mathrm{d}t$$

c) On a vu en 3.a) que $1 - F_{Y_n}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$, donc $x\big(1 - F_{Y_n}(x)\big) \underset{x\to+\infty}{\sim} xe^{-x}$.

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} x.e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ par croissances comparées. Deux fonctions équivalentes en $+\infty$ y ont en particulier la même limite, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\big(1 - F_{Y_n}(x)\big) = 0$.

d) De la relation obtenue en 3.b) on déduit : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \displaystyle\int_0^x tf_{Y_n}(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \big(1 - F_{Y_n}(t)\big)\mathrm{d}t - x\big(1 - F_{Y_n}(x)\big)$.

Les résultats de 3.a) et 3.c) assurent alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf_{Y_n}(t)\mathrm{d}t$ converge. Comme la fonction $t \mapsto tf_{Y_n}(t)$ est nulle sur $]-\infty, 0]$ et positive sur $]0, +\infty[$, cela revient à dire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf_{Y_n}(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente, ce qui signifie que Y_n admet une espérance qui vaut :

$$E(Y_n) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x tf_{Y_n}(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} x\big(1-F_{Y_n}(x)\big) + \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \big(1-F_{Y_n}(t)\big)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \big(1-F_{Y_n}(t)\big)\mathrm{d}t$$

4. a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$; le changement de variable $u = 1 - e^{-t} = \varphi(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et : $\mathrm{d}u = \varphi'(t)\mathrm{d}t = e^{-t}\mathrm{d}t$; lorsque $t = 0$, $u = 1 - e^0 = 0$ et lorsque $t = x$, $u = 1 - e^{-x}$, donc par changement de variable :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad \int_0^x \big(1-F_{Y_n}(t)\big)\mathrm{d}t = \int_0^x \big(1-(1-e^{-t})^n\big)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1-(1-e^{-t})^n}{e^{-x}}.e^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^{1-e^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u}\mathrm{d}u$$

puisque : $u = 1 - e^{-x} \iff e^{-x} = 1 - u$.

b) On reconnaît en $\dfrac{1-u^n}{1-u}$ le résultat d'une somme géométrique, à savoir $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} u^j = \sum_{k=1}^{n} u^{k-1}$, de sorte que :

$$\int_0^x \big(1 - F_{Y_n}(t)\big)\mathrm{d}t = \int_0^{1-e^{-x}} \sum_{k=1}^n u^{k-1}\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^n \int_0^{1-e^{-x}} u^{k-1}\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^n \left[\frac{u^k}{k}\right]_0^{1-e^{-x}} = \sum_{k=1}^n \frac{(1-e^{-x})^k}{k}$$

par linéarité de l'intégrale. Il suffit alors de passer à la limite lorsque x tend vers $+\infty$ pour obtenir :

$$E(Y_n) = \int_0^{+\infty} \big(1 - F_{Y_n}(t)\big)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(1-e^{-x})^k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

5. On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$.

a) La fonction `grand(1,n,'exp',1)` simule l'échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, donc il suffit de calculer le maximum de ce vecteur pour simuler Y_n, et Z_n s'en déduit immédiatement :

```
function Y = f(n)
x = grand(1,n,'exp',1)
Z = max(x) - log(n)
endfunction
```

b) Comme on ne constate pas de différence visible entre les deux histogrammes, on conjecture que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable aléatoire W.

6. On note F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n.

a) Pour tout réel x :

$$F_{Z_n}(x) = P(Z_n \leqslant x) = P(Y_n - \ln(n) \leqslant x) = P(Y_n \leqslant x + \ln(n)) = F_{Y_n}(x + \ln(n)).$$

b) D'après l'expression de $F_{Y_n}(x)$ obtenue en 2.a), on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x + \ln(n) \leqslant 0 \\ \left(1 - e^{-(x+\ln(n))}\right)^n & \text{si } x + \ln(n) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -\ln(n) \\ \left(1 - \frac{1}{n}e^{-x}\right)^n & \text{si } x \geqslant -\ln(n) \end{cases}$$

c) Pour tout réel x : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{e^{-x}}{n} = 0$, donc d'après l'équivalent classique $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, on peut écrire :

$$\ln\left(1 - e^{-x}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{e^{-x}}{n} \iff n\ln\left(1 - e^{-x}\right) \underset{n\to+\infty}{-} e^{-x}.$$

Comme l'équivalent ne dépend pas de n, cela signifie bien que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$.

d) Il s'agit ici de montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = F_W(x)$ en tout point en lequel F_X est continue (définition de la convergence en loi), donc ici pour tout x de $\mathbb{R}$.

Une remarque préliminaire très importante : pour $x \in \mathbb{R}$ *fixé*, l'inégalité $x \leqslant -\ln(n)$ devient certainement fausse à partir d'un certain rang n, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} -\ln(n) = -\infty$.

Par conséquent, et pour tout réel x : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}e^{-x}\right)^n$.

Or : $\left(1 - \dfrac{1}{n}e^{-x}\right)^n = e^{n\ln(1-\frac{1}{n}e^{-x})}$, où $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right) = e^{-x}$ d'après 6.c) ; par continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = e^{-e^{-x}} = F_W(x)$$

ce qui prouve bien que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers W.

Problème

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

1. Au vu des règles de déplacement aléatoire définies dans l'énoncé, et puisque le mobile est sur le sommet 1 à l'instant 0, la loi de la variable aléatoire X_1 est donnée par :

$$X_1(\Omega) = \{2, 3, 4\} \quad \text{et} \quad P(X_1 = 2) = P(X_1 = 3) = P(X_1 = 4) = \frac{1}{3}$$

et ainsi : $E(X_1) = \dfrac{2+3+4}{3} = 3$.

L'énoncé admettait pour la suite que la loi de X_2 est donnée par :

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{3},\ P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = P(X_2 = 4) = \frac{2}{9}$$

2. Soit un entier $n \geqslant 2$: à partir de deux déplacements, il est possible pour le mobile de se retrouver sur n'importe lequel des quatre sommets : une récurrence immédiate prouverait que pour tout entier $n \geqslant 2,\ X_n(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$.

C'est en effet vrai pour X_2, et si à un certain instant $n \geqslant 2$ le mobile peut se retrouver sur n'importe lequel des quatre sommets avec une probabilité non nulle, alors à l'instant suivant il en est encore de même.

3. a) Soit donc $n \geqslant 2$: d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $\big([X_n=1],[X_n=2],[X_n=3],[X_n=4]\big)$, tous de probabilités non nulles :

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=1) &= P(X_n=1).P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=1)+P(X_n=2).P_{[X_n=2]}(X_{n+1}=1)\\ &\qquad + P(X_n=3).P_{[X_n=3]}(X_{n+1}=1)+P(X_n=4).P_{[X_n=4]}(X_{n+1}=1)\\ &= 0+\frac{1}{3}\big(P(X_n=2)+P(X_n=3)+P(X_n=4)\big)\end{aligned}$$

b) Pour $n=0$: $P(X_1=1)=0$ et $\frac{1}{3}\big(P(X_0=2)+P(X_0=3)+P(X_0=4)\big)=\frac{1}{3}(0+0+0)=0$, donc la relation précédente est aussi vraie quand $n=0$.

Pour $n=1$: $P(X_2=1)=\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}\big(P(X_1=2)+P(X_1=3)+P(X_1=4)\big)=\frac{1}{3}\times 3\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$, donc la relation est encore vraie quand $n=1$.

Finalement, la formule obtenue à la question a) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

c) L'égalité : $P(X_n=1)+P(X_n=2)+P(X_n=3)+P(X_n=4)=1$ provient bien sûr du fait que $\big([X_n=i]\big)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ est un système complet d'événements (le s.c.e. associé à la variable aléatoire X_n), ce qui permet de réécrire la relation obtenue en a) :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad P(X_{n+1}=1)=\frac{1}{3}\big(1-P(X_n=1)\big)=-\frac{1}{3}P(X_n=1)+\frac{1}{3}$$

d) La suite $\big(P(X_n=1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc **arithmético-géométrique**. Pour calculer son expression explicite, on définit donc une suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=P(X_n=1)-\alpha$, où on cherche à définir α tel que (v_n) soit géométrique.

Pour cela, on calcule, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= P(X_{n+1}=1)-\alpha=-\frac{1}{3}P(X_n=1)+\frac{1}{3}-\alpha\\ &= -\frac{1}{3}(v_n+\alpha)+\frac{1}{3}-\alpha\\ v_{n+1} &= -\frac{1}{3}v_n+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\alpha}\end{aligned}$$

On veut donc que : $\quad \frac{1}{3}-\frac{4}{3}\alpha=0 \iff \frac{1}{3}=\frac{4}{3}\alpha \iff \alpha=\frac{1}{4}.$

Avec cette valeur de α, la suite (v_n) est géométrique, de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0=P(X_0=1)-\alpha=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, de sorte que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n=\frac{3}{4}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n \iff P(X_n=1)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n$$

4. a) Soit $n\geqslant 2$: d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $\big([X_n=1],[X_n=2],[X_n=3],[X_n=4]\big)$, tous de probabilités non nulles :

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=2) &= P(X_n=1).P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=2)+P(X_n=2).P_{[X_n=2]}(X_{n+1}=2)\\ &\qquad + P(X_n=3).P_{[X_n=3]}(X_{n+1}=2)+P(X_n=4).P_{[X_n=4]}(X_{n+1}=2)\\ &= \frac{1}{3}\big(P(X_n=1)+P(X_n=3)+P(X_n=4)\big)\end{aligned}$$

Et à nouveau, on vérifie que la relation est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$:

Pour $n = 0$: $P(X_1 = 2) = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{3}\big(P(X_0 = 1) + P(X_0 = 3) + P(X_0 = 4)\big) = \dfrac{1}{3}(1 + 0 + 0) = \dfrac{1}{3}$, donc la relation précédente est aussi vraie quand $n = 0$.

Pour $n = 1$: $P(X_2 = 2) = \dfrac{2}{9}$ et $\dfrac{1}{3}\big(P(X_1 = 1) + P(X_1 = 3) + P(X_1 = 4)\big) = \dfrac{1}{3}(0 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}) = \dfrac{2}{9}$, donc la relation est encore vraie quand $n = 1$.

Finalement, la formule obtenue ci-dessus est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Toujours d'après la relation : $P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$, la relation précédente s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}\big(1 - P(X_n = 2)\big) = -\frac{1}{3}P(X_n = 2) + \frac{1}{3}$$

c) On retrouve encore une suite arithmético-géométrique qui vérifie d'ailleurs la même relation de récurrence que la suite $\big(P(X_n = 1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

La suite auxiliaire est donc définie de la même façon : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = P(X_n = 2) - \alpha$ est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$ si et seulement si $\alpha = \dfrac{1}{4}$. Le premier terme est cette fois, par contre, $v_0 = P(X_0 = 2) - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = 2) = v_n + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n$$

5. L'énoncé admet que pour tout entier naturel n :

$$P(X_{n+1} = 3) = -\frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(X_{n+1} = 4) = -\frac{1}{3}P(X_n = 4) + \frac{1}{3}$$

ce qui signifie que les suites $\big(P(X_n = 3)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(P(X_n = 4)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence que $\big(P(X_n = 2)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, et on le même terme initial $P(X_0 = 3) = P(X_0 = 4) = P(X_0 = 2) = 0$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n$$

6. La variable aléatoire X_n est finie, donc admet une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned} E(X_n) &= 1.P(X_n = 1) + 2.P(X_n = 2) + 3.P(X_n = 3) + 4.P(X_n = 4) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n + (2+3+4).\Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\Big) \\ &= \frac{10}{4} + (\frac{3}{4} - \frac{9}{4}).\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n \boxed{= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n} \end{aligned}$$

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice-ligne de $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$:

$$U_n = \big(P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3) \quad P(X_n = 4)\big)$$

7. a) La relation obtenue à la question 3.a) peut se réécrire matriciellement, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}\big(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\big)$$

$$= \begin{pmatrix} P(X_n=1) & P(X_n=2) & P(X_n=3) & P(X_n=4) \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}.\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} = U_n \times \frac{1}{3}.\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Et de même, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$P(X_{n+1}=2) = U_n \times \frac{1}{3}.\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, $P(X_{n+1}=3) = U_n \times \frac{1}{3}.\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, $P(X_{n+1}=4) = U_n \times \frac{1}{3}.\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, et

donc en juxtaposant les quatre éléments de la loi de X_{n+1} dans la même matrice ligne, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = U_n \times \underbrace{\frac{1}{3}.\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}}_{=A} = U_nA$$

b) Montrons alors par récurrence que la propriété : "$U_n = U_0A^n$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 0$, $u_0A^0 = U_0 \times I_4 = U_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons sous cette hypothèse que $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie, soit $U_{n+1} = U_0A^{n+1}$:

On sait que : $\quad U_{n+1} \overset{7.a)}{=} U_nA \overset{H.R.}{=} U_0A^n \times A = U_0A^{n+1}$,

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

c) En remarquant que $U_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, le produit U_0A^n correspond à la première ligne de A_n, qui n'est donc autre que U_n, soit :

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^n \quad * \quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n \quad * \quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n \quad * \quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n\right)$$

(on a rajouté des $*$ pour bien séparer les colonnes).

8. Si le mobile commence sur le somet 2, on assiste à une permutation circulaire des probabilités : le calcul de $P(X_n = 1)$ devient celui de $P(X_n = 2)$, qui est entretemps devenu celui de $P(X_n = 3)$, etc...

Et dans ce cas, la deuxième ligne de A^n correspond bien au produit de celle-ci à gauche par $U_0 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, de sorte que la deuxième ligne de A^n est :

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n \quad * \quad \frac{1}{4}+\frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^n \quad * \quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n \quad * \quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n\right)$$

et toujours selon le même principe, les deux dernières lignes de A^n sont successivement :

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n \quad * \quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n \quad * \quad \frac{1}{4}+\frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^n \quad * \quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n\right)$$

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n \quad * \quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n \quad * \quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n \quad * \quad \frac{1}{4}+\frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^n\right)$$

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A.

On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; I désigne la matrice identité d'ordre 4.

10. Il est évident que : $A = \frac{1}{3}.(I - J)$.

11. a) Le calcul classique avec la matrice J fait apparaître la relation : $J^2 = 4.J$, dont on déduit la conjecture pour la formule générale des puissances de J : $J^k = 4^{k-1}.J$. Appelons $\mathcal{P}(k)$ cette égalité, et montrons par récurrence que cette relation est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $k = 1$: $4^{1-1}.J = 4^0.J = J$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, et sous cette hypothèse, montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, soit : $J^{k+1} = 4^k.J$.

Il suffit d'écrire : $J^{k+1} = J^k \times J \overset{H.R.}{=} 4^{k-1}.J \times J = 4^{k-1}.J^2 = 4^{k-1}.4.J = 4^k.J$, et $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(k)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

b) Il s'agit ici d'un grand classique de calcul de puissance de matrice via la formule du binôme de Newton, version matricielle.

On calcule en effet A^n sous la forme $\left(\frac{1}{3}.(J - I)\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n.(J - I)^n$.

Ne surtout pas oublier de vérifier explicitement que les deux matrices concernées commutent, même si c'est évident comme ici : $J \times I = J = I \times J$.

On peut donc écrire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(J - I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k.(-I)^{n-k} = \binom{n}{0}.J^0(-I)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} J^k.(-1)^{n-k}.I$$

$$= (-1)^n.I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.4^{k-1}.J.(-1)^{n-k}.I = (-1)^n.I + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k(-1)^{n-k}.J$$

$$= (-1)^n.I + \frac{1}{4}.\left((4-1)^n - \binom{n}{0}4^0.(-1)^n\right).J = (-1)^n.I + \frac{1}{4}.\left(3^n - (-1)^n\right).J$$

De sorte que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \frac{1}{3^n}.(J - I)^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n.I + \left(\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right).J$

qui va bien redonner la matrice A^n obtenue aux questions précédentes.

c) Lorsque $n = 0$, le membre de droite de la formule devient :

$(-1)^0.I + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}.(-\frac{1}{3})^0).J = I - 0.J = I = A^0$, donc la formule générale reste bien vraie lorsque $n = 0$.

Partie 4 : informatique

11. a) Dans le script ci-dessous, on complète la première ligne qui définit la matrice A utilisée dans cette chaîne de Markov. L'option `'markov'` de la fonction `grand` de `Scilab`, permet de simuler 100 déplacements du mobile, avec la matrice de transition A, en partant de l'état (du sommet) 1 (et c'est la taille de la matrice qui fixe le nombre total d'états (de sommets) possibles, ici 4).

Le résultat obtenu est une matrice ligne de 100 éléments qui ne contient que des valeurs entières entre 1 et 4, qui correspondent aux positions successives du mobile dans la simulation réalisée.

Il faut alors utiliser les outils de sélection permis par `Scilab` : la commande `-> x==1` par exemple, va rendre une matrice ligne de 100 booléens, où on obtient `T` comme True à chaque fois que l'élément correspondant de `x` vaut 1, à toute autre valeur, le booléen associé est `F` comme False.

Comme en informatique, `True` est naturellement associé au nombre 1 et `F` au nombre 0, la commande :

```
n = sum(x==1)
```

va bien servir à compter le nombre de fois où le mobile est passé par le sommet 1 au cours de 100 déplacements.

```
A = [0 1 1 1; 1 0 1 1; 1 1 0 1; 1 1 1 0]/3  // ou : A = (ones(4,4)-eye(4,4))/3
x = grand(100,'markov',A,1)
n = sum(x==1)
disp(x)
disp(n)
```

b) Les valeurs obtenues après avoir exécuté cinq fois le script, sont équilibrées et proches de 25 fois sur 100, ce qui est cohérent au regard du fait que les 4 probabilités de la loi sont assez vite toutes proches de $\frac{1}{4}$. Le fait qu'on n'obtienne pas exactement $n = 25$ vient naturellement de la fluctuation d'échantillonnage.