MATHÉMATIQUES - Edhec E 2016

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Les calculs matriciels donnent : $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ et $A^2 - 4A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

   Ainsi : $A^2 - 4A = -4I \iff A^2 - 4A + 4I = 0$, donc $P(X) = X^2 - 4X + 4$ est un polynôme annulateur de A.

2. a) On remarque que $P(X) = (X-2)^2$ admet pour seule racine le réel 2, qui est donc la seule valeur propre *possible* de A. Il reste à vérifier si 2 est effectivement valeur propre de A en calculant :
   $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, qui est bien non-inversible puisqu'elle a deux lignes égales.

   La matrice A admet donc 2 pour seule valeur propre, et il en est de même pour l'endomorphisme f.

   b) La détermination du spectre de A permet de répondre efficacement aux deux questions posées :
   - Si A était diagonalisable : elle serait semblable à une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont valeurs propres de A, donc tous égaux à 2. Bref, il existerait une matrice inversible P telle que : $A = P \times 2.I \times P^{-1} \iff A = 2PP^{-1} \iff A = 2I$, ce qui n'est évidemment pas le cas !

     Donc A n'est pas diagonalisable.
   - Le spectre de A ne contient pas le réel 0, ce qui suffit pour pouvoir affirmer que A est inversible.

3. On détermine le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 2 en résolvant le système : $AX = 2X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

   $$AX = 2X \iff (A-2I)X = 0 \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff x-y+z = 0 \iff x = y-z$$

   Le sous-espace propre cherché est donc : $E_2(f) = \{(y-z, y, z) |\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\big((1,1,0), (-1,0,1)\big)$.

   Comme les deux vecteurs qui engendrent $E_2(f)$ sont non-colinéaires, on peut en déduire qu'ils forment une base notée (u_1, u_2) de $E_2(f)$.

   Remarque : ce résultat redit que f n'est pas diagonalisable, puisque la dimension du seul sous-espace propre de f est alors : $\dim E_2(f) = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

4. a) On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3 = (1,1,1)$. La famille (u_1, u_2, u_3) comprend 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 : il suffit donc de prouver que cette famille est libre pour que ce soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Soient donc a, b, c trois réels tels que $a.u_1 + b.u_2 + c.u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, ce qui donne le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & - & b & + & c & = & 0 \\ a & & & + & c & = & 0 \\ & & b & + & c & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} a & - & b & + & c & = & 0 \\ & & b & & & = & 0 \; L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & b & + & c & = & 0 \end{array}\right. \iff b = 0 = c = a$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est bien libre, c'est effectivement une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Puisque les vecteurs u_1 et u_2 appartiennent au sous-espace propre $E_2(f)$, alors :
$f(u_1) = 2.u_1$ et $f(u_2) = 2.u_2$. Par ailleurs, par linéarité de f :
$f(u_3) = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = (3,2,1) + (-1,0,-1) + (1,2,3) = (3,4,3)$.
L'indication de l'énoncé incite à calculer :
$f(u_3) - 2u_3 = (1,2,1)$, puis $f(u_3) - 2u_3 - u_2 = (2,2,0) = 2.u_1$, donc : $f(u_3) = 2.u_1 + u_2 + 2.u_3$, et la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est bien triangulaire, avec des éléments diagonaux tous égaux à 2.

c) On peut effectivement écrire : $T = 2I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il s'agit d'une matrice strictement triangulaire, dont on vérifie sans peine qu'elle est *nilpotente* puisque $N^2 = 0_3$.

La suite est classique : puisque $T = N + 2I$, où $2I \times N = 2N = N \times 2I$, on peut calculer T^n grâce à la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \times (2I)^{n-k} \qquad \text{or : } \quad \forall k \geqslant 2, \; N^k = 0$$
$$= \binom{n}{0}.N^0 \times 2^n.I + \binom{n}{1}.N^1 \times 2^{n-1}.I = 2^n.I + n.2^{n-1}.N$$

5. a) La formule précédemment obtenue se réécrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T^n = 2^n.I + n.2^{n-1}.(T - 2I) = n.2^{n-1}.T + 2^n.I - n.2^n I = n.2^{n-1}.T - (n-1).2^n.I$$

Or les matrices A et T sont semblables, via la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et la récurrence habituelle, ou mieux : la formule de changement de base pour l'endomorphisme f^n, donne : $\forall n \in \mathbb{N}, \; T^n = P^{-1} A^n P \iff A^n = P T^n P^{-1}$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; A^n = P(n.2^{n-1}.A - (n-1).2^n.I)P^{-1} = n.2^{n-1}.PAP^{-1} - (n-1).2^n.PP^{-1} = n.2^{n-1}.A - (n-1).2^n.I$$

b) La relation : $A^2 - 4A = -4I$ se réécrit aussi : $-\dfrac{1}{4}(A - 4I)A = I \iff (-\dfrac{1}{4}A + I)A = I$,

relation qui prouve que A est inversible, d'inverse : $A^{-1} = -\dfrac{1}{4}A + I = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$.

c) Lorsque $n=-1$: $\quad n.2^{n-1}.A-(n-1).2^n.I=-2^{-2}.A-(-2).\dfrac{1}{2}.I=-\dfrac{1}{4}A+I=A^{-1}$
d'après le résultat obtenu à la question précédente : la formule est donc aussi valable pour $n=-1$.

Exercice 2

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par : $\quad \forall x\in[n;+\infty[,\ f_n(x)=\displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$

1. **Étude de f_n.**

   a) La fonction $t\mapsto e^{\sqrt{t}}$ étant continue sur $[n;+\infty[$ (comme composée de $t\mapsto\sqrt{t}$ continue sur $\mathbb{R}_+$, et de exp continue sur $\mathbb{R}$), elle admet des primitives sur cet intervalle.
   La fonction f_n est, en fait, la primitive qui s'annule en n, et à ce titre elle est bien de classe C^1 sur $[n,+\infty[$, avec :
   $$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f_n'(x)=e^{\sqrt{x}}.$$
   Il est alors évident que : $\forall x\in[n;+\infty[,\ f_n'(x)>0$ et donc que la fonction f_n est strictement croissante sur $[n;+\infty[$.

   b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $x\in[n,+\infty[$ et pour tout $t\in[n,x]$: $\sqrt{t}\geqslant\sqrt{n}\Longrightarrow e^{\sqrt{t}}\geqslant e^{\sqrt{n}}$ par stricte croissance de $t\mapsto\sqrt{t}$ et de exp sur $\mathbb{R}_+$.
   Les fonctions concernées sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et $x\geqslant n$, donc par croissance de l'intégrale :
   $$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[n;+\infty[,\quad \int_n^x e^{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\geqslant\int_n^x e^{\sqrt{n}}\mathrm{d}t\iff f_n(x)\geqslant(x-n).e^{\sqrt{n}}$$
   Comme $e^{\sqrt{n}}>0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x-n)e^{\sqrt{n}}=+\infty$, donc par comparaison : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=+\infty$.

   c) Soit $n\in\mathbb{N}$; sur l'intervalle $[n,+\infty[$, la fonction f_n est :
   - continue car de classe C^1 (d'après 1.a))
   - strictement croissante (d'après 1.a))
   - à valeurs dans $[f_n(n);\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f_n(x)[=[0;+\infty[$ qui contient bien 1.

   Donc d'après le théorème de la bijection, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe bien un unique réel $u_n\in[n;+\infty[$, tel que $f_n(u_n)=1$.

2. **Étude de la suite (u_n).**

   a) On sait que pour tout n, $u_n\in[n;+\infty[$, c'est-à-dire : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geqslant n$. Cette inégalité suffit pour conclure, d'après le théorème de comparaison, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

   b) Soit $n\in\mathbb{N}$; par définition de u_n : $\displaystyle\int_n^{u_n}e^{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=1$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, et pour tout $t\in[n;u_n]$:
   $$n\leqslant t\leqslant u_n\iff\sqrt{n}\leqslant\sqrt{t}\leqslant\sqrt{u_n}\iff e^{\sqrt{n}}\leqslant e^{\sqrt{t}}\leqslant e^{\sqrt{u_n}}.$$
   Les fonctions concernées sont continues sur $\mathbb{R}_+$, et $u_n\geqslant n$, donc par croissance de l'intégrale (ou l'inégalité de la moyenne) :
   $$\forall n\in\mathbb{N},\ (u_n-n).e^{\sqrt{n}}\leqslant\int_n^{u_n}e^{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\leqslant(u_n-n).e^{\sqrt{u_n}}$$
   La première inégalité se réécrit : $\forall n\in\mathbb{N},\ (u_n-n).e^{\sqrt{n}}\leqslant1\iff u_n-n\leqslant e^{-\sqrt{n}}$ en divisant les deux membres par $e^{\sqrt{n}}>0$.
   De même pour la deuxième : $\forall n\in\mathbb{N},\ 1\leqslant(u_n-n).e^{\sqrt{u_n}}\iff e^{-\sqrt{u_n}}\leqslant u_n-n$, ce qui donne bien l'encadrement voulu.

3. a) On sait que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - n \leqslant e^{\sqrt{n}}$, donc pour que $u_n - n \leqslant 10^{-4}$ soit vrai, il suffit que $e^{-\sqrt{n}}$ le soit. Tant que ce n'est pas le cas, il faut passer à l'entier suivant, tout simplement :

```
n = 0
while exp(-sqrt(n))>1e-4
    n = n+1
end
disp(n)
```

b) Le script ci-dessus affiche la valeur $n = 85$; on peut le justifier en résolvant explicitement l'inéquation :

$$e^{-\sqrt{n}} \geqslant 10^{-4} \iff -\sqrt{n} \geqslant -4\ln(10) \iff \sqrt{n} \leqslant 4\ln(10) \iff n \leqslant 16.\ln(10)^2$$

par stricte croissance de ln et de la fonction carrée sur $]0;+\infty[$.

En prenant 2.3 comme valeur approchée de ln(10), on obtient : $16\ln(10)^2 =\approx 16 \times 5.69 = 84.64$. Le premier entier qui dépasse cette valeur est bien $n = 85$.

4. **On pose $v_n = u_n - n$.**

a) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{u_n} = -\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{n}} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{u_n}}$.

L'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N},\ e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$ obtenu en 2.b) et le théorème du même nom, assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

b) Pour tout $x \geqslant -1$: $x + 1 \geqslant 0$, donc l'inégalité : $\sqrt{x+1} \leqslant 1 + \dfrac{x}{2}$ est équivalente à : $1 + x \leqslant \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^2$ par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$. Or :

$$\forall x \geqslant -1, \quad \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{4} \geqslant 1 + x$$

D'où le résultat voulu, par équivalence.

c) Il faut faire plusieurs essais au brouillon pour voir qu'en appliquant le résultat précédent avec $x = \dfrac{u_n}{n} - 1 = \dfrac{v_n}{n} \geqslant 0$ (puisque $u_n \geqslant n$), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{\frac{u_n}{n}} \leqslant 1 + \frac{v_n}{2n} \iff \sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{n} + \frac{v_n}{2\sqrt{n}} \iff -\sqrt{u_n} \geqslant -\sqrt{n} - \frac{v_n}{2\sqrt{n}}$$

Ce qui donne bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{-\sqrt{u_n}} \geqslant e^{-\sqrt{n}}.\exp\left(-\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$ par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$.

d) Du résultat précédent et de la question 2.b), on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{-\sqrt{n}}.\exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leqslant v_n \leqslant e^{-\sqrt{n}} \iff \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{v_n}{e^{-\sqrt{n}}} \leqslant 1$$

où : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ (d'après 4.a)), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(-\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) = e^0 = 1$.

Le théorème d'encadrement permet bien de conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{e^{-\sqrt{n}}} = 1 \iff u_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$$

Exercice 3

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On désigne par p un réel de $]0;1[$.
On considère deux variables indépendantes U et V, telles que U suit la loi uniforme sur $[-3,1]$, et V suit la loi uniforme sur $[-1,3]$.
On considère également une variable aléatoire Z, indépendante de U et V, dont la loi est donnée par :

$$P(Z=1)=p \quad \text{et} \quad P(Z=-1)=1-p$$

Enfin, on note X la variable aléatoire, définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega)=\begin{cases} U(\omega) & \text{si } Z(\omega)=1 \\ V(\omega) & \text{si } Z(\omega)=-1 \end{cases}$$

On note F_X, F_U et F_V les fonctions de répartition respectives des variables X, U et V.

1. C'est une question de cours : si a et b sont deux réels tels que $a<b$, la fonction de répartition F d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme à densité sur $[a,b]$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ 1 & \text{si } x>b \end{cases}$$

Ici donc, les fonctions de répartitions de U et V sont définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_U(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<-3 \\ \dfrac{x+3}{4} & \text{si } -3 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_V(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<-1 \\ \dfrac{x+1}{4} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 1 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

2. a) Au vu de la définition de la variable aléatoire X, et selon la formule des probabilités totales, appliquée au calcul de $P(X \leqslant x)$ pour x réel quelconque, avec le système complet d'événements $\big([Z=1],[Z=-1]\big)$:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x)=P(X \leqslant x) &= P\big([Z=1]\cap[X \leqslant x]\big)+P\big([Z=-1]\cap[X \leqslant x]\big) \\ &= P\big([Z=1]\cap[U \leqslant x]\big)+P\big([Z=-1]\cap[V \leqslant x]\big) \\ &= P(Z=1)\times P(U \leqslant x)+P(Z=-1)\times P(V \leqslant x) \\ &\quad \text{car } Z \text{ est indépendante de } U \text{ et } V \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x)=pF_U(x)+(1-p)F_V(x)$$

b) Pour tout $\omega \in \Omega$: $X(\omega)$ est soit égal à $U(\omega)$ qui appartient (presque-sûrement) à $[-3;1]$, soit égal à $V(\omega)$ qui appartient (presque-sûrement) à $[-1;3]$, donc dans tous les cas, $X(\omega)$ appartient (presque-sûrement) à $[-3;3]$.

On distingue 5 cas pour le calcul de $F_X(x)$:

- Si $x<-3$: alors $F_U(x)=0=F_V(x)$, et $F_X(x)=0$
- Si $-3 \leqslant x \leqslant -1$: $F_V(x)=0$ et $F_X(x)=pF_U(x)=p\dfrac{x+3}{4}$
- Si $-1 \leqslant x \leqslant 1$: alors $F_X(x)=p.\dfrac{x+3}{4}+(1-p)\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{px+3p+x+1-px-p}{4}$,

  soit : $F_X(x)=\dfrac{x+1+2p}{4}$

- Si $1 \leqslant x \leqslant 3$: alors $F_U(x) = 1$ et $F_X(x) = p + (1-p)\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{(1-p)x + 3p + 1}{4}$
- Si $x > 3$: alors $F_U(x) = 1 = F_V(x)$, et $F_X(x) = p + (1-p) = 1$.

Remarque : le fait que sur $[-3;3]$, la fonction de répartition F_X soit strictement croissante (par morceaux) est l'argument qui prouve que $X(\Omega)$ est bien égal à $[-3;3]$ (et pas seulement inclus dans cet ensemble).

c) L'énoncé admet ici que X est une variable à densité, ce qui nous dispense de la tâche, peu difficile mais fastidieuse, consistant à vérifier que F_X est continue sur tout $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en -3,-1,1 et 3.

Une densité f_X de la variable aléatoire X est alors obtenue par dérivation de F_X sauf en ces quatre points :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3,-1,1,3\}, \quad f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \dfrac{p}{4} & \text{si } -3 < x < -1 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } -1 < x < 1 \\ \dfrac{1-p}{4} & \text{si } 1 < x < 3 \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Au quatre points restants, on fixe une valeur arbitraire, positive, pour chaque image par f_X.

Par exemple : $f_X(-3) = \dfrac{p}{4}$, $f_X(-1) = \dfrac{1}{4}$, $f_X(1) = \dfrac{1-p}{4}$ et $f_X(3) = 0$, et ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \dfrac{p}{4} & \text{si } -3 \leqslant x < -1 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } -1 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{1-p}{4} & \text{si } 1 \leqslant x < 3 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

d) La fonction $t \mapsto t.f_X(t)$ est, comme f_X, nulle en-dehors de $[-3;3]$, et continue par morceaux sur $[-3,3]$ (elle admet notamment des limites finies à gauche et à droite en tout point de $[-3;3]$) ; il est donc certain que X admet une espérance et une variance.

Calcul de l'espérance $E(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t.f_X(t)\mathrm{d}t = \int_{-3}^{1} t.\frac{p}{4}\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} \frac{t}{4}\mathrm{d}t + \int_{1}^{3} t\frac{1-p}{4}\mathrm{d}t \\ &= \frac{p}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-3}^{-1} + \frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \frac{1-p}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{1}^{3} \\ &= \frac{p\big((-1)^2 - (-3)^2\big)}{8} + \frac{1^2 - (-1)^2}{8} + \frac{(1-p)\big(3^2 - 1^2\big)}{8} \\ &= -p + 0 + 1 - p = 1 - 2p \end{aligned}$$

Calcul du moment d'ordre 2 :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2.f_X(t)\mathrm{d}t = \int_{-3}^{1} t^2.\frac{p}{4}\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{4}\mathrm{d}t + \int_{1}^{3} t^2\frac{1-p}{4}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{p}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-3}^{-1} + \frac{1}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \frac{1-p}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{1}^{3}$$

$$= \frac{p\big((-1)^3-(-3)^3\big)}{12} + \frac{1^3-(-1)^3}{12} + \frac{(1-p)\big(3^3-1^3\big)}{12}$$

$$= \frac{26p}{12} + \frac{2}{12} + \frac{26(1-p)}{12} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$$

Calcul de la variance de X : d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7}{3} - (1-2p)^2 = \frac{4+12p-12p^2}{3}$$

3. On se propose montrer d'une autre façon que X possède une espérance et un moment d'ordre 2, puis de les déterminer.

   a) Pour (presque-)tout $\omega \in \Omega$:

   - Soit $Z(\omega) = 1$, dans ce cas $U(\omega)\frac{1+Z(\omega)}{2} + V(\omega)\frac{1-Z(\omega)}{2} = U(\omega).\frac{2}{2} + V(\omega).0 = U(\omega) = X(\omega)$
   - Soit $Z(\omega) = -1$, et $U(\omega)\frac{1+Z(\omega)}{2} + V(\omega)\frac{1-Z(\omega)}{2} = U(\omega).0 + V(\omega).\frac{2}{2} = V(\omega) = X(\omega)$

   On a ainsi démontré, en examinant tous les cas, l'égalité de variables aléatoires :

$$X = U\frac{1+Z}{2} + V\frac{1-Z}{2}.$$

   b) Les trois variables Z, U, V admettent toutes les trois une espérance, valant respectivement :

$$E(Z) = -1.P(Z=-1) + 1.P(Z=1) = -(1-p)+p = 2p-1,\ E(U) = \frac{-3+1}{2} = -1,\ E(V) = \frac{-1+3}{2} = 1$$

   Les variables U et Z étant indépendantes, il en est de même de U et de $\frac{1+Z}{2}$ (lemme des coalitions). De même, V et $\frac{1-Z}{2}$ sont indépendantes puisque V et Z le sont.

   Ces propriétés, ainsi que la linéarité de l'espérance, assurent que X admet une espérance, qui vaut :

$$E(X) = E(U) \times E\Big(\frac{1+Z}{2}\Big) + E(V) \times E\Big(\frac{1-Z}{2}\Big)$$

$$= -\frac{1+E(Z)}{2} + \frac{1-E(Z)}{2} = -E(Z) = 1-2p$$

   ce qui est bien la valeur obtenue précédemment.

   c) L'égalité obtenue en a) donne :

$$X^2 = \Big(U\frac{1+Z}{2} + V\frac{1-Z}{2}\Big)^2 = U^2\frac{(1+Z)^2}{4} + 2UV\frac{(1+Z)(1-Z)}{4} + V^2\frac{(1-Z)^2}{4}$$

   où : $(1+Z)(1-Z) = 1-Z^2 = 0$; la variable aléatoire Z ne prenant que les valeurs -1 et 1, Z^2 est constante égale à 1 !

   De même : $(1+Z)^2 = 1+2Z+Z^2 = 2Z+2$ et $(1-Z)^2 = 1-2Z+Z^2 = 2-2Z$ (on aura utilisé ici les trois identités remarquables !)

   Il reste donc : $X^2 = U^2\frac{1+Z}{2} + V^2\frac{1-Z}{2}$. Comme précédemment, U^2 et $\frac{1+Z}{2}$ sont indépendantes, de même que V^2 et $\frac{1-Z}{2}$, donc X^2 admet une espérance qui vaut :

$$E(X^2) = E(U^2)\frac{1+E(Z)}{2} + E(V^2)\frac{1-E(Z)}{2}$$

$$= \left(V(U) + E(U)^2\right)\frac{2p}{2} + \left(V(V) + E(V)^2\right)\frac{2-2p}{2}$$
$$= \left(\frac{(1-(-3))^2}{12} + (-1)^2\right)p + \left(\frac{(3-(-1))^2}{12} + 1^2\right)(1-p)$$
$$= \frac{7}{3}p + \frac{7}{3}(1-p) = \frac{7}{3}$$

On retrouve également le même moment d'ordre 2, et donc la même variance pour X.

4. a) Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. La variable aéatoire $2T-1$ a pour univers-image $\{2\times 0-1; 2\times 1-1\} = \{-1;1\}$, et sa loi est donnée par :

$$P(2T-1=-1) = P(T=0) = p \quad \text{et} \quad P(2T-1=1) = P(T=1) = 1-p$$

C'est-à-dire que $2T-1$ suit la même loi que Z, ce qui fournit un moyen de simuler Z puisqu'on sait simuler T.

b) D'après ce qui précède, les simulations demandées sont obtenues par le script `Scilab` suivant :

```
p = input('Donner la valeur de p (0<p<1) : ')
U = grand(1,1,'unf',-3,1)
V = grand(1,1,'unf',-1,3)
T = grand(1,1,'bin',1,p)
Z = 2*T-1
X = U*(1+Z)/2 + V*(1-Z)/2  // ou d'ailleurs :  X = U*T + V*(1-T)
```

PROBLÈME

Partie 1 : questions préliminaires.

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $[0,1[$.

1. a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,x]$:

$$\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} \overset{[k=p-1]}{=} \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$$

on a reconnu une somme géométrique, de raison $t \neq 1$ puisque $t \leqslant x < 1$.

b) Les fonctions impliquées dans la relation précédente étant continues sur $[0,1[$, on peut écrire :

$$\int_0^x \sum_{p=1}^{n} t^{p-1}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\mathrm{d}t \iff \sum_{p=1}^{n}\int_0^x t^{p-1}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$$
$$\iff \sum_{p=1}^{n}\left[\frac{t^p}{p}\right]_0^x = \big[-\ln(1-t)\big]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$$
$$\iff \sum_{p=1}^{n}\frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \qquad CQFD$$

c) Une question très classique (déjà posée en 2015 par l'Edhec !) à savoir rédiger seul et sans indication :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1[,\ \forall t \in [0,x] : \quad 1-t \geqslant 1-x > 0 \text{ donc } 0 \leqslant \frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{t^n}{1-x}$$

Les fonctions concernées sont continues et positives sur $[0,x]$, et $0 \leqslant x$, donc par croissance et positivité de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1[,\quad 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n \mathrm{d}t \iff 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1-x} \times \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Comme $x \in [0,1[$: $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1-x} \times \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0$, et par encadrement :

$$\forall x \in [0,1[,\quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t = 0$$

d) Au vu du résultat précédent, on peut donc passer à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans l'égalité obtenue en 1.b) : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t = -\ln(1-x)$, ce qui signifie bien que la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ est convergente, de somme totale :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

2. Soit m un entier naturel fixé. Il y a deux façons différentes de démontrer la formule sommatoire demandée : on donne les deux rédactions, au lecteur de choisir celle qui lui apparaît la plus claire !

$\star$ On peut très bien raisonner par récurrence sur q, en posant $\mathcal{P}(q)$: " $\sum\limits_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$".

Montrons que $\mathcal{P}(q)$ est vraie <u>pour tout $q \geqslant m$</u> :

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $q = m$ donc : $\sum\limits_{k=m}^{m} \binom{k}{m} = \binom{m}{m} = 1 = \binom{m+1}{m+1}$, donc $\mathcal{P}(m)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(m)$ vraie pour un certain $q \geqslant m$, et sous cette hypothèse, montrons que $\mathcal{P}(q+1)$ est encore vraie :

$\sum\limits_{k=m}^{q+1} \binom{k}{m} = \sum\limits_{k=m}^{q} \binom{k}{m} + \binom{q+1}{m} \overset{H.R.}{=} \binom{q+1}{m+1} + \binom{q+1}{m} = \binom{q+2}{m+1}$ d'après la formule de Pascal, ce qui est bien le résultat attendu au rang $q+1$: $\quad \mathcal{P}(q+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(q)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $q \geqslant m$, d'après le principe de récurrence.

$\star$ On peut aussi utiliser la formule de Pascal pour faire apparaître un télescopage dans la somme en écrivant : $\quad \forall q \geqslant m,\ \binom{k}{m} = \binom{k+1}{m+1} - \binom{k}{m+1}$, donc :

$$\sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{q} \binom{k+1}{m+1} - \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m+1} = \sum_{j=m+1}^{q+1} \binom{j}{m+1} - \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m+1} = \binom{q+1}{m+1} - \underbrace{\binom{m}{m+1}}_{=0\ (m+1>m)}$$

3. Soit n un entier naturel non nul. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre x, et on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

a) La variable S_n est la somme de n variables toutes d'univers-image $\mathbb{N}^*$,
donc $S_n(\Omega) = [\![n; +\infty[\![= \{k \in \mathbb{N} |\ k \geqslant n\}$.
Puisque $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, alors pour tout entier $k \geqslant n+1$:

$$(S_{n+1} = k) = \bigcup_{\substack{(i,j)\in X_{n+1}(\Omega)\times S_n(\Omega)\\ \text{tq } i+j=k}} (S_n = j) \cap (X_{n+1} = i) = \bigcup_{j=n}^{k-1} (S_n = j) \cap (X_{n+1} = k-j).$$

C'est une réunion d'événements disjoints deux à deux, donc :

$$\forall k \geqslant n+1, \quad P(S_{n+1} = k) = \sum_{j=n}^{k-1} P((S_n = j) \cap (X_{n+1} = k-j))$$

b) On définit la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$\forall k \in [\![n, +\infty[\![,\ P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n}$". Montrons par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 1$: $S_1 = X_1$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X_1 = k) = (1-x)^{k-1}x$,
tandis que $\binom{k-1}{1-1} x^1 (1-x)^{k-1} = (1-x)^{k-1}x$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, et sous cette hypothèse, démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie :

On sait déjà que : $\quad \forall k \geqslant n+1,\ P(S_{n+1} = k) = \sum_{j=n}^{k-1} P((S_n = j) \cap (X_{n+1} = k-j))$. Or :

on sait que les variables X_k sont mutuellement indépendantes, donc d'après le lemme des coalitions : X_{n+1} et $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ sont deux variables aléatoires indépendantes. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![n+1, +\infty[\![,\ P(S_{n+1} = k) &= \sum_{j=n}^{k-1} P(S_n = j) \times P(X_{n+1} = k-j) \\
&= \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} x^n (1-x)^{j-n} \times (1-x)^{k-j-1} x \quad \text{(H.R.)} \\
&= \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} x^{n+1} (1-x)^{k-n-1} \\
&= x^{n+1} (1-x)^{k-n-1} \sum_{i=n-1}^{k-2} \binom{i}{n-1} \\
P(S_{n+1} = k) &= \binom{k}{n} x^{n+1} (1-x)^{k-(n+1)} \qquad \text{d'après 2. avec } m = n-1 \text{ et } q = k-2
\end{aligned}$$

Ce qui est bien la formule attendue au rang $n+1$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

c) Puisque la formule précédente définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de la variable aléatoire S_n à valeurs dans $[\![n, +\infty[\![$, alors :

$$\forall x \in]0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n}^{+\infty} P(S_n = k) = 1 \iff \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n} = 1 \iff \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}$$

d) L'énoncé a la gentillesse de nous rappeler comment on simule en `Scilab`, un échantillon de n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p : il suffit d'en faire la somme pour simuler la variable aléatoire $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$... !

```
n = input('entrez une valeur de n supérieure à 1 : ')
S = sum(grand(1,n,'geom',p))
disp(S)
```

Partie 2 : étude d'une variable aléatoire.

Dans cette partie, on désigne par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1-p$.

On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = -\dfrac{q^k}{k\ln(p)}$.

1. a) Comme ici, $p \in]0,1[$, alors $\ln(p) < 0$, et $q = 1-p$ appartient aussi à $]0,1[$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ q^k > 0$. On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{q^k}{k\ln(p)}$ est strictement négatif, et que $u_k = -\dfrac{q^k}{k\ln(p)}$ est bien, quant à lui, toujours positif.

   b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\quad u_k = -\dfrac{1}{\ln(p)} \times \dfrac{q^k}{k}$ est, à un facteur constant près, le terme général d'une série identique à celle étudiée à la question 1. de la partie I, puisque $q \in]0,1[$.
   Le résultat de 1.d) s'applique donc, qui donne :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k} = -\frac{1}{\ln(p)} \times \big(-\ln(1-q)\big) = -\frac{1}{\ln(p)} \times \big(-\ln(p)\big) = 1$$

   puisque $q = 1-p \iff p = 1-q$.

   La suite réelle $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définit donc bien la loi d'une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, de sorte que : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=k) = u_k$.

2. a) La variable aléatoire discrète X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 1} kP(X=k)$ est absolument convergente. Comme $k \in \mathbb{N}^*$ et $P(X=k)$ est positif comme probabilité, cela revient à étudier la convergence simple de la série de terme général : $\quad k \times u_k = -\dfrac{1}{\ln(p)} \times q^k$.

   On reconnaît, à un facteur positif constant près, une série géométrique de raison $q \in]0,1[$, donc convergente : X admet donc une espérance, qui vaut :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \times u_k = -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} q^k = -\frac{1}{\ln(p)} \times \frac{q}{1-q} = -\frac{q}{p\ln(p)}$$

   b) La variable aléatoire X admet, d'après le théorème de transfert, un moment d'ordre 2 si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 1} k^2.P(X=k)$ est (absolument) convergente. Or :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2.P(X=k) = -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{n} kq^k = -\frac{q}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{n} k.q^{k-1}$$

   On reconnaît une série géométrique dérivée, de raison $q \in]0,1[$ donc convergente : la variable aléatoire X admet donc un moment d'ordre 2, qui vaut :

$$E(X^2) = -\frac{q}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = -\frac{q}{\ln(p)} \times \frac{1}{(1-q)^2} = -\frac{q}{p^2\ln(p)}$$

La variable aléatoire X admet donc une variance, donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = -\frac{q}{p^2\ln(p)} - \frac{q^2}{p^2(\ln(p))^2} = \frac{-q\ln(p) - q^2}{p^2(\ln(p))^2} = \frac{-q(q+\ln(p))}{\big(p\ln(p)\big)^2}, \qquad CQFD$$

3. Soit k un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire Y dont la loi, conditionnellement à l'événement $(X = k)$, est la loi binomiale de paramètre p et k.

   Autrement dit :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad P_{[X=k]}(Y = j) = \begin{cases} \dbinom{k}{j} p^j q^{k-j} & \text{si } 0 \leqslant j \leqslant k \\ 0 & \text{si } j > k \end{cases}$$

   a) Puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, le nombre de lancers effectués peut prendre n'importe quelle valeur entière non nulle. Il est ainsi possible de n'avoir aucun pile (même avec plusieurs lancers), ou d'en obtenir un nombre quelconque, et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

   Ainsi pour calculer $P(Y = 0)$, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\big([X = k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ pour écrire :

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \times P_{[X=k]}(Y = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \times q^k \\ &= -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^{2k}}{k} = -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(q^2)^k}{k} \\ &= -\frac{1}{\ln(p)} \times \left[-\ln(1 - q^2)\right] = \frac{\ln\big((1-q)(1+q)\big)}{\ln(p)} \\ P(Y = 0) &= \frac{\ln(p) + \ln(1+q)}{\ln(p)} = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)} \qquad CQFD \end{aligned}$$

   b) Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\binom{k}{n}}{k} = \frac{1}{k} \times \frac{k!}{n!(k-n)!} = \frac{(k-1)!}{n \times (n-1)!(k-n)!} = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{n} \quad \text{puisque } (n-k)! = \big((k-1)-(n-1)\big)!$$

   On utilise alors à nouveau la formule des probabilités totales avec le même s.c.e. que précédemment, pour écrire :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \times P_{[X=k]}(Y = n) \qquad \text{or } P_{[X=k]}(Y = n) = 0 \text{ si } k < n \\ &= -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{q^k}{k} \times \binom{k}{n} p^n q^{k-n} \\ &= -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=n}^{+\infty} p^n q^{2k-n} \frac{\binom{k}{n}}{k} = -\frac{p^n}{\ln(p)} \sum_{k=n}^{+\infty} q^{2k-2n} \times q^n \times \frac{\binom{k-1}{n-1}}{n} \\ &= -\frac{p^n q^n}{n\ln(p)} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (q^2)^{k-n} \qquad CQFD \end{aligned}$$

   Puisque $q^2 \in]0,1[$, le résultat de I.3.c) s'applique avec $1 - x = q^2 \iff x = 1 - q^2$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y = n) = -\frac{p^n q^n}{n\ln(p)} \times \frac{1}{(1-q^2)^n} = -\frac{p^n q^n}{n\ln(p)\big((1-q)(1+q)\big)^n} = -\frac{q^n}{n(1+q)^n\ln(p)}$$

c) On vérifie qu'on a bien défini la loi de la variable aléatoire Y en calculant :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k) &= P(Y=0) - \frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^n}{n(1+q)^n} \qquad \text{attention au terme particulier pour } k=0 \\
&= 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)} - \frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{q}{1+q}\right)^n}{n} \\
&= 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)} - \frac{1}{\ln(p)} \times \left[-\ln\left(1-\frac{q}{1+q}\right)\right] \qquad \text{d'après I.1. avec } x = \frac{q}{1+q} \in]0,1[\\
&= 1 - \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)} - \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k) = 1$$

d) La variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 0} kP(Y=k)$ est absolument convergente ; comme c'est une série à termes positifs et dont le premier terme est nul, cela revient à étudier la convergence simple :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} kP(Y=k) = -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{q^k}{k(1+q)^k} = -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{q}{1+q}\right)^k$$

On reconnaît une série géométrique de raison $\frac{q}{1+q} \in]0,1[$ (puisque $0 < q < 1+q$), donc convergente. Ainsi, Y admet une espérance qui vaut :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(Y=k) = -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{q}{1+q}\right)^k = -\frac{1}{\ln(p)} \times \frac{\frac{q}{1+q}}{1-\frac{q}{1+q}} = -\frac{1}{\ln(p)} \times \frac{q}{1+q} \times (1+q) = -\frac{q}{\ln(p)}$$

e) La variable aléatoire admet, d'après le théorème de transfert, un moment d'ordre 2 si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 1} k^2 P(Y=k)$ est absolument convergente. Or :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 P(Y=k) = -\frac{q}{\ln(p).(1+q)} \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1}$$

en reprenant une partie des calculs déjà faits pour l'étude de l'espérance. On reconnaît ici une série géométrique dérivée de raison $\frac{q}{1+q} \in]0,1[$, donc convergente. Ainsi, Y admet un moment d'ordre 2, qui vaut :

$$E(Y^2) = -\frac{q}{\ln(p).(1+q)} \times \frac{1}{(1-\frac{q}{1+q})^2} = -\frac{q(1+q)}{\ln(p)}$$

La variable aléatoire Y admet donc, pour finir, une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = -\frac{q(1+q)}{\ln(p)} - \frac{q^2}{(\ln(p))^2} = \frac{-q(1+q)\ln(p) - q^2}{(\ln(p))^2} = -\frac{q\big(q + (1+q)\ln(p)\big)}{(\ln(p))^2}$$