MATHÉMATIQUES - Edhec E 2013

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$.

1. a) On montre par récurrence que pour tout entier naturel n : $\underbrace{0 \leqslant u_n \leqslant 1}_{\mathcal{P}(n)}$.

$\boxed{\text{I.}}$ L'énoncé donne $u_0 = 0$ qui vérifie bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors la propriété est vraie au rang $n+1$:

On sait par hypothèse de récurrence que :

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant u_n \leqslant 1 \\ \iff\ & 0 \leqslant u_n^2 \leqslant 1 \text{ par croissance de la fonction carré sur } \mathbb{R}^+ \\ \iff\ & 1 \leqslant u_n^2+1 \leqslant 2 \\ \iff\ & \frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n^2+1}{2} \leqslant 1 \end{aligned}$$

ce qui donne bien : $0 < \dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^2+1}{2} - u_n = \dfrac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} = \dfrac{(u_n-1)^2}{2}$ d'après l'identité remarquable classique, ce qui permet directement d'affirmer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, et donc que la suite (u_n) est croissante.

c) D'après les deux questions précédentes : la suite (u_n) est croissante et majorée par 1, elle est donc convergente d'après le théorème de limite monotone, de limite $\ell \in [0,1]$.

Par passage à la limite dans la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\ell = \frac{\ell^2+1}{2} \iff 2\ell = \ell^2+1 \iff \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \iff (\ell-1)^2 = 0 \iff \ell - 1 = 0 \iff \boxed{\ell = 1}$$

.

2. a)
```
function y = suite(n)
    u=0
    for i=1:n
        u = (u^2+1)/2
    end
y=u
endfunction
```

b)
```
u = 0; n = 0;
while 1-u > 1e-3
    u = (u^2+1)/2
    n = n+1
end
disp(n)
```

3. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = 1 - u_n$.

a) Pour tout entier naturel k :

$$\begin{aligned} v_k - v_{k+1} = v_k - (1 - u_{k+1}) = v_k - 1 + \frac{u_k^2+1}{2} &= v_k - 1 + \frac{(1-v_k)^2+1}{2} \\ &= \frac{2v_k - 2 + 1 - 2v_k + v_k^2 + 1}{2} = \frac{v_k^2}{2} \end{aligned}$$

b) Le téléscopage classique donne :
$$\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} \overset{[j=k+1]}{=} \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{j=1}^{n} v_j = v_0 - v_n = (1-u_0) - (1-u_n) = u_n.$$

c) Il faut faire le lien entre les deux questions précédentes et voir que la somme précédente se réécrit aussi, d'après a) :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} v_k^2, \quad \text{donc : } \forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n-1} v_k^2 = 2u_{n+1}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell = 1$, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} v_k^2 = 2 \iff \sum_{k=0}^{+\infty} v_k^2 = 2$$

Exercice 2

1. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Le calcul matriciel donne : $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$, et $A^3 = 0$.

b) Un vecteur de $\mathbb{R}^3$ appartient au noyau de f si et seulement si la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ qui le représente dans $\mathcal{B}$ vérifie :

$$AX = 0 \iff \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ -y = 0 \quad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ y = 0 \quad L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}. \text{ Ainsi : } \mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z.\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

On a trouvé une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$, consituée d'un seul vecteur non nul : c'est aussi une famille libre, donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Puisque $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et par lecture de la matrice représentant f dans cette base :

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$; on a supprimé le troisième vecteur de la famille, car il est égal au premier... Les deux vecteurs restants forment encore une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, ils sont clairement non colinéaires donc forment une famille libre, et ainsi une base de l'image.

c) L'endomorphisme $f^2 = f \circ f$ étant représenté par A^2, on a par la même méthode que précédemment :

$\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Vect}(f^2(e_1), f^2(e_2), f^2(e_3)) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Ker}(f)$, car on ne change pas l'espace vectoriel engendré en multipliant le vecteur par -1.

Dans la suite, on considère un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que : $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$, ce qui signifie que $g \circ g$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $g \circ g \circ g$ est l'endomorphisme nul.
En désignant par M la matrice de g dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, on a donc :

$$M^2 \neq 0 \text{ et } M^3 = 0$$

2. a) La matrice M est *nilpotente*, la relation $M^3 = 0$ indique que $P(X) = X^3$ est un *polynôme annulateur* de M. Par conséquent, les valeurs propres *possibles* de M se trouvent *parmi* les racines de P. Comme P a évidemment pour seule racine 0 : 0 est bien la seule valeur propre possible de M.

b) Il s'agit donc de montrer ici que 0 est bien valeur propre de M, c'est-à-dire que M est non-inversible.

Dans ce cas d'étude très classique d'une matrice nilpotente, on suppose que M est inversible.
Dans ce cas, la relation : $M^3 = 0$ donne, par multiplication à gauche par l'inverse :

$M^{-1}M^3 = M^{-1}.0 \iff M^2 = 0$, ce qui est bien sûr absurde au vu de l'énoncé !

Donc : M n'est pas inversible, donc 0 est valeur propre de M et donc de g, et c'est la seule.

c) Encore un cas d'école : SI g était diagonalisable, sa matrice M serait *semblable* à une matrice diagonale D : il existerait une matrice inversible P telle que $M = PDP^{-1}$, où D a pour éléments diagonaux les valeurs propres de M : 0 étant la seule valeur propre, D a une diagonale de zéros, donc est en fait nulle.

Mais dans ce cas : $M = PDP^{-1} = P0P^{-1} = 0$: absurde ! (car dans ce cas $M^2 = 0^2 = 0$).
Conclusion : M et g ne sont pas diagonalisables.

3. a) Dire que g^2 n'est pas l'endomorphisme nul, comme le fait l'énoncé, c'est dire que $g \circ g$ n'attribue pas à tous les vecteurs de E, l'image unique 0 : il existe donc bien au moins un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$.

b) Montrons alors que la famille $\mathcal{B}' = (u, g(u), g^2(u))$, dite des *images itérées* de u, est une base de $\mathbb{R}^3$. C'est déjà une famille de **trois** vecteurs dans un espace de **dimension trois**, donc il suffit par exemple, de prouver qu'elle est libre.
Soient donc trois réels a, b, c tels que :

$$a.u + b.g(u) + c.g^2(u) = 0 \quad (1)$$

L'idée ici est d'utiliser la fait que $g^3 = 0$ est, lui, l'endomorphisme nul.
Lorsqu'on applique l'endomorphisme g, on obtient :

$$g(a.u + b.g(u) + c.g^2(u)) = g(0) \iff a.g(u) + b.g^2(u) + \cancel{c.g^3(u)} = 0 \quad (2)$$

(par linéarité de g notamment). Si on applique une deuxième fois g, on obtient :

$$g(a.g(u) + b.g^2(u)) = g(0) \iff a.g^2(u) + \cancel{b.g^3(u)} = 0 \quad (3)$$

Or puisque $g^2(u) \neq 0$ d'après le choix de u : la troisième relation donne $a = 0$

Par conséquent, (2) devient : $b.g^2(u) = 0$ qui implique $b = 0$ pour la même raison.

Ainsi, (1) devient $c.g^2(u) = 0$ qui implique une dernière fois $c = 0$.

La famille $\mathcal{B}'$ est donc libre, et c'est finalement une base de $\mathbb{R}^3$.

c) La matrice N de g dans cette base est alors simplissime, et le fait remarquable est que le raisonnement précédent est valable en toute généralité, pour tout endomorphisme nilpotent d'indice 2 !

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} g(u) & g(g(u)) & g(g^2(u)) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u \\ g(u) \\ g^2(u) \end{array} \end{array}$$

d) Comme $\mathcal{B}'$ est une base de E, on peut directement écrire :

$$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}\big(g(u), g(g(u)), g(g^2(u))\big) = \mathrm{Vect}\big(g(u), g^2(u), \cancel{g^3(u)}\big) = \mathrm{Vect}\big(g(u), g^2(u)\big)$$

Comme $\big(g(u), g^2(u)\big)$ est une *sous-famille* de $\mathcal{B}'$, c'est une famille libre ! Comme elle engendre aussi $\mathrm{Im}(g)$, c'est donc une base de ce sous-espace, et : $\dim \mathrm{Im}(g) = 2$.
Le *théorème du rang* donne alors la dimension du noyau de g :

$$\dim \mathrm{Ker}(g) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Im}(g) = 3 - 2 = 1.$$

Pour trouver une base de $\mathrm{Ker}(g)$, il suffit donc de trouver un vecteur non nul appartenant à ce noyau.
Le vecteur $g^2(u)$ est tout à fait approprié, puisqu'il est non nul, et vérifie : $g(g^2(u)) = g^3(u) = 0$.
Ainsi :

$$\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}(g^2(u)).$$

Comme précédemment, en faisant appel à la base $\mathcal{B}'$:

$$\mathrm{Im}(g^2) = \mathrm{Vect}(g^2(u), g^2(g(u)), g^2(g^2(u))) = \mathrm{Vect}(g^2(u), \cancel{g^3(u)}, \cancel{g^4(u)}) = \mathrm{Vect}(g^2(u)) = \mathrm{Ker}(g),$$

tout simplement ! C'est la relation qu'on cherchait à obtenir de façon générale ici.

Exercice 3

1. Dans cette question, on suppose que $n = 1$ (l'urne contient donc une boule blanche et 3 boules noires) et on note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches encore présentes dans l'urne après la première épreuve et X_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches encore présentes dans l'urne après la deuxième épreuve.

   a) Il est évident qu'à la fin de la première épreuve, l'urne est soit dans l'état 0 si on a tiré la seule boule blanche de l'urne, soit dans l'état 2 si on a tiré une boule noire :

   $$X_1(\Omega) = \{1, 3\}, \quad P(X_1 = 0) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(X_1 = 2) = \frac{3}{4}$$

   b) De même, à la fin de la deuxième épreuve, l'urne a gagné ou perdu une boule blanche à partir de l'un des ses deux états précédents possibles, donc $X_2(\Omega) = \{1, 3\}$.
   La formule des probabilités totales appliquée avec le s.c.e. $([X_1 = 0], [X_1 = 2])$, donne :

   $$\begin{aligned} P(X_2 = 1) &= P(X_1 = 0) \times P_{[X_1=0]}(X_2 = 1) + P(X_1 = 2) \times P_{[X_1=2]}(X_2 = 1) \\ &= \frac{1}{4} \times 1 + \frac{3}{4} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Puis : $\quad P(X_2 = 3) = 1 - P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{2}$.

   c) Simulation informatique : il suffit de réaliser dans le code ci-dessous que le choix d'une valeur entière pour la variable `tirage` simule le tirage dans une urne selon son état ; la première fois, on choisit bien un numéro parmi quatre valeurs possibles, le fait que celle-ci soit égale à 1 est réalisé avec la probabilité $\frac{1}{4}$, ce qui correspond au tirage d'une boule blanche qui met l'urne à l'état 0. Sinon, elle passe à l'état 2.

```
function y=simul()
    tirage = grand(1,1,'uin',1,4)
    if (tirage == 1) then
        X1 = 0
    else
        X1 = 2
    end
    if (X1 == 0) then   // si l'urne est dans l'état 0
        X2 = 1       //au coup d'après elle est forcément à l'état 1
    else         // sinon l'urne est dans l'état 2
        tirage = grand(1,1,'uin',1,6)  // tirage dans une urne à l'état 2
            if tirage <= 2 then    // 2 valeurs possibles sur 6
                X2 = 1       // une boule blanche et une noire sont retirées de l'urne
            else
                X2 = 3
            end
    end
y=[X1,X2]
endfunction
```

2. Le premier tirage donne bien sûr, soit une boule blanche (événement B_1, de probabilité $\dfrac{n}{2n+2}$ avec une urne initialement dans l'état n), soit une boule noire (événement N_1, de probabilité $\dfrac{n+2}{2n+2}$).

La formule des probabilités totales donne, avec le s.c.e. (B_1, N_1) :

$$P(E_n) = P(B_1) \times P_{B_1}(E_n) + P(N_1) \times P_{N_1}(E_n)$$

où :

$\star$ $P_{B_1}(E_n)$ est la probabilité que l'urne soit vidée au bout d'un nombre fini de tirages, sachant que le premier a donné une boule blanche ; tout se passe donc comme si on cherchait à vider une urne initialement dans l'état $n-1$ au bout d'un nombre fini de lancers.
C'est-à-dire : $P_{B_1}(E_n) = P(E_{n-1})$.
$\star$ Par un argument similaire, on a : $P_{N_1}(E_n) = P(E_{n+1})$ car après le tirage d'une boule noire, l'urne est dans l'état $n+1$. On a bien :

$$e_n = \frac{n}{2n+2} e_{n-1} + \frac{n+2}{2n+2} e_{n+1}$$

3. a) Montrons donc par récurrence la propriété : "$\forall n \in \mathbb{N},\ e_n \geqslant e_{n+1}$".
$\boxed{\text{I.}}$ On sait que $e_0 = 1$ et que $e_1 = P(E_1)$, donc est une probabilité. L'inégalité : $e_1 \leqslant e_0$ est donc immédiate.
$\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors elle est vraie au rang $n+1$, soit : $e_{n+1} \geqslant e_{n+2}$.
Il convient ici de reprendre la relation de la question précédente en procédant aux décalages d'indices et transformations nécessaires pour isoler e_{n+2} :
$e_{n+1} = \dfrac{n+1}{2(n+1)+2} e_n + \dfrac{n+3}{2(n+1)+2} e_{n+2} \iff \dfrac{n+3}{2n+4} e_{n+2} = e_{n+1} - \dfrac{n+1}{2n+4} e_n$
$\iff e_{n+2} = \dfrac{2n+4}{n+3} e_{n+1} - \dfrac{n+1}{n+3} e_n$, où :
$e_n \geqslant e_{n+1}$ donc $-\dfrac{n+1}{n+3} e_n \leqslant -\dfrac{n+1}{n+3} e_{n+1}$, soit :
$e_{n+2} \leqslant \dfrac{2n+4}{n+3} e_{n+1} - \dfrac{n+1}{n+3} e_{n+1} = \dfrac{2n+4-n-1}{n+3} e_{n+1} = e_{n+1}$.
$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

Remarque : On peut retrouver ce résultat par un raisonnement direct de probabilités :
En effet, l'événement E_{n+1} est réalisé si et seulement si on parvient à vider de ses boules blanches, une urne initialement dans l'état $n+1$, au bout d'un temps fini. Il faut pour cela passer par l'état n en un temps fini, puis à partir de cet état, vider l'urne de toutes ses boules blanches en un temps fini... donc réaliser l'événement E_n.
C'est-à-dire qu'on peut écrire que : la réalisation de E_{n+1} *implique* celle de E_n, ou $E_{n+1} \subset E_n$, ce qui donne bien : $P(E_{n+1}) \leqslant P(E_n)$ en passant aux probabilités.

b) La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et minorée par 0 car il s'agit de probabilités ! Le théorème de limite monotone assure donc la convergence de cette suite.

On admet dans la suite que $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0$.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = (n+1)e_n$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = (n+2)e_{n+1} = (2n+2)e_n - ne_{n-1} = 2(n+1)e_n - ne_{n-1} \text{ d'après la question 1.}$$
$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$$

b) On reconnaît (u_n) comme une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique :
$x^2 = 2x - 1 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1$.

La suite (u_n) a donc la forme générale : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\alpha + \beta.n).1^n = \alpha + \beta.n$, ce qui est bien arithmétique... On conclut en écrivant la relation pour $n = 0$ et $n = 1$:

$$u_0 = \alpha \iff \alpha = e_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_1 = \alpha + \beta \iff \beta = 2e_1 - 1$$

et ainsi : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 + (2e_1 - 1).n.$

c) On conclut donc très simplement que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)e_n = 1 + (2e_1 - 1).n \iff e_n = (2e_1 - 1).\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1}.$$

Il est alors temps d'utiliser l'information de l'énoncé qui est restée inemployée jusqu'ici : $\lim\limits_{n \to +\infty} e_n = 0$. Avec l'expression précédente, on pouvait écrire :
$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$, d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} e_n = 2e_1 - 1$.

Par *unicité de la limite* d'une suite, on conclut : $2e_1 - 1 = 0 \iff e_1 = \frac{1}{2}$, et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ e_n = \frac{1}{n+1}. \qquad \text{Tout simplement...}$$

PROBLÈME

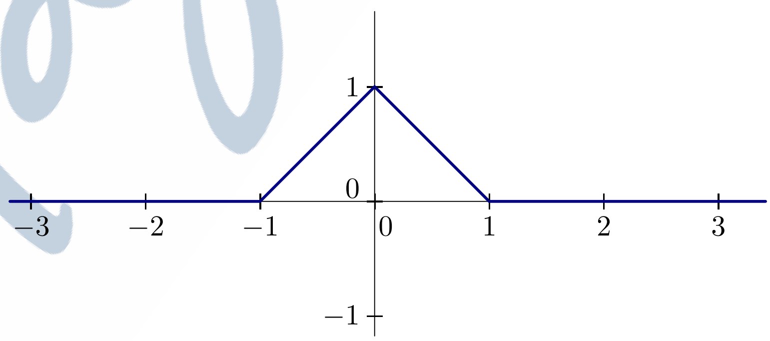
1. On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } x \in [-1;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$
Or il est évident que la fonction f est paire ! Pour tout réel x, en effet :

- ⋆ Soit $x \in [-1, 1]$, dans ce cas $-x \in [-1, 1]$ et $f(-x) = 1 - |-x| = 1 - |x| = f(x)$.
- ⋆ Soit $x \notin [-1, 1]$, dans ce cas $-x \notin [-1, 1]$ et $f(-x) = 0 = f(x)$.

On en déduit sans calcul : $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$

b) Il est toujours utile, si possible, de représenter graphiquement f pour faire apparaître ses caractéristiques importantes !



Il est alors clair que f est bien :

- ⋆ continue sur $\mathbb{R}$ (elle l'est sur $]-\infty;-1[$ et $]1;+\infty[$ comme fonction constante, sur $]-1;1[$ comme différence de fonctions continues, et les limites en -1 et 1 coïncident).

- ⋆ positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ ($\forall x \in [-1,1],\ 0 \leqslant |x| \leqslant 1$ donc $1-|x| \geqslant 0$).

- ⋆ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-1} 0 f(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0.$

  Grâce à ces trois propriétés, on peut conclure que f est bien une densité de probabilité.

On considère dorénavant une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et admettant f comme densité.

2. a) La nullité de f en-dehors de l'intervalle $[-1;1]$ où elle est continue, assure l'absolue convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x f(x)\mathrm{d}x$, donc X admet une espérance.

   Comme de plus f est paire, la fonction $x \mapsto x f(x)$ est impaire et par conséquent :

$$E(X) = \int_{-1}^{1} x f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

   b) La v.a.r. X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2.

   D'après le théorème de transfert pour les v.a.r. à densité, c'est le cas si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente, ce qui est bien le cas toujours parce que f est nulle en-dehors de $[-1;1]$ et continue sur $[-1;1]$.

   La fonction $x \mapsto x^2 f(x)$ est, cette fois, paire, donc :

$$E(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} x^2(1-x)\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2.(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

   On en déduit que X admet une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{6}.$$

3. L'allure de la représentation graphique de f incite effectivement à distinguer quatre cas pour le calcul de la fonction de répartition de X :

   - ⋆ Pour tout réel $x < -1$: $\displaystyle F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\ \mathrm{d}t = 0.$

   - ⋆ Pour tout réel $x \in [-1;0]$: $\displaystyle F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} 0\ \mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} (1+t)\mathrm{d}t$
$$= \left[t + \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{x} = x + \frac{x^2}{2} - (-1 + \frac{1}{2}) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}.$$

   - ⋆ Pour tout $x \in [0;1]$: $\displaystyle F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} 0\ \mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} (1+t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} (1-t)\mathrm{d}t$
$$= \left[t + \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{0}^{x} = -(-1 + \frac{1}{2}) + x - \frac{x^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}.$$

   - ⋆ Pour tout $x \in [1;+\infty[$: $\displaystyle F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} 0\ \mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} 0\ \mathrm{d}t = 0 + 1 + 0 = 1.$

4. On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note F_Y sa fonction de répartition.

   a) La v.a.r. $Y = |X|$ ne prend que des valeurs positives, donc évidemment :

$$\forall x < 0, \quad F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = 0.$$

b) Pour tout réel x positif ou nul :

$F_Y(x) = P(|X| \leqslant x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = F_X(x) - F_X(-x)$. Il reste alors deux cas à distinguer :

- $\star$ Pour tout réel $x \in]0,1]$, $-x \in [-1, 0[$ et $F_Y(x) = -\dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{1}{2} - (\dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{1}{2}) = 2x - x^2$.
- $\star$ Pour tout réel $x > 1$, $-x < -1$ et $F_Y(x) = 1 - 0 = 1$.

Bilan : $\quad F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

c) L'énoncé admettait déjà que Y est une variable à densité. Il était en fait assez facile de vérifier que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et en 1. Une densité g de Y est alors définie par dérivation de F_Y sauf en ces deux points, où on choisit des valeurs positives arbitraires, par exemple :

$$g(x) = \begin{cases} 2 - 2x = 2(1-x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d) La v.a.r. Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente. C'est bien le cas vu que g est nulle en-dehors de $[0,1]$, et continue sur cet intervalle, et :

$$E(Y) = \int_0^1 (2x - 2x^2)\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

En remarquant que $Y^2 = |X|^2 = X^2$, on en déduit directement que Y admet, comme X, un moment d'ordre 2 de même valeur : $\quad E(Y^2) = \dfrac{1}{6}$.

On en déduit que Y admet une variance, selon la formule de Koenig-Huygens encore une fois :

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}.$$

5. On considère deux variables aléatoires U et V, elles aussi définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0;1]$.

On pose $I = \inf(U, V)$, c'est-à-dire que pour tout ω de Ω, on a $I(\omega) = \min\big(U(\omega), V(\omega)\big)$.

On admet que I est une variable aléatoire à densité,elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et on rappelle que pour tout réel x, on a $P(I > x) = P\big([U > x] \cap [V > x]\big)$.

Pour finir, on note F_I la fonction de répartition de I.

a) Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F_I(x) &= P(I \leqslant x) = 1 - P(I > x) = 1 - P\big([U > x] \cap [V > x]\big) \\ &= 1 - P(U > x) \times P(V > x) \qquad \text{car } U \text{ et } V \text{ sont indépendantes} \\ &= 1 - \big(1 - F_U(x)\big)^2 \qquad \text{car } U \text{ et } V \text{ suivent la même loi } \mathcal{U}([0,1]) \end{aligned}$$

$$F_I(x) = \begin{cases} 1 - (1-0)^2 = 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^2 = 2x - x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 - (1-1)^2 = 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) Les variables aléatoires Y et I suivent bien la même loi car elles ont la même fonction de répartition.

6. On considère plus généralement n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ($n \geqslant 2$), toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0;1]$. On pose $I_n = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

On calcule la fonction de répartition de I_n suivant le même modèle qu'à la question précédente, à partir de l'égalité d'événements : $\forall x \in \mathbb{R},\ [I_n > x] = [X_1 > x] \cap [X_2 > x] \cap \ldots \cap [X_n > x]$.
Pour tout réel x :

$$F_{I_n}(x) = P(I_n \leqslant x) = 1 - P(I_n > x) = 1 - P\big([X_1 > x] \cap [X_2 > x] \cap \ldots \cap [X_n > x]\big)$$

$$= 1 - \prod_{k=1}^{n} P(I_k > x) \qquad \text{par indépendance mutuelle des } (I_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$$

$$= 1 - \big(P(I_1 > x)\big)^n = 1 - \big(1 - F_{I_1}(x)\big)^n \qquad \text{car les } (I_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \text{ suivent toutes la même loi}$$

$$F_{I_n}(x) = \begin{cases} 1 - (1-0)^n = 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - (1-x)^n & \text{si } x \in]0,1[\\ 1 - (1-1)^n = 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

On vérifie alors que pour tout réel x, la suite $\big(F_{I_n}(x)\big)_n$ est convergente :

- ⋆ Pour tout $x \leqslant 0$: $\quad F_{I_n}(x) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
- ⋆ Pour tout $x \geqslant 1$: $\quad F_{I_n}(x) = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$
- ⋆ Pour tout $x \in]0;1[$: $1 - x \in]0;1[$, donc $F_{I_n}(x) = 1 - (1-x)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 - 0 = 1$

Bilan : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{n \to +\infty} F_{I_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$

La fonction limite est la fonction de répartition de la variable certaine égale à 0 : on en déduit que la suite de variables aléatoires $(I_n)_n$ converge en loi vers une telle variable certaine.

7. La fonction suivante a été réécrite en langage `Scilab` pour correspondre au nouveau programme ; les v.a.r. I et Y suivant la même loi, il suffit de simuler I :

```
function y=simulation()
    u = rand(); v = rand();
    if (u<v) then
        y = u
    else
        y = v
endfunction
```