MATHÉMATIQUES - Edhec E 2011

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\quad f(x)=\dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t \quad$ si $x>0 \quad$ et $\quad f(0)=\dfrac{1}{2}$.

1. a) Simple travail sur les inégalités ici, en citant bien les propriétés des fonctions :

$\forall x>0,\ \forall t\in[0,x]:\quad 0\leqslant t\leqslant x$, donc par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$e^0=1\leqslant e^t\leqslant e^x \iff 2\leqslant e^t+1\leqslant e^x+1$, et par inverse (réels strictement positifs) :

$$\forall x>0,\ \forall t\in[0,x],\quad \frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{e^t+1}\geqslant\frac{1}{e^x+1}.$$

b) Il suffit de multiplier les membres de l'inégalité précédente par $t\geqslant 0$ pour obtenir :

$$\forall x>0,\ \forall t\in[0,x],\quad \frac{t}{e^x+1}\leqslant\frac{t}{e^t+1}\leqslant\frac{t}{2}$$

Les fonctions concernées sont bien continues selon la variable t, et $0<x$ (bornes dans l'ordre croissant), donc par *croissance de l'intégrale* :

$$\int_0^x\frac{t}{e^x+1}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x\frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$\iff \frac{1}{e^x+1}.\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x\leqslant\int_0^x\frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2}.\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$

$$\iff \frac{1}{e^x+1}.\frac{x^2}{2}\leqslant\int_0^x\frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2}.\frac{x^2}{2}\iff\frac{1}{e^x+1}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$$

En divisant le tout par $\dfrac{x^2}{2}>0$.

c) On vérifie la continuité de f en 0 (à droite) en montrant que : $\quad\displaystyle\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)$.

Ici $f(0)=\dfrac{1}{2}$ d'après l'énoncé, et : $\quad\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{e^0+1}=\frac{1}{2}$,

donc : $\quad\displaystyle\lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{1}{2}$ d'après le théorème d'encadrement. C'est bien la valeur de $f(0)$, donc f est continue en 0.

2. a) Pour répondre au mieux à cette question, et vu que f est une fonction définie par une intégrale, on introduit une primitive théorique H de la fonction $h:\ t\mapsto\dfrac{t}{e^t+1}$, bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, ce qui assure que H est elle-même de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

On peut même choisir H comme *la* primitive de h qui s'annule en 0, et on a alors :

$\forall x > 0, \quad f(x) = \dfrac{2}{x^2}.H(x)$, et f est donc de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions de classe C^1. On peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned}\forall x > 0, \quad f'(x) &= 2.(-\frac{2x}{x^4}).H(x) + \frac{2}{x^2}.H'(x) \\ &= -\frac{4}{x^3}.H(x) + \frac{2}{x^2}.\frac{x}{e^x+1} = -\frac{4}{x^3}.\underbrace{\left[H(x) - \frac{x^2}{2(e^x+1)}\right]}_{=g(x)}\end{aligned}$$

b) La fonction g est, elle aussi, de classe C^1 sur $]0;+\infty[$, avec :

$$\begin{aligned}\forall x > 0,\ g'(x) = H'(x) - \frac{2x.2(e^x+1) - x^2.2e^x}{4(e^x+1)^2} &= \frac{x}{e^x+1} - \frac{2xe^x + 2x - x^2e^x}{2(e^x+1)^2} \\ = \frac{2x(e^x+1) - 2xe^x - 2x + x^2e^x}{2(e^x+1)^2} &= \frac{x^2e^x}{2(e^x+1)^2} > 0\end{aligned}$$

La fonction g est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Par conséquent : $\quad \forall x > 0, \quad g(x) \geqslant \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = H(0) - 0 = 0$ vu le choix de H, et donc :

$$\forall x > 0,\ g(x) > 0$$

On en déduit : $\quad \forall x > 0, \quad f'(x) = -\dfrac{4}{x^3}.g(x) < 0$, $\quad$ c'est-à-dire que la fonction f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, et même sur $\mathbb{R}^+$ puisqu'elle est continue en 0.

3. a) L'inégalité : $\quad e^t \geqslant t+1$ pour tout réel t, positif se démontre, par exemple, par un argument de convexité ; exp est en effet convexe sur $\mathbb{R}$, donc sa courbe se situe entièrement au-dessus de sa tangente en 0, qui a pour équation : $y = x+1$.

Ainsi : $\quad \forall t \geqslant 0,\ e^t \geqslant t+1$, donc : $\quad e^t + 1 \geqslant t+2 > t$, soit : $\quad \forall t \geqslant 0, \ \dfrac{t}{e^t+1} \leqslant 1$.

b) Par croissance de l'intégrale une fois de plus (les conditions d'utilisation sont toujours réunies : fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$, $0 < x$) :

$$\forall x > 0, \quad \int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x 1\mathrm{d}t = x \iff \forall x > 0, \quad f(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{x}$$

On peut alors invoquer la positivité de l'intégrale pour écrire : $\quad \forall x > 0,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2}{x}$,

ou reprendre le résultat de 1.b) qui donne : $\quad \forall x > 0, \ \dfrac{1}{e^x+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2}{x}$;

dans les deux cas, le théorème d'encadrement donne : $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 2

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2 et on nte $\mathcal{B}$ la base (e_0, e_1, e_2) de E où pour tout réel x, on a : $e_0(x) = 1,\ e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$.
On considère l'application, notée f, qui à toute fonction polynômiale P appartenant à E, associe la fonction polynômiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \big(f(P)\big)(x) = 2xP(x) - (x^2-1)P'(x).$$

1. a) Montrons que f est une application linéaire : pour tous polynômes P, Q de E, et tout réel λ,

$$\begin{aligned} f(\lambda.P+Q)(x) &= 2x.(\lambda.P(x)+Q(x)) - (x^2-1).(\lambda.P+Q)'(x) \\ &= \lambda.2xP(x) + 2xQ(x) - (x^2-1).(\lambda.P'(x)+Q'(x)) \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda.(2xP(x) - (x^2-1).P'(x)) + (2xQ(x) - (x^2-1).Q'(x)) \end{aligned}$$

Soit : $\forall (P,Q) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\quad f(\lambda.P+Q) = \lambda.f(P) + f(Q)$, et f est bien linéaire.

b) Tout polynôme P de E s'écrit en effet sous la forme : $P(x) = a + bx + cx^2$, donc :

$$\begin{aligned} f(P)(x) &= 2x.(a+bx+cx^2) - (x^2-1).(b+2cx) = 2ax + 2bx^2 + 2cx^3 - bx^2 + b - 2cx^3 + 2cx \\ &= b + 2(a+c)x + bx^2 \end{aligned}$$

Il est donc clair que : pour tout polynôme P de E, $f(P)$ appartient encore à E (polynôme de degré inférieur ou égal à 2). L'application linéaire f est donc bien un endomorphisme de E.

c) D'après la formule précédente :

$$\begin{aligned} & f(e_0)(x) = 2x = 2e_1(x) \qquad (a=1, b=c=0) \quad \text{donc} \quad f(e_0) = 2e_1 \\ & f(e_1)(x) = 1 + x^2 = e_0(x) + e_2(x) \qquad (a=c=0, b=1) \quad \text{donc} \quad f(e_1) = e_0 + e_2 \\ & f(e_2)(x) = 2x = 2e_1(x) \qquad (a=b=0, c=1) \quad \text{donc} \quad f(e_2) = 2e_1 \end{aligned}$$

On en déduit que : $\quad A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a) D'après la propriété du cours, puisque $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\big(f(e_0), f(e_1), f(e_2)\big) = \text{Vect}(2e_1, e_0 + e_2, 2e_1) = \text{Vect}(e_1, e_0 e_2)$$

On a supprimé de la famille génératrice l'un des deux vecteurs $2e_1$ redondant, et on sait qu'on ne change pas le sous-espace engendré en prenant e_1 au lieu de $2e_1$.

On a ainsi obtenu une famille génératrice de $\text{Im}(f)$, constituée de deux vecteurs non colinéaires ; on peut aussi dire que $e_1 :\ x \mapsto x$ et $e_0 + e_2 :\ x \mapsto 1 + x^2$ sont deux polynômes de degrés distincts, ce qui fait de $(e_1, e_0 + e_2)$ une famille libre, donc une base de $\text{Im}(f)$.

b) Le théorème du rang donne, d'après ce qui précède :

$$\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim E \iff \dim \text{Ker}(f) = 3 - 2 = 1$$

Il suffit donc de trouver une famille d'un seul vecteur non nul appartenant à $\text{Ker}(f)$, qui constitue alors une base du noyau.

On remarque pour cela que : $f(e_0) = f(e_2) \iff f(e_2) - f(e_0) = 0_E \iff f(e_2 - e_0) = 0_E$ par linéarité de f.

Le polynôme $e_2 - e_0 :\ x \mapsto x^2 - 1$, est bien un vecteur non nul de $\text{Ker}(f)$, donc $(e_2 - e_0)$ est une base de $\text{Ker}(f)$.

3. a) Un réel λ est valeur propre de A, et donc de f, si et seulement si $A - \lambda.I_3$ est non inversible. On échelonne cette matrice grâce à la méthode du pivot de Gauss :

$$A - \lambda.I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow 2L_2 + \lambda L_1]{} \begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda^2)L_2]{} \begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix}$$

où : $\quad Q(\lambda) = 2\lambda + \lambda(2-\lambda^2) = \lambda(4-\lambda^2) = \lambda(2-\lambda)(2+\lambda)$.

La matrice échelonnée est non-inversible si et seulement si $Q(\lambda) = 0$. On en déduit que :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{-2, 0, 2\} = \mathrm{Sp}(f)$$

b) La matrice A est carrée d'ordre 3, et possède trois valeurs propres distinctes : d'après le cours, c'est une condition *suffisante* qui fait de f un endomorphisme diagonalisable, dont les trois sous-espaces propres sont par ailleurs de dimension 1.

Il suffit donc de trouver un vecteur propre (par définition non-nul) pour chacunne des valeurs propres, pour obtenir une base de chaque sous-espace propre.

- Pour $\lambda = 0$: on sait que le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est en fait $\mathrm{Ker}(f)$, dont on connaît déjà la base $(e_2 - e_0)$.

⋆ Pour $\lambda = 2$: on cherche trois réels a, b, c tels que

$$f(P) = 2P \iff b + 2(a+c)x + bx^2 = 2(a + bx + cx^2) \iff \begin{cases} b = 2a \\ 2(a+c) = 2b \\ b = 2c \end{cases} \iff b = 2a = 2c$$

On vérifie avec $a = c = 1$ et $b = 2$ que :
$f(e_0 + 2e_1 + e_2) = f(e_0) + 2f(e_1) + f(e_2) = 2e_1 + 2(e_0 + e_2) + 2e_1 = 2(e_0 + 2e_1 + e_2)$,
donc $E_2(f) = \mathrm{Vect}(e_0 + 2e_1 + e_2)$.

- Pour $\lambda = -2$: on cherche trois réels a, b, c tels que

$$f(P) = -2P \iff b+2(a+c)x+bx^2 = -2(a+bx+cx^2) \iff \begin{cases} b = -2a \\ 2(a+c) = -2b \\ b = -2c \end{cases} \iff b = -2a = -2c$$

On vérifie avec $a = c = 1$ et $b = -2$ que :

$$f(e_0 - 2e_1 + e_2) = f(e_0) - 2f(e_1) + f(e_2) = 2e_1 - 2(e_0 + e_2) + 2e_1 = -2(e_0 - 2e_1 + e_2),$$

$$\text{donc : } \quad E_{-2}(f) = \mathrm{Vect}(e_0 - 2e_1 + e_2)$$

c) Tout vecteur v de $E_2(f)$ vérifie : $\quad f(v) = 2v \iff v = f(\frac{1}{2}.v)$, donc $v \in \mathrm{Im}(f)$,
et : $\quad E_2(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.
De même, tout vecteur de $E_{-2}(f)$ vérifie : $f(v) = -2v \iff v = f(-\frac{1}{2}.v)$, donc $v \in \mathrm{Im}(f)$,
et : $\quad E_{-2}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.

Pour tout i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. a) Pour tout i et pour tout k, éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$ on note $U_{i,k}$ l'événement « l'urne numéro i est choisie à la k-ième épreuve ».

L'événement $[X_i = 1]$ est réalisé si et seulement si l'urne numéro i n'a jamais été choisie en n épreuves, donc :

$$[X_i = 1] = \overline{U_{i,1}} \cap \overline{U_{i,2}} \cap \ldots \cap \overline{U_{i,n}}$$

Par indépendance mutuelle des épreuves, on en déduit :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad P(X_i = 1) = \prod_{k=1}^{n} P(\overline{U_{i,k}}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

b) De la même façon, pour tous entiers distincts i et j éléments de $[\![1, n]\!]$:

$$[X_i = 1] \cap [X_j = 1] = \bigcap_{k=1}^{n} (\overline{U_{i,k}} \cap \overline{U_{j,k}})$$

où : $P(\overline{U_{i,k}} \cap \overline{U_{j,k}}) = 1 - \dfrac{2}{n}$ puisqu'il s'agit de ne choisir ni l'urne i, ni l'urne j. Toujours par indépendance mutuelle des épreuves :

$$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \prod_{k=1}^{n} P(\overline{U_{i,k}} \cap \overline{U_{j,k}}) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

c) $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^2 = 1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2} > 1 - \dfrac{2}{n}$, donc $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2n} > \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^n$ par stricte croissance de la fonction puissance n-ième sur $\mathbb{R}^+$, et donc :

Si $i \neq j$, $P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) \neq P(X_i = 1) \times P(X_j = 1)$, ce qui prouve que les variables aléatoire X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

(C'est logique : si on sait que l'urne i n'a jamais été choisie, cela augmente la probabilité l'urne j l'ait été, et diminue donc la probabilité de $[X_j = 1]$).

2. On pose $Y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Chacune des variables X_i, de Bernoulli, admet une espérance, donc par linéarité de l'espérance, $E(Y_n)$ existe et vaut :

$$E(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = n.\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{E(Y_n)}{n} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{1}{n})}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} = 0$: $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$, donc $n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -1$, c'est-à-dire : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1$.

Par continuité de l'expoentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$.

On en déduit l'équivalent : $E(Y_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} n.e^{-1}$.

3.

4. Pour tout i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.

a) La variable aléatoire N_i compte donc le nombre de fois où l'urne i a été choisie pour en retirer une boule, ce qui peut être assimilé au succès d'une épreuve de Bernoulli répétée n fois de façon indépendante. La variable N_i suit donc la loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{n})$:

$$N_i(\Omega) = [\![0, n]\!], \qquad \forall k \in [\![0, n]\!],\ P(N_i = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k}, \quad E(N_i) = n \times \frac{1}{n} = 1$$

b) Pour tout $\omega \in \Omega$: $X_i(\omega)$ ne prend que deux valeurs, et :

- Si $X_i(\omega) = 0$, alors $N_i(\omega) \geqslant 1$ (l'urne i a été choisie au moins une fois), et $X_i(\omega) \times N_i(\omega) = 0$.
- Sinon $X_i(\omega) = 1$, ce qui signifie que l'urne i n'a jamais été choisie en n épreuves, et alors $N_i(\omega) = 0$; ainsi, $X_i(\omega) \times N_i(\omega) = 0$

Ainsi : $\quad \forall \omega \in \Omega,\ X_i(\omega) \times N_i(\omega) = 0$, et la variable produit $X_i N_i$ est nulle.

c) Les variables X_i et N_i sont évidemment non indépendantes : d'après ce qui précède, $[X_i = 0] \cap [N_i = 0] = \varnothing$ et $P([X_i = 0] \cap [N_i = 0]) = 0$, car ces deux événements sont incompatibles.

Pourtant, $P(X_i = 0) \times P(N_i = 0) = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right) \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \neq 0.$

5. Le programme suivant simule l'expérience et calcule X_1 et N_1 : X_1 prend la valeur 0 dès que l'urne 1 est choisie (la variable `hasard` correspond au choix du numéro), et à chaque fois que l'urne 1 est choisie, la valeur de N_1 augemente d'une unité :

```
n = input("Donnez un entier naturel supérieur ou égal à 2 : ")
n1 = 0; x1 = 1;
for k=1:n do
    hasard = grand(1,1,'uin',1,n)
    if (hasard == 1) then
        x1 = 0;
        n1 = n1+1;
    end
end
disp([x1,n1])
```

PROBLÈME

Partie 1 : expression de la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X

1. La fonction de répartition F d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme à densité sur $[a, b]$ (avec $a < b$) est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

La fonction de répartition G d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$) est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

2. Soit x un réel quelconque ; on calcule la probabilité $P(Z \leqslant x)$ avec la formule des probabilités totales, et le système complet d'événements $\big([Y=1],[Y=-1]\big)$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = P(Z \leqslant x) &= P(XY \leqslant x)\\ &= P(Y=-1) \times P_{[Y=-1]}(XY \leqslant x) + P(Y=1) \times P_{[Y=1]}(XY \leqslant x)\\ &= \frac{1}{2} \times P(-X \leqslant x) + \frac{1}{2} P(X \leqslant x) = \frac{1}{2}\big(P(X \geqslant -x) + P(X \leqslant x)\big)\\ &= \frac{1}{2}\big(1 - F_X(-x) + F_X(x)\big) \quad \text{car } X \text{ est à densité}\end{aligned}$$

Partie 2 : étude de quelques exemples

1. On suppose que la loi de X est la loi normale centrée réduite. On rappelle ici que la fonction de répartition de X, notée alors Φ, vérifie la propriété fondamentale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Alors, pour tout réel x :

$$F_Z(x) = \frac{1}{2}\big(\Phi(x) - \Phi(-x) + 1\big) = \frac{1}{2}\big(\Phi(x) - 1 + \Phi(x) + 1\big) = \Phi(x)$$

ce qui prouve que $Z = XY$ suit encore la loi normale centrée réduite.

2. On suppose que la loi de X est la loi uniforme sur $[0,1]$.

a) Le rappel de cours sur la fonction de répartition de la loi uniforme permet d'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -x \leqslant 0 \iff x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } 0 \leqslant -x \leqslant 1 \iff -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } -x \geqslant 1 \iff x \leqslant -1 \end{cases}$$

b) Ainsi, pour tout réel x, et d'après la relation obtenue à la fin de la partie 1 :

$$F_Z(x) = \frac{1}{2}\big(F_X(x) - F_X(-x) + 1\big) = \begin{cases} \frac{1}{2}(0 - 1 + 1) = 0 & \text{si } x \leqslant -1 \\ \frac{1}{2}(0 - (-x) + 1) = \frac{x+1}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2}(x - 0 + 1) = \frac{x+1}{2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{1}{2}(1 - 0 + 1) = 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

La fonction de répartition $F_Z :\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{x-(-1)}{1-(-1)} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

correspond à celle d'une loi uniforme à densité sur $[-1,1]$, qui est donc la loi suivie par Z.

Partie 3 : étude du cas où la loi de X est la loi exponentielle de paramètre 1

1. a) La relation finale de la partie 1 donne, lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \frac{1}{2}\big(F_X(x) - F_X(-x) + 1\big) = \begin{cases} \frac{1}{2}\big(1 - e^{-x} - 0 + 1\big) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \text{ car alors } -x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2}\big(0 - (1 - e^{x}) + 1\big) = \frac{1}{2}e^{x} & \text{si } x < 0 \text{ car alors } -x > 0 \end{cases}$$

b) La fonction de répartition de Z est ici de classe $\mathcal{C}^1$, donc continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Comme de plus :
$\lim\limits_{x\to 0^+} F_Z(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 - \frac{1}{2}e^{-x} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = F_Z(0)$, et $\lim\limits_{x\to 0^-} F_Z(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{2}e^{x} = \frac{1}{2}$,
alors F_Z est aussi continue en 0.
Ainsi, F_Z est continue sur tout $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 : Z est bien une variable à densité.

c) On obtient une densité f_Z de Z par dérivation de F_Z, sauf en 0 où on choisira une valeur arbitraire positive, adaptée au résultat demandé :

$$\forall x \in]-\infty, 0[,\ f_Z(x) = \frac{1}{2}e^{x} = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad \forall x \in]0, +\infty[,\ f_Z(x) = (-\frac{1}{2}).(-e^{-x}) = \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

et on pose : $\quad f_Z(0) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{-|0|}$. Une densité de Z est bien définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_Z(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

NDLR : cette loi classique est appelée *loi de Laplace*.

2. a) L'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x$ correspond à l'espérance de la variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre 1, donc :

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x = 1$$

b) La parité de la fonction valeur absolue implique bien celle de f_Z :

$$\forall x_i n\mathbb{R}, \quad f_Z(-x) = \frac{1}{2}e^{-|-x|} = \frac{1}{2}e^{-|x|} = f_Z(x)$$

La variable aléatoire f_Z admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf_Z(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente. Comme f_Z est paire, alors la fonction $g :\ x \mapsto xf_Z(x)$ est impaire ; en effet : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = -x.f_Z(-x) = -x.f_Z(x) = -g(x)$.
De la sorte, la convergence absolue de l'intégrale précédente est subordonnée à celle de $\int_0^{+\infty} x.f_Z(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x$, qui est bien convergente.
On en déduit que Z admet une espérance, et que : $\quad E(Z) = 0$.

3. a) Tout comme précédemment : l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\mathrm{d}x$ correspond, d'après le théorème de transfert, au moment d'ordre 2 de X, dont on retrouve la valeur grâce à la formule de Koenig-Huygens et les valeurs connues de $E(X)$ et $V(X)$:

$$\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\mathrm{d}x = E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 1 + 1 = 2$$

La variable aléatoire Z admet alors un moment d'ordre 2 $E(Z^2)$ si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f_Z(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.
Comme la fonction $x \mapsto x^2.f_Z(x)$ est à nouveau paire et positive, il suffit de prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2.f_Z(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\mathrm{d}x$, qui est bien convergente et vaut $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ d'après ce qui précède.

Par conséquent, la variable aléatoire Z admet un moment d'ordre 2, qui vaut :

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f_Z(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} x^2.f_Z(x)\mathrm{d}x = 2$$

donc Z admet une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 2 - 0 = 2$$

b) Puisque $Z = XY$, alors $Z^2 = X^2Y^2$, où puisque Y ne prend que les valeurs -1 et 1 : Y^2 est la variable certaine égale à 1.
Ainsi : $Z^2 = X^2$, ce qui redonne : $E(Z^2) = E(X^2) = 2$, et $V(X) = 2$.

4. Soient U et V des variables aléatoires suivant respectivement la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ et la loi uniforme sur $[0,1[$.

a) On pose $Q = -\ln(1-V)$ et on admet que Q est une variable aléatoire : pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F_Q(x) &= P(Q \leqslant x) = P\big(-\ln(1-V) \leqslant x\big) = P\big(\ln(1-V) \geqslant -x\big) \\ &= P(1-V \geqslant e^{-x}) \quad \text{par stricte croissance et continuité de exp sur } \mathbb{R} \\ &= P(V \leqslant 1-e^{-x}) = F_V(1-e^{-x}) \end{aligned}$$

Or pour tout x réel : $1 - e^{-x} < 1$, il reste donc à distinguer deux cas pour pouvoir utiliser la fonction de répartition F_V de la loi uniforme sur $[0,1[$:

$\star$ $1 - e^{-x} \leqslant 0 \iff e^{-x} \geqslant 1 \iff -x \geqslant 0 \iff x \leqslant 0$, donc :

$$\text{pour tout } x \in]-\infty, 0], \quad F_Q(x) = F_V(1-e^{-x}) = 0$$

$\star$ $0 \leqslant 1 - e^{-x} < 1 \iff 0 < e^{-x} < 1 \iff x > 0$, donc :

$$\text{pour tout } x \in]0, +\infty[, \quad F_Q(x) = F_V(1-e^{-x}) = 1 - e^{-x}$$

Bilan : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Q(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$; on reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1, loi que suit donc la variable aléatoire Q.

b) On pose $R = 2U - 1$ et on admet que R est une variable aléatoire. Comme les valeurs possibles de U sont 0 et 1, alors les valeurs possibles de R sont $2 \times 0 - 1 = -1$ et $2 \times 1 - 1 = 1$, avec :

$$P(R = -1) = P(U = 0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(R = 1) = P(U = 1) = \frac{1}{2}$$

c) Informatique. Les deux questions précédentes permettent de calculer une simulation des variables aléatoires Q et R à partir de celles des variables aléatoires U et V qui suivent des lois connues. On en déduit une simulation de Z par le simple produit de Q et R, qui suivent respectivement les mêmes lois que X et Y :

```
function res = z()
    U = grand(1,1,'bin',1,1/2)
    V = grand(1,1,'unf',0,1)
    Q = -log(1-V)
    R = 2*U-1
    res = Q*R
endfunction
```