MATHÉMATIQUES - Edhec E 2010

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On considère la fonction f définie, pour tout couple (x, y) de l'ouvert $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, par :

$$f(x, y) = (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

1. Il s'agit ici d'obtenir deux nouvelles expressions possibles de $f(x, y)$, utiles pour la suite :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2,\ f(x, y) = x.\frac{1}{x} + x.\frac{1}{y} + y.\frac{1}{x} + y.\frac{1}{y} = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

et

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2,\ f(x, y) = (x + y).\frac{x + y}{xy} = \frac{(x + y)^2}{xy}$$

2. Si l'énoncé consacre une question à la preuve que f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[^2$, c'est qu'il faut particulièrement soigner la rédaction !

Les fonctions $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (fonctions *coordonnées*), donc sur $]0, +\infty[^2$, *à valeurs dans* $]0, +\infty[$ où la fonction inverse $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe C^2.

Par composition : les fonctions $(x, y) \mapsto \frac{1}{x}$ et $(x, y) \mapsto \frac{1}{y}$ sont de classe C^2 sur $]0; +\infty[^2$.

Par somme et produit de fonctions de classe C^2 : la fonction $f :\ (x, y) \mapsto 2 + y \times \frac{1}{x} + x \times \frac{1}{y}$ est bien de classe C^2 sur $]0; +\infty[^2$.

3. Les points critiques de f sur $]0, +\infty[^2$ sont les valeurs d'annulation du gradient de f ; en partant de la première expression calculée en 1.,

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2,\ \partial_1(f)(x, y) = -\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y} \text{ et } \partial_2(f)(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}$$

Ainsi :

$$\nabla f(x, y) = 0 \iff \begin{cases} \dfrac{-y^2 + x^2}{x^2 y} & = 0 \\ \dfrac{x^2 - y^2}{x y^2} & = 0 \end{cases} \iff x^2 - y^2 = 0 \text{ car } x, y > 0 \iff x^2 = y^2 \iff x = y \text{ car } x, y > 0$$

La fonction f admet donc bien une infinité de points critiques, à savoir $\{(x, x) |\ x > 0\}$ (qui forment une demi-droite du plan).

4. La fonction f de classe C^2 sur $]0,+\infty[^2$ a pour dérivées partielles secondes :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \partial_{1,1}^2(f)(x,y) = \frac{2y}{x^3},\quad \partial_{2,2}^2(f)(x,y) = \frac{2x}{y^3},\quad \partial_{1,2}^2(f)(x,y) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \partial_{2,1}^2(f)(x,y)$$

(le théorème de Schwarz pour f de classe C^2 sur $]0,+\infty[^2$, assure l'égalité des dérivées croisées).

En tout point critique de f, de la forme (x,x) avec $x > 0$, la Hessienne de f est :

$$H = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^2} & -\frac{2}{x^2} \\ -\frac{2}{x^2} & \frac{2}{x^2} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de H sont les réels λ tels que $H - \lambda.I_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^2} - \lambda & -\frac{2}{x^2} \\ -\frac{2}{x^2} & \frac{2}{x^2} - \lambda \end{pmatrix}$ est non-inversible,

ce sont donc, d'après le critère d'inversibilité des matrices 2×2, les racines du déterminant de $H - \lambda.I_2$, solutions de :

$$(\frac{2}{x^2} - \lambda)^2 - (-\frac{2}{x^2})^2 = 0 \iff (\frac{2}{x^2} - \lambda - \frac{2}{x^2})(\frac{2}{x^2} - \lambda + \frac{2}{x^2}) = 0 \iff -\lambda(\frac{4}{x^2} - \lambda) = 0$$

Les valeurs propres de H sont donc 0 et $\frac{4}{x^2}$: comme l'une d'entre elles est nulle, on ne peut pas dire si (x,x) est un extrémum de f ou non par cette méthode.

Remarque : Le fait que 0 est valeur propre de H est en fait évident en prenant en compte le fait que les deux lignes de H sont opposées, donc que H n'est pas inversible ! On pouvait invoquer directement cet argument pour répondre sans calcul à la question.

5. a) Pour tout couple $(x,y) \in]0,+\infty[^2$:

$$(x+y)^2 - 4xy = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geqslant 0, \text{ donc } (x+y)^2 \geqslant 4xy$$

b) De l'inégalité précédente, on déduit : $\quad \forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \dfrac{(x+y)^2}{xy} \geqslant 4.$

Or : pour tout $a > 0$, $f(a,a) = 2a.2.\frac{1}{a} = 4$, on peut donc conclure que :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, \forall a > 0, \quad f(x,y) \geqslant 4 = f(a,a)$$

On peut donc en conclure que f admet sur $]0,+\infty[^2$ un minimum global atteint en chacun de ses points critiques, et qui vaut 4.

6. Soit g la fonction définie pour tout (x,y) de $]0,+\infty[^2$, par :

$$g(x,y) = 2\ln(x+y) - \ln(x) - \ln(y)$$

On remarque que, pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$:

$$\ln(f(x,y)) = \ln\left(\frac{(x+y)^2}{xy}\right) = \ln((x+y)^2) - \ln(xy) = 2\ln(x+y) - \ln(x) - \ln(y) = g(x,y)$$

Et comme pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$, $f(x,y) \geqslant 4$, on peut conclure par stricte croissance de ln sur $]0,+\infty[$, que :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ g(x,y) = \ln(f(x,y)) \geqslant \ln(4) = 2\ln(2)$$

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1).\left(1+\frac{1}{2}\right).\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

1. Les premiers termes de la suite sont :

   $u_0 = 2,\ u_1 = 2.(1+\frac{1}{2}) = 2.\frac{3}{2} = 3,\ u_2 = 2.(1+\frac{1}{2}).(1+\frac{1}{4}) = 3.\frac{5}{4} = \frac{15}{4}.$

2. a) $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = 2.\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \geqslant 2$ car le dernier produit est supérieur ou égal à 1, puisque chacun de ses termes est lui-même supérieur ou égal à 1.

   b) $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_{n+1} = \prod_{k=0}^{n+1}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right).\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$, soit :

   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \times \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) > u_n$ car tous les termes de la suite sont strictement positifs, et $1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

3. a) Comme d'habitude, on introduit la fonction $f\ :\ x \mapsto x - \ln(1+x)$, définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$, avec :

   $\forall x > -1,\ f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$. On en déduit le tableau de signe de $f'(x)$, puis les variations de f :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	↘	$f(0)=0$	↗	

   ce qui justifie bien que :
   $\forall x > -1,\ f(x) \geqslant 0 \iff \forall x > -1,\ x \geqslant \ln(1+x)$.

   b) Remarquons tout d'abord que d'après les règles de calcul du logarithme, u_n étant le produit de réels tous strictement positifs :

   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$ (le logarithme d'un produit de réels strictement positifs égale la somme de leurs logarithmes).

   L'inégalité de la question précédente est en particulier vraie pour tous les réels $\frac{1}{2^k}$ $(k \in \mathbb{N})$ puisqu'ils sont strictement positifs. Ainsi :

   $\forall k \in \mathbb{N},\ \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k} \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}$ car le passage à la somme est compatible avec les inégalités (sur leur domaine de validité).

   c) On retrouve à présent dans $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$, une somme (partielle) géométrique de raison $1/2 \neq 1$, qui s'écrit donc : $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} = 1.\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = 2.\left(1-(1/2)^{n+1}\right) = 2 - (1/2)^n$.

   Ainsi :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(u_n) \leqslant 2 - (1/2)^n, \quad \text{où } 2 - (1/2)^n < 2.$$

   Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(u_n) < 2 \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant e^2$ par croissance stricte de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

   Un majorant constant de la suite (u_n) est donc e^2.

4. On sait désormais que : (u_n) est strictement croissante (q. 2.b), majorée par e^2 (q. 3.b) : d'après le théorème de limite monotone, la suite (u_n) est donc convergente, et sa limite ℓ vérifie : $u_0 = 2 \leqslant \ell \leqslant e^2$ (une suite croissante est toujours minorée par son premier terme).

5. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

   a) On sait déjà que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ élément de $[2; e^2]$. Comme la fonction ln est continue sur ce segment : par composition, la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln(\ell)$.
   Or : $\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$ apparaît comme la somme partielle de rang n de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.
   Dire que la suite $(\ln(u_n))$ converge, c'est exprimer que la série converge, et par définition :
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln(\ell).$$

   b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n et ℓ étant des réels strictement positifs :
   $\ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) = \ln(\ell) - \ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$ est vu comme le *reste* d'indice n de la série convergente, et se note classiquement $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.
   On sait donc que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

   c) Le résultat de la question 3.a) s'applique à nouveau pour dire que :
   $$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall k\geqslant n+1,\ \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k}.$$
   On peut alors passer à la somme pour k variant de $n+1$ à un entier $N\geqslant n+1$:
   $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{2^k}$, puis passer à la limite quand $N\to+\infty$ dans l'inégalité (les séries concernées étant, comme on l'a déjà justifié, convergentes) :
   $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \iff \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$
   $$\iff \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{1-1/2} - \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = 2 - (2-(1/2)^n) = (1/2)^n$$
   selon des calculs déjà faits. Ainsi :
   $$\forall n\in\mathbb{N},\ \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

   d) Puisque ℓ est la limite de la suite croissante (u_n), on a déjà pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\ell - u_n \geqslant 0$.
   L'inégalité précédente donne, par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:
   $\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{\ell}{u_n} \leqslant e^{\frac{1}{2^n}} \iff \dfrac{u_n}{\ell} \geqslant e^{-\frac{1}{2^n}}$ par inverse (tous les réels concernés sont strictement positifs), soit :
   $$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \geqslant \ell.e^{-\frac{1}{2^n}} \iff \forall n\in\mathbb{N},\ -u_n \leqslant -\ell.e^{-\frac{1}{2^n}} \iff \forall n\in\mathbb{N},\ \ell - u_n \leqslant \ell - \ell.e^{-\frac{1}{2^n}},$$
   ce qui est bien le résultat attendu par factorisation du membre de droite.

   e) L'étude de la fonction $h : x \mapsto x - 1 + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ (non faite ici...) permet de prouver que :
   $$\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)\geqslant 0 \iff \forall x\in\mathbb{R},\ 1-e^{-x} \leqslant x. \quad \text{D'où : } \forall n\in\mathbb{N},\ 1-e^{-\frac{1}{2^n}} \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité par $\ell > 0$, on obtient d'après le résultat précédent :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell.\left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right) \leqslant \frac{\ell}{2^n}.$$

Les séries $\sum_{n\geqslant 0}(\ell - u_n)$ et $\ell.\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}$ sont à termes positifs, et la deuxième est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$, donc convergente.

Le *théorème de comparaison des séries à termes positifs* assure donc que la série $\sum_{n\geqslant 0}(\ell - u_n)$ est convergente.

Exercice 3

1. a) Une question tellement facile qu'on va la rédiger très rigoureusement : $\forall x \in \mathbb{R} = \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(-x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(-x)^2} = \dfrac{1}{2x^2} = f(x) & \text{si } x \geqslant 1 \text{ car alors } \ -x \leqslant -1 \\ 0 = f(x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ car alors } \ -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$$

La fonction f est bien paire.

b) Il est clair que la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf en -1 et 1, soit comme fonction nulle, soit comme fonction de référence bien définie et continue sur $]-\infty;-1]$ et $[1;+\infty[$.

De plus : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 0\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ converge, comme intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, et vaut d'ailleurs $\frac{1}{2} \times \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{1}{2}$.

On en déduit, par parité de f, que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge, et vaut : $\displaystyle 2\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

La fonction f est donc bien une densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant f comme densité. On note F_X la fonction de répartition de X.

2. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Or : $\displaystyle\int_1^{+\infty} |xf(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ est divergente comme intégrale de Riemann, avec $\alpha = 1 \leqslant 1$.

La variable aléatoire X n'admet donc pas d'espérance.

3. On pose $Y = \ln(|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note F_Y sa fonction de répartition.

a) Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leqslant x) = P(\ln(|X|) \leqslant x) = P(|X| \leqslant e^x) \quad \text{par stricte croissance de exp sur } \mathbb{R} \\ &= P(-e^x \leqslant X \leqslant e^x) = P(-e^x < X \leqslant e^x) \quad \text{car } X \text{ est une v.a.r. à densité} \\ &= F_X(e^x) - F_X(-e^x) \end{aligned}$$

b) Au vu de la relation précédente : comme X est une v.a.r. à densité, sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en -1 et en 1 (vu l'étude de sa dérivée f). Comme exp est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on peut conclure que :
par somme et composée de fonctions, F_Y est elle-même continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en un nombre fini de points : concrètement en 0, vu que $e^0 = 1$ et $-e^0 = -1$.
Ainsi la v.a.r. Y correspond-elle à la définition d'une variable à densité, laquelle est donnée par la dérivée de F_Y là où elle existe :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f_Y(x) = F_Y'(x) = e^x.f(e^x) - (-e^x).f(-e^x) = 2e^x f(e^x)$$

car f est paire, et $f_Y(0) = 0$ de façon arbitraire ; on a utilisé ici la formule de dérivation d'une composée : $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$.
Deux cas sont alors à considérer :

$\star$ si $x > 0$, alors $e^x > 1$ et dans ce cas : $f_Y(x) = 2e^x.\dfrac{1}{2(e^x)^2} = e^{-x}$.

$\star$ si $x < 0$, alors $0 < e^x < 1$ et dans ce cas : $f_Y(x) = 2e^x \times 0 = 0$.

Ainsi : $f_Y(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$, ce qui permet de conclure que Y suit la **loi exponentielle de paramètre 1**.

c) $\forall x \geqslant 0$: $-x \leqslant 0$ donc $0 < e^{-x} \leqslant 1$, et ainsi $1 > 1 - e^{-x} \geqslant 0$, et de même : $\forall x < 0, \ -x > 0$ donc $e^{-x} > 1$ et $1 - e^{-x} < 0$.

d) On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur $[0;1[$. Dans ce cas $1-U$ ne prend que des valeurs de l'intervalle $]0;1]$, et on peut définir la v.a.r. $Z = -\ln(1-U)$ dont la fonction de répartition est définie par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) &= P(Z \leqslant x) = P(-\ln(1-U) \leqslant x) \\ &= P(\ln(1-U) \geqslant -x) = P(1 - U \geqslant e^{-x}) \quad \text{par stricte croissance de exp sur } \mathbb{R} \\ &= P(U \leqslant 1 - e^{-x}) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } 1 - e^{-x} \in [0;1[\iff x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } 1 - e^{-x} < 0 \iff x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la **loi exponentielle de paramètre** 1, loi suivie par Z donc, tout comme Y.

e) La simulation informatique de la v.a.r. Y, qui suit la même loi que Z est alors aisée, via la fonction `random` sans paramètre qui simule, elle, la variable aléatoire U :

```
function y = expo()
        y = -log(1-rand())
endfunction
```

PROBLÈME

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par les égalités suivantes :

$$f(e_1) = \frac{1}{3}(e_2 + e_3) \quad \text{et} \quad f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1$$

Partie 1 : étude de f

1. a) La matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$ est immédiate au vu des définitions précédentes :

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

b) Par propriété, puisque $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big) = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3, e_1, e_1) = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3, e_1)$$

On a supprimé de la famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, le vecteur redondant e_1. Les deux vecteurs restants sont $e_2 + e_3 = (0, 1, 1)$ et $e_1 = (1, 0, 0)$ qui sont non colinéaires : ils forment donc une famille libre, et donc une base de $\mathrm{Im}(f)$, de sorte que :

$$\dim \mathrm{Im}(f) = 2$$

Le théorème du rang pour l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$, donne alors :

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) \iff \dim \mathrm{Ker}(f) = 3 - 2 = 1$$

c) Puisque $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, on en obtient une base en trouvant simplement un vecteur non nul dans le noyau de f.

On remarque ici que puisque : $f(e_2) = f(e_3)$, alors : $f(e_2) - f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff f(e_2 - e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$ par linéarité de f.

Puisque $e_2 - e_3 = (0, 1, -1)$ est non-nul et appartient au noyau, il en forme une base :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_2 - e_3)$$

On en déduit donc directement que $\lambda = 0$ est valeur propre de f, le sous-espace propre associée étant :

$$E_0(f) = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_2 - e_3)$$

d) Pas trop de choix ici : il faut échelonner la matrice $M - \lambda.I_3$ pour trouver les autres valeurs propres de M.

$$M - \lambda.I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -\lambda & 0 \\ 1/3 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -\lambda \\ 1/3 & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1]{L_3 \leftarrow L_3 + 3\lambda L_1} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 2/3 & 2/3 - 3\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -\lambda \\ 0 & 2/3 & 2/3 - 3\lambda^2 \\ 0 & -\lambda & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow 2L_3 + 3\lambda L_3]{} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -\lambda \\ 0 & 2/3 & 2/3 - 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix}$$

où : $\quad Q(\lambda) = 2\lambda + 3\lambda\Big(\dfrac{2}{3} - 3\lambda^2\Big) = 2\lambda + 2\lambda - 9\lambda^3 = \lambda(4 - 9\lambda^2) = \lambda(2 - 3\lambda)(2 + 3\lambda).$

La matrice est désormais échelonnée, et non-inversible si et seulement si l'un au moins de ses coefficients diagonaux est nul, donc si $Q(\lambda) = 0$. La forme factorisée de Q rend immédiates ses racines, d'où :

$$\mathrm{Sp}(M) = \left\{0, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$$

Il reste alors à calculer les deux sous-espaces propres associés aux valeurs propres $-\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{2}{3}$:

- $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2/3}(M) \iff (M + \frac{2}{3}.I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  On peut remplacer dans l'équation matricielle, $M + \frac{2}{3}.I_3$ par sa réduite de Gauss ci-dessus, dans laquelle on a remplacé λ par $-\frac{2}{3}$, ce qui donne le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x \quad + \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z \\ y = z \end{cases}$$

  de sorte que : $\quad E_{-2/3}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ z \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

- De même :

  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{2/3}(M) \iff (M - \frac{2}{3}.I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{3}x \quad - \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = z \end{cases},$$

  et ainsi : $\quad E_{2/3}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

e) Le critère suffisant permet déjà de conclure : M est une matrice carrée d'ordre 3 possédant trois valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

   On peut rajouter ici que les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base de vecteurs propres pour M, qu'on appellera $\mathcal{B}'$.

2. On pose : $\quad P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) La matrice P apparaît, au vu des calculs précédents, comme la **matrice de passage** de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base de vecteurs propres $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ évoquée plus haut. À ce titre, elle est inversible, et la formule de changement de base donne :

$$M = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Dans la diagonale de D, l'ordre des valeurs propres correspond à celui des vecteurs propres dans la matrice de passage P.

b) Le produit matriciel donne : $PQ = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4.I_3$.

On en déduit : $\frac{1}{4}.PQ = I_3$ ou encore $P.(\frac{1}{4}.Q) = I_3$, relation qui permet d'en déduire sans calcul supplémentaire que P est inversible, d'inverse : $P^{-1} = \frac{1}{4}.Q$.

c) On rédige la récurrence classique pour montrer que la propriété $\mathcal{P}(j)$: "$M^j = PD^jP^{-1}$", est vraie pour tout $j \in \mathbb{N}$..

$\boxed{\text{I.}}$ Quand $j = 0$: $M^0 = I_3$, et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$, donc la propriété est vraie au rang 0.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété vraie à un certain rang j, et montrons qu'alors elle est vraie au rang $j+1$.

On a : $M^{j+1} = M^j.M = PD^jP^{-1}.PDP^{-1} = PD^j.I_3.DP^{-1} = PD^{j+1}P^{-1}$, donc la propriété est vraie au rang $j+1$ si elle l'est au rang j.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $j \in \mathbb{N}$, selon le principe de récurrence.

d) La récurrence précédente montre que le calcul des puissances de M est ramené à celui des puissances de D. Or, comme D est une matrice diagonale :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad D^j = \begin{pmatrix} (\frac{2}{3})^j & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{2}{3})^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : cette formule ne vaut pas pour $j = 0$, où $D^0 = I$! A moins d'écrire ci-dessus, 0^j en coefficient d'indice $(3,3)$, et en rappelant la convention : $0^0 = 1$.

On finit ainsi le calcul :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ M^j = PD^jP^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2(\frac{2}{3})^j & -2(-\frac{2}{3})^j & 0 \\ (\frac{2}{3})^j & (-\frac{2}{3})^j & 0 \\ (\frac{2}{3})^j & (-\frac{2}{3})^j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^j + \frac{1}{2}(-\frac{2}{3})^j & \star & \star \\ \frac{1}{4}(\frac{2}{3})^j - \frac{1}{4}(-\frac{2}{3})^j & \star & \star \\ \frac{1}{4}(\frac{2}{3})^j - \frac{1}{4}(-\frac{2}{3})^j & \star & \star \end{pmatrix}$$

(seule la première colonne était demandée).

Lorsque $j = 0$, la première colonne de l'expression générale précédente est : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{2}.1 \\ \frac{1}{4}.1 - \frac{1}{4}.1 \\ \frac{1}{4}.1 - \frac{1}{4}.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui correspond bien à la première colonne de $M^0 = I$, donc cette formule générale vaut encore pour $j = 0$.

Partie 2 : Étude d'une suite de variables aléatoires

1. Le premier tirage s'effectue sans contrainte particulière, dans une urne contenant trois boules équiprobables : X_1 suit évidemment la **loi uniforme** sur $\{1, 2, 3\}$.

$$P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = P(X_1 = 3) = \frac{1}{3}.$$

2. Simulation informatique : la variable `tirage` contient la valeur du tirage suivant, qui permet de décider quelle sera la nouvelle valeur de `X`.

```
k = input('Donner un entier k : ')
X = grand(1,1,'uin',1,3)
for i = 2:k
    tirage = grand(1,1,'uin',1,3)
    if X == 1 then
        X = tirage
    elseif tirage <> X then
        X = 1
    end
disp(X)
```

3. On note U_k la matrice $\begin{pmatrix} P(X_k = 1) \\ P(X_k = 2) \\ P(X_k = 3) \end{pmatrix}$.

   a) Sachant que $[X_k = 1]$ est réalisé : le k-ième tirage n'a alors pas d'influence sur le tirage suivant, dans le sens où la v.a.r. X_{k+1} prend alors simplement la valeur de la $(k+1)$-ième boule tirée :

$$P_{[X_k=1]}(X_{k+1} = 1) = P_{[X_k=1]}(X_{k+1} = 2) = P_{[X_k=1]}(X_{k+1} = 3) = \frac{1}{3}.$$

   Sachant que $[X_k = 2]$ est réalisé, il y a alors, d'après l'énoncé, deux valeurs possibles de X_{k+1} : $[X_{k+1} = 2]$ sera réalisé si et seulement si on retire à nouveau la boule 2 au $(k+1)$-ième tirage ; sinon (tirage de la boule 1 ou de la boule 3), X_{k+1} prendra la valeur 1 :

$$P_{[X_k=2]}(X_{k+1} = 1) = \frac{2}{3},\ P_{[X_k=2]}(X_{k+1} = 2) = \frac{1}{3},\ P_{[X_k=2]}(X_{k+1} = 3) = 0.$$

   Un raisonnement similaire donne les probabilités conditionnelles :

$$P_{[X_k=3]}(X_{k+1} = 1) = \frac{2}{3},\ P_{[X_k=3]}(X_{k+1} = 2) = 0,\ P_{[X_k=3]}(X_{k+1} = 3) = \frac{1}{3}.$$

   b) La formule des probabilités totales, écrite trois fois avec le même système complet d'événement $\{[X_k = 1], [X_k = 2], [X_k = 3]\}$, donne :

$$\begin{aligned} &P(X_{k+1} = 1) \\ &= P_{[X_k=1]}(X_{k+1} = 1).P(X_k = 1) + P_{[X_k=2]}(X_{k+1} = 1).P(X_k = 2) + P_{[X_k=3]}(X_{k+1} = 1).P(X_k = 3) \\ &= \frac{1}{3}.P(X_k = 1) + \frac{2}{3}.P(X_k = 2) + \frac{2}{3}.P(X_k = 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P(X_{k+1} = 2) \\ &= P_{[X_k=1]}(X_{k+1} = 2).P(X_k = 1) + P_{[X_k=2]}(X_{k+1} = 2).P(X_k = 2) + P_{[X_k=3]}(X_{k+1} = 2).P(X_k = 3) \\ &= \frac{1}{3}.P(X_k = 1) + \frac{1}{3}.P(X_k = 2) + 0.P(X_k = 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P(X_{k+1} = 3) \\ &= P_{[X_k=1]}(X_{k+1} = 3).P(X_k = 1) + P_{[X_k=2]}(X_{k+1} = 3).P(X_k = 2) + P_{[X_k=3]}(X_{k+1} = 3).P(X_k = 3) \\ &= \frac{1}{3}.P(X_k = 1) + 0.P(X_k = 2) + \frac{1}{3}.P(X_k = 3) \end{aligned}$$

Matriciellement, cela s'écrit :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad U_{k+1} = \begin{pmatrix} P(X_{k+1}=1) \\ P(X_{k+1}=2) \\ P(X_{k+1}=3) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} P(X_k=1) \\ P(X_k=2) \\ P(X_k=3) \end{pmatrix} = AU_k$$

c) Une récurrence immédiate donne alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ U_k = A^{k-1}.U_1$.

Il faut encore vérifier que : $U_1 = AU_0$, en posant $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a bien : $AU_0 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = U_1$,

ce qui donne finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ U_k = A^{k-1}U_1 = A^{k-1}.AU_0 = A^k U_0, \text{ relation encore vraie pour } k = 0 \text{ avec } A^0 = I$$

4. a) Il est évident que : $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = M + \frac{1}{3}I.$

La matrice identité commute avec toute matrice, donc $\frac{1}{3}I$ et M commutent, et d'après la formule du **binôme de Newton** :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = \left(M + \frac{1}{3}I\right)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} M^j (\frac{1}{3}I)^{k-j}$$
$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} M^j (\frac{1}{3})^{k-j}.I^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\frac{1}{3})^{k-j}.M^j$$

b) L'addition matricielle se faisant coefficient par coefficient, ceux de la première colonne de A^k sont, d'après la formule précédente :

$$(A^k)_{1,1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\frac{1}{3})^{k-j}.\left[\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^j + \frac{1}{2}(-\frac{2}{3})^j\right]$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\frac{2}{3})^j (\frac{1}{3})^{k-j} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-\frac{2}{3})^j (\frac{1}{3})^{k-j}$$
$$= \frac{1}{2}.\left[(\frac{2}{3}+\frac{1}{3})^k + (-\frac{2}{3}+\frac{1}{3})^k\right] = \frac{1}{2}\left(1 + (-\frac{1}{3})^k\right)$$

$$(A^k)_{2,1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\frac{1}{3})^{k-j}.\left[\frac{1}{4}(\frac{2}{3})^j - \frac{1}{4}(-\frac{2}{3})^j\right]$$
$$= \frac{1}{4}.\left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\frac{2}{3})^j (\frac{1}{3})^{k-j} - \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-\frac{2}{3})^j (\frac{1}{3})^{k-j}\right]$$
$$= \frac{1}{4}.\left[(\frac{2}{3}+\frac{1}{3})^k - (-\frac{2}{3}+\frac{1}{3})^k\right] = \frac{1}{4}.\left(1 - (-\frac{1}{3})^k\right)$$

$(A^k)_{3,1} = (A^k)_{2,1}$ puisque les éléments correspondants de M^j sont égaux

Il reste à dire que : $\forall k \in \mathbb{N},\ U_k = A^k.U_0 = A^k.\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est simplement égale à la première colonne de A^k, ce qui donne bien les résultats attendus pour la loi de X_k :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = \frac{1}{2}\left[1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right], \quad P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4}\left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right].$$

c) Puisque $-1 < -\frac{1}{3} < 1$, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = 0$, et par conséquent :

$$\lim_{k\to+\infty} P(X_k = 1) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{k\to+\infty} P(X_k = 2) = \frac{1}{4} = \lim_{k\to+\infty} P(X_k = 3)$$

On en déduit que la suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, converge en loi vers une variable aléatoire X dont la loi est donnée par :

$$P(X = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(X = 2) = \frac{1}{4} = P(X = 3)$$

5. a) $X_k(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ est fini, donc X_k admet une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned} E(X_k) &= 1.P(X_k = 1) + 2.P(X_k = 2) + 3.P(X_k = 3) \\ &= \frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} + 3.\frac{1}{4} + \left[\frac{1}{2} - 2.\frac{1}{4} - 3.\frac{1}{4}\right].(-\frac{1}{3})^k = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^k \end{aligned}$$

b)
```
function y = esp(k)
    y = 7/4 - 3/4*(-1/3)^k
endfunction
```