MATHÉMATIQUES - Edhec E 2009

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

Dans cet exercice, on considère la fonction définie comme suit :

$$f(0) = 1, \quad \text{et pour tout } x \text{ non nul de }]-\infty, 1[, \quad f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}.$$

1. Comme la fonction f est définie de façon particulière en $x = 0$, il convient de séparer l'étude de la continuité en deux étapes :

   - Sur les intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; 1[$, la fonction f est bien définie car :
     $x \in]-\infty; 0[\implies 1 - x > 1 \implies \ln(1-x)$ existe et $\ln(1-x) > 0$, et aussi :
     $x \in]0; 1[\implies 0 < 1 - x < 1 \implies \ln(1-x)$ est défini et $\ln(1-x) < 0$.

     Ainsi : la fonction f est bien définie et continue sur $]-\infty; 0[$ et $]0; 1[$, comme composition et quotient de fonctions continues.

   - Étude de la continuité de f en 0 : on sait que $f(0) = 1$ d'après l'énoncé, et on remarque par ailleurs que :

     $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$ (équivalent classique), donc : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x}{\ln(1-x)} = 1$.

     Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1-x} = 1$, on a bien : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$, ce qui donne bien la continuité de f en 0.

   La fonction f est donc continue sur $]-\infty; 1[$.

2. a) On utilise ici le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1+u)$:

   $$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

   Et comme $\lim\limits_{x\to 0} -x = 0$: $\quad \ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

   b) On en déduit, pour x au voisinage de 0 :

   $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-x}{(1-x)(-x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))} = \frac{-x}{-x - \frac{1}{2}x^2 + x^2 + o(x^2)} \\ &= \frac{-x}{-x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x + o(x)} \end{aligned}$$

   En simplifiant par $-x$ la fraction... On se retrouve avec une expression du type $\dfrac{1}{1+u}$, où $u = -\frac{1}{2}x + o(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

Par substitution dans le développement limité à l'ordre 1 en 0 : $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + o(u)$:

$$f(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$

Ce développement limité de $f(x)$ à l'ordre 1 en 0 prouve effectivement que f est dérivable en 0, avec $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

3. a) La fonction f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, 1[$ en tant que quotient de fonctions dérivables, et :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[,\ f'(x) &= \frac{-1.[(1-x).\ln(1-x)] - (-x).[-1.\ln(1-x) + (1-x).\frac{-1}{1-x}]}{[(1-x).\ln(1-x)]^2} \\ &= \frac{(x-1).\ln(1-x) - x.\ln(1-x) - x.1}{[(1-x).\ln(1-x)]^2} \\ &= -\frac{\ln(1-x) + x}{[(1-x).\ln(1-x)]^2}\end{aligned}$$

b) Soit $g:\ x \mapsto \ln(1-x) + x$, bien définie et dérivable sur $]-\infty; 1[$.

$$\forall x < 1 : \quad g'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 = \frac{-1+1-x}{1-x} = \frac{-x}{1-x}$$

Lorsque $x \in]-\infty; 1[,\ 1 - x > 0$, donc le signe de $g'(x)$ est celui de $-x$.

Par conséquent : $\forall x \in]-\infty; 0[,\ g'(x) > 0$ et la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle.
Sur $]0; 1[,\ g'(x) < 0$ et la fonction g est strictement décroissante sur cet intervalle.
La fonction g admet donc un maximum en $x = 0$, qui vaut $g(0) = \ln(1) + 0 = 0$, on peut donc affirmer que :

$$\forall x \in]-\infty; 1[,\ g(x) \leqslant 0 \quad \text{(ne s'annule qu'en 0)}.$$

Puisque : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[,\ f'(x) = -\dfrac{g(x)}{[(1-x)\ln(1-x)]^2}$, où $g(x) < 0$ sur ce domaine,

on peut affirmer que : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[,\ f'(x) > 0$ et la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et $]0; 1[$.

Remarque : la continuité de f en 0 assure que les deux branches de la courbe se "raccordent" en 0, et que f est en fait strictement croissante sur $]-\infty; 1[$.

c) Pour calculer les limites aux bornes de f, on regroupe intelligemment les termes en fonction du point en lequel on se situe :
Lorsque $x \to -\infty$: $f(x) = \dfrac{-x}{1-x} \times \dfrac{1}{\ln(1-x)} = \dfrac{-1}{1/x - 1} \times \dfrac{1}{\ln(1-x)}$, où :

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{1/x - 1} = \frac{-1}{0-1} = 1$, et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 1 - x = +\infty$, d'où : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \ln(1-x) = +\infty$, et par inverse et produit : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Lorsque $x \to 1$ par valeurs inférieures $(x < 1)$: $1 - x$ tend vers 0 avec $1 - x > 0$, et :

$\displaystyle\lim_{x\to1^-} -x = -1$, $\displaystyle\lim_{x\to1^-} (1-x).\ln(1-x) = \lim_{X\to0^+} X\ln(X) = 0^-$ (le signe est important ! quand $X \to 0^+$, $X > 0$ et $\ln(X) < 0$), d'où par quotient : $\displaystyle\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$	0	1
f	0	1	$+\infty$

4. a) Il a été démontré que la fonction f est continue, strictement croissante sur $]-\infty;1[$, donc sur $[0,1[$. Elle réalise donc une bijection, d'après le théorème du même nom, de $[0;1[$ sur l'intervalle image $J=[1,+\infty[$.

   Il suffit donc de dire que : tout entier naturel $n\in\mathbb{N}^*$ appartient bien à l'intervalle image $J=[1,+\infty[$, et possède donc un unique antécédent $u_n\in[0,1[$ par f, tel que :

$$f(u_n)=n \iff u_n=f^{-1}(n)$$

   En particulier et par définition : $f(0)=1 \iff 0=f^{-1}(1)=u_1$.

   b) Le théorème de la bijection donne aussi les limites de f^{-1}, notamment : $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=1$ puisque $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$.

   On peut donc directement conclure : $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(n)=1 \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$, la suite (u_n) est bien convergente.

Exercice 2

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0,1[$ et on note $q=1-p$.

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, indépendantes et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. a) D'après la relation entre événements rappelée par l'énoncé, et par indépendance des variables aléatoires X et Y :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad P(Z>k)=P(X>k)\times P(Y>k)=\big[P(X>k)\big]^2$$

   La dernière égalité venant du fait que x et Y suivent la même loi.

   On doit donc calculer $P(X>k)$; on commence par écrire : $\forall k\in\mathbb{N},\ [X>k]=\bigcup\limits_{n=k+1}^{+\infty}[X=n]$.

   C'est une union disjointe, donc par σ-additivité :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad P(X>k)=\sum_{n=k+1}^{+\infty}P(X=n)=\sum_{n=k+1}^{+\infty}q^{n-1}.p$$
$$\overset{[j=n-1]}{=} p\sum_{j=k}^{+\infty}q^j=p\times\frac{q^k}{1-q}$$
$$\forall k\in\mathbb{N},\quad P(X>k)=q^k \qquad \text{puisque } q=1-p \iff p=1-q$$

   Ainsi : $\quad\forall k\in\mathbb{N},\quad P(Z>k)=\left(q^k\right)^2=q^{2k}$.

b) Il est très important de savoir redémontrer cette relation classique ! Pour tout entier $k \geqslant 1$, on peut toujours écrire, puisque Z est une variable aléatoire à valeurs entières :

$$[Z > k-1] = [Z = k] \cup [Z > k]$$

Il s'agit d'une union disjointe, donc le passage à la probabilité donne :

$$\forall k \geqslant 1, \quad P(Z > k-1) = P(Z = k) + P(Z > k) \iff \forall k \geqslant 1, \quad P(Z = k) = P(Z > k-1) - P(Z > k)$$

c) Remarquons d'abord que l'univers image de $Z = \text{Inf}(X, Y)$ est celui de X et Y, à savoir $\mathbb{N}^*$.
Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, d'après les deux questions précédentes :

$$P(Z = k) = P(Z > k-1) - P(Z > k) = q^{2(k-1)} - q^{2k} = q^{2(k-1)}.(1 - q^2) = \left(q^2\right)^{k-1}.(1 - q^2)$$

La forme de la probabilité générale de la loi de Z obtenue ici, correspond bien à celle de la loi géométrique de paramètre $(1 - q^2)$.

2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :

Pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel pair, on pose $T(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{2}$, et, pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel impair, on pose $T(\omega) = \dfrac{1 + X(\omega)}{2}$.

On admet que T est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) D'après la définition de T : pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega)$ est un entier naturel pair, $\dfrac{X(\omega)}{2} = T(\omega)$ est bien un entier naturel ; il n'est d'ailleurs pas nul car la première valeur paire que prend X est 2.

Sinon $X(\omega)$ est un entier impair, et alors $1 + X(\omega)$ est un entier pair, ce qui assure que dans ce cas, $\dfrac{1 + X(\omega)}{2}$ est un entier naturel, non nul puisque $1 + X(\omega) > 0$.
On a bien démontré que T prend des valeurs entières non nulles ($T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$).

b) Réciproquement, soit k un entier naturel non nul : $T(\omega) = k$ peut-être obtenu via la relation $\dfrac{X(\omega)}{2} = k \iff X(\omega) = 2k$, qui est une valeur possible de X,

ou via la relation $\dfrac{1 + X(\omega)}{2} = k \iff X(\omega) = 2k - 1$, qui est aussi possible puisque :

$$k \geqslant 1 \iff 2k \geqslant 2 \iff 2k - 1 \geqslant 1.$$

Ainsi, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $[T = k]$ est un événement possible, et $k \in T(\Omega)$.
Par double inclusion, on a bien : $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

c) D'après ce qui précède : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $[T = k] = [X = 2k] \cup [X = 2k - 1]$, donc par union disjointe :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \; P(T = k) = P(X = 2k) + P(X = 2k - 1) = q^{2k-1}p + q^{2k-2}p$$

$$= q^{2k-2}p(q + 1) = q^{2k-2}(1 - q)(1 + q) = q^{2k-2}(1 - q^2)$$

La variable aléatoire X suit bien la même loi que T.

3. On rappelle ici que la fonction `rand()` permet de simuler n'importe quelle épreuve de Bernoulli : la loi uniforme à densité ainsi simulée, donne un réel de $[0, 1]$ qui est inférieur à p avec la probabilité p.
On en déduit le script complété :

```
p = input("probabilité de pile : ")
x = 0
lancer = 1 // initialisation de la variable lancer avant le 1er lancer
while (lancer>p)      // tant que les lancers donnent Face
    lancer = rand()   // on fait un lancer de plus
    x = x+1           // le compteur du nombre de lancers est incrémenté
end
if (x == 2*floor(x/2)) then  // si x prend une valeur paire, alors :
    t = x/2
else                         // sinon x est impair
    t = (1+x)/2
end
disp(t)
```

Exercice 3

Dans tout l'exercice, λ désigne un réel strictement positif.

1. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a) Une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre λ, admet pour densité la fonction $f_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} \mathrm{d}x$ correspond alors à l'espérance de T, qui est bien définie et vaut $\dfrac{1}{\lambda}$.

Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} \lambda^2 x e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \lambda E(T) = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

b) La fonction h est bien continue et positive sur $]-\infty, 0[$ comme fonction constante nulle, continue et positive sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions positives et continues sur cet intervalle.

D'après ce qui précède : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lambda^2 x e^{-\lambda x} \mathrm{d}x$ est convergente et vaut 1.

La fonction h est donc une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire admettant la fonction h pour densité.

c) Toujours en se référant au cours sur la loi exponentielle : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x h(x)\mathrm{d}x = \lambda.\int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} \mathrm{d}x$ est bien convergente et vaut $\lambda E(T^2)$.

Le moment d'ordre 2 de T est donné par la formule de Koenig-Huygens :

$$E(T^2) = V(T) + E(T)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2},$$

donc :

$$\int_0^{+\infty} x h(x)\mathrm{d}x = \lambda \times \frac{2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda}$$

Comme h est nulle sur $]-\infty, 0[$, et positive sur $[0, +\infty[$, on vient de démontrer que X admet une espérance, qui vaut :

$$E(X) = \frac{2}{\lambda}$$

2. Dans cette question, on considère une variable aléatoire Y de densité f, nulle sur $]-\infty; 0[$, continue sur $[0; +\infty[$ et strictement positive sur $[0; +\infty[$.
On note alors F la fonction de répartition de Y.

La stricte positivité de f sur $]0, +\infty[$ implique la stricte croissance de F sur cet intervalle. Ce résultat, combiné au fait que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ puisque F est une fonction de répartition, implique :

$\forall x \in]0, +\infty[,\ F(x) < 1 \iff 1 - F(x) > 0$.
Ce résultat est encore vrai sur $]-\infty, 0]$, où F est nulle.

La fonction $g:\ x \mapsto \begin{cases} -f(x)\ln\big(1 - F(x)\big) \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$ est ainsi bien définie sur $\mathbb{R}$.

3. a) La fonction g est bien positive, car nulle, sur $]-\infty, 0]$.
Pour tout $x \in [0, +\infty[$: $\quad f(x) \geqslant 0 \iff -f(x) \leqslant 0$ puisque f est une densité de probabilité.
Comme par ailleurs : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant F(x) < 1$, alors pour tout $x \in]0, +\infty[$:
$0 < 1 - F(x) \leqslant 1 \Longrightarrow \ln\big(1 - F(x)\big) \leqslant 0$.
Ainsi, par produit de deux facteurs négatifs, g est aussi positive sur $]0, +\infty[$, donc finalement sur $\mathbb{R}$ tout entier.

b) La fonction g est continue sur $]-\infty, 0[$, car constante nulle sur cet intervalle.
Sur $]0, +\infty[$: $x \mapsto 1 - F(x)$ est continue, à valeurs dans $]0, +\infty[$ sue lequel ln est continue. Comme f est également continue sur $]0, +\infty[$: par composition et produit de fonctions continues, g est continue sur $]0; +\infty[$.

c) Soit $A > 0$: on réalise une intégration par parties dans $\displaystyle\int_0^A g(x)\mathrm{d}x = \int_0^A -f(x)\ln\big(1 - F(x)\big)\mathrm{d}x$ en posant :

$$\begin{aligned} v(x) &= \ln\big(1 - F(x)\big) &&\longrightarrow \quad \frac{-f(x)}{1 - F(x)} \\ u'(x) &= -f(x) &&\longrightarrow \quad u(x) = 1 - F(x) \end{aligned}$$

les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, donc :

$$\int_0^A g(x)\mathrm{d}x = \Big[\big(1 - F(x)\big).\ln\big(1 - F(x)\big)\Big]_0^A + \int_0^A f(x)\mathrm{d}x = \big(1 - F(A)\big)\ln\big(1 - F(A)\big) + \int_0^A f(x)\mathrm{d}x$$

Lorsque A tend vers $+\infty$: $\quad x = 1 - F(A)$ tend vers $1 - 1 = 0$.
Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$ par croissances comparées : $\quad \lim\limits_{A \to +\infty} \big(1 - F(A)\big)\ln\big(1 - F(A)\big) = 0$ par composition de limites.
Par ailleurs, $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_0^A f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ est bien convergente, et vaut 1.

d) On a démontré dans les questions précédentes que g est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Comme de plus, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = 1$, la fonction g peut effectivement être considérée comme la densité d'une variable aléatoire Z.

e) Étude d'un cas particulier :

Soit Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

La densité f_Y : $x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \lambda x e^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$ est bien nulle sur $]-\infty, 0[$, continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$. Elle vérifie donc les conditions de la question 2.

La densité g correspondante, est nulle sur $]-\infty; 0[$, et définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g(x) = -\lambda e^{-\lambda x} \ln\left(1 - \left(1 - e^{-\lambda x}\right)\right) = -\lambda e^{-\lambda x} \times (-\lambda x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$$

on retrouve la densité h, donc Z suit la même loi que X.

PROBLÈME

Partie 1.

On note e_0, e_1, e_2 les fonctions définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e_0(t) = 1, \quad e_1(t) = t, \quad e_2(t) = t^2$$

On rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de l'espace vectoriel E constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E associe $f(P) = P'' - 5P' + 6P$, où P' et P'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de P.

1. Démontrons d'abord que f est une application linéaire ; soient P et Q deux polynômes de l'espace E, et λ un réel quelconques ; par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} f(\lambda.P + Q) &= (\lambda.P + Q)'' - 5(\lambda.P + Q)' + 6(\lambda.P + Q) = \lambda.P'' + Q'' - 5\lambda.P' - 5Q' + 6\lambda.P + 6Q \\ &= \lambda.(P'' - 5P' + 6P) + (Q'' - 5Q' + 6Q) = \lambda.f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire. De plus, pour tout polynôme P de E, de degré inférieur ou égal à 2 : P'' et P' sont eux-mêmes de degré inférieur à 2, et par somme de tels polynômes, $f(P)$ est de degré inférieur ou égal à 2.

$\forall P \in E,\ f(P) \in E$, et f est bien un endomorphisme de E.

2. On calcule les images des trois vecteurs de base $e_0,\ e_1$ et e_2 par f :

- ⋆ $f(e_0) = e_0'' - 5e_0' + 6e_0 = 6e_0$ puisque $e_0'' = e_0' = 0$ (dérivée d'un polynôme constant).
- ⋆ $f(e_1) = e_1'' - 5e_1' + 6e_1 = 0 - 5e_0 + 6e_1$
- ⋆ $f(e_2) = e_2'' - 5e_2' + 6e_2 = 2e_0 - 10e_1 + 6e_2$

Et ainsi :

$$A = \text{Mat}_{(e_0,e_1,e_2)}(f) = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 0 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

3. a) La matrice représentative A de f est triangulaire supérieure, sans aucun coefficient diagonal nul : elle est donc inversible, et f est donc un endomorphisme de E. Par conséquent, $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ est réduit au polynôme nul.

b) La matrice de l'automorphisme réciproque f^{-1} est A^{-1}, qui vaut après calcul :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{19}{108} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{18} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Partie 2

On note F l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et Id l'endomorphisme identité de F. On considère l'application g qui, à toute fonction u de F, associe $g(u) = u'' - 5u' + 6u$, où u' et u'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de u.

1. La linéarité de la dérivation donne la linéarité de l'application g, de la même façon que pour f. De plus, pour toute fonction u de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, u' et u'' restent de classe C^∞, donc $g(u) = u''-5u'+6u$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Ainsi g est un endomorphisme de F.
2. Dans cette question, on se propose de déterminer $\text{Ker}\,(g - 6Id)$. On considère donc une fonction u élément de $\text{Ker}\,(g - 6Id)$.

   a) La fonction $j:\ x \mapsto u'(x).e^{-5x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ j'(x) = u''(x).e^{-5x} - 5.u'(x)e^{-5x} = (u''(x) - 5u'(x)).e^{-5x} = (g(u)(x) - 6u(x)).e^{-5x} = 0$
   puisque $u \in \text{Ker}(g - 6Id)$.
   La fonction j est bien constante sur $\mathbb{R}$, puisque sa dérivée est nulle sur $\mathbb{R}$.

   b) Il existe donc un réel λ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ j(x) = \lambda \iff u'(x).e^{-5x} = \lambda \iff u'(x) = \lambda.e^{5x}$.
   D'après les règles de calcul de primitives, il existe donc un deuxième réel μ tel que :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = \frac{\lambda}{5}.e^{5x} + \mu.x$.
   Il existe donc deux réels λ' et μ tels que : $u = \lambda'.u_2 + \mu.u_1$, c'est-à-dire que tout élément de $\text{Ker}(g - 6Id)$ appartient à $\text{Vect}(u_1, u_2)$, et donc :

   $$\text{Ker}(g - 6Id) \subset \text{Vect}(u_1, u_2)$$

   Il reste à vérifier l'inclusion réciproque :
   soit u une fonction de $\text{Vect}(u_1, u_2)$, de la forme $\lambda.u_2 + \mu.u_1$; la fonction u est bien de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et : $g(u) = \lambda.g(u_1) + \mu.g(u_2)$, où :

   - ⋆ $\forall x \in \mathbb{R},\ g(u_1)(x) = u_1''(x) - 5u_1'(x) + 6u_1(x) = 0 - 0 + 6 = 6u_1(x)$
   - ⋆ $\forall x \in \mathbb{R},\ g(u_2)(x) = u_2''(x) - 5u_2'(x) + 6u_2(x) = 25e^{5x} - 25e^{5x} + 6e^{5x} = 6e^{5x} = 6u_2(x)$

   On en déduit que : $g(u) = 6.(\lambda.u_1 + \mu.u_2) = 6.u \iff g(u) - 6u = 0$ (application nulle), donc que $u \in \text{Ker}(g - 6Id)$, et ainsi :

   $$\text{Ker}(g - 6Id) = \text{Vect}(u_1, u_2).$$

   On se propose, dans les trois questions suivantes de déterminer $\ker\,(g)$. On considère donc u une fonction de $\ker\,(g)$.
3. On pose $v = u' - 2u$.

   a) Au vu des hypothèses faites sur u : $v' = u'' - 2u' = 5u' - 6u - 2u' = 3u' - 6u = 3v$.

   b) La fonction $h:\ x \mapsto v(x)e^{-3x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = v'(x)e^{-3x} - 3v(x)e^{-3x} = (v'(x) - 3v(x))e^{-3x} = 0$, donc h est bien une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

c) Il existe donc une constante réelle α telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \alpha \iff v(x)e^{-3x} = \alpha \iff v(x) = \alpha e^{-3x}$$

4. On pose $w = u' - 3u$.

a) Comme précédemment : $w' = u'' - 3u' = 5u' - 6u - 3u' = 2u' - 6u = 2w$.

b) La fonction $k : \ x \mapsto w(x)e^{-2x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et :
$\forall x \in \mathbb{R}, \ k'(x) = w'(x)e^{-2x} - 2w(x)e^{-2x} = (w'(x) - 2w(x))e^{-2x} = 0$, donc k est bien une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

c) Il existe donc une constante réelle β telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad k(x) = \beta \iff w(x)e^{-2x} = \beta \iff w(x) = \beta e^{-2x}$$

5. a) Au vu de ce qui précède : si $u \in \mathrm{Ker}(g)$, alors $u' - 2u$ est un multiple scalaire de la fonction u_3, et $u' - 3u$ est un multiple scalaire de la fonction u_4.
Il suffit alors de remarquer que : $u = (u - 2u') - (u - 3u')$ pour en conclure que si $u \in \mathrm{Ker}(g)$, alors il existe deux réels α et β tels que : $u = \alpha.u_3 - \beta.u_4$, et donc $u \in \mathrm{Vect}(u_3, u_4)$.
De la sorte : $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Vect}(u_3, u_4)$, il reste à vérifier l'inclusion réciproque.
Soit $u \in \mathrm{Vect}(u_3, u_4)$, il existe donc α et β deux réels tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \ u(x) = \alpha.e^{3x} + \beta.e^{2x}$. Mais alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ g(u)(x) = u''(x) - 5u'(x) + 6u(x) = 9\alpha e^{3x} + 4\beta e^{2x} - 15\alpha e^{3x} - 10\beta e^{2x} + 6\alpha e^{3x} + 6\beta e^{2x} = 0$$

et $u \in \mathrm{Ker}(g)$, ce qui prouve l'inclusion réciproque $\mathrm{Vect}(u_3, u_4) \subset \mathrm{Ker}(g)$. Finalement :

$$\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}(u_3, u_4)$$

b) La question précédente donne pour $\mathrm{Ker}(g)$, une famille génératrice de deux vecteurs (u_3, u_4), il reste à vérifier que cette une famille libre. Soient donc α et β deux réels tels que : $\alpha.u_3 + \beta.u_4 = 0$ (application nulle), ce qui a le sens de : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \alpha.e^{3x} + \beta.e^{2x} = 0$.
Cette égalité étant vraie pour tout réel x, elle l'est en particulier pour $x = 0$ et $x = 1$, ce qui donne les relations :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha.e^3 + \beta.e^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \alpha(e^3 - e^2) = 0 \end{cases} \iff \alpha = 0 = \beta$$

puisque $e^3 - e^2 \neq 0$.

On a bien montré : $\alpha.u_3 + \beta.u_4 = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$, donc la famille (u_3, u_4) est libre, et c'est une base de $\mathrm{Ker}(g)$, ce qui permet de conclure :

$$\dim\Big(\mathrm{Ker}(g)\Big) = 2$$