MATHÉMATIQUES - Edhec E 2007

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

Pour toute matrice M élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note ${}^t M$ la matrice transposée de M, définie de la façon suivante : si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors ${}^t M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On rappelle que $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note φ l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe $\varphi(M) = M + {}^t M$.

1. a) Notons d'emblée que : pour toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ${}^t M$ appartient encore à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $\varphi(M) = M + {}^t M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ comme somme de deux matrices de ce format.

   Pour toutes matrices $M,\ N$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et pour tout réel λ :

$$\begin{aligned}
\varphi(M + \lambda.N) &= (M + \lambda.N) + {}^t(M + \lambda.N) \\
&= M + \lambda.N + {}^t M + \lambda.\,{}^t N \qquad \text{par linéarité de la transposée} \\
&= (M + {}^t M) + \lambda.(N + {}^t N) = \varphi(M) + \lambda.\varphi(N)
\end{aligned}$$

   Donc φ est bien une application linéaire, et c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   b) On calcule les images des quatres vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

   - $\varphi(E_1) = E_1 + {}^t E_1 = 2E_1$ (E_1 est symétrique)
   - $\varphi(E_2) = E_2 + {}^t E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_2 + E_3$
   - $\varphi(E_3) = E_3 + {}^t E_3 = E_2 + E_3$
   - $\varphi(E_4) = E_4 + {}^t E_4 = 2E_4$

   D'où :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(E_1) & \varphi(E_2) & \varphi(E_3) & \varphi(E_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array}$$

   c) La matrice A représentant φ est **symétrique réelle** : le théorème admis du cours permet d'affirmer directement que A est diagonalisable.

   Cette matrice possède également 2 lignes égales, et à ce titre est non-inversible : cela implique que l'endomorphisme associé φ est non-bijectif.

2. Le calcul matriciel donne : $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, et on remarque ainsi que $A^2 = 2.A$.

Mais alors : $A^3 = A \times A^2 = A \times 2.A = 2A^2 = 2 \times 2.A = 4.A$, etc...

il est logique de conjecturer que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$A^n = 2^{n-1}.A$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; démontrons-le par récurrence :

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 1$: $A^1 = A$ et $2^{1-1}.A = 2^0.A = 1.A = A$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, et sous cette hypothèse, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie :

On admet : $A^n = 2^{n-1}.A$, donc on obtient successivement :

$$A^{n+1} = A^n \times A = 2^{n-1}.A \times A = 2^{n-1}.A^2 = 2^{n-1} \times 2.A = 2^n.A,$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

Remarque : la propriété n'est pas vraie au rang 0, puisque $A^0 = I_4 \neq 2^{-1}.A = \dfrac{1}{2}.A$.

3. a) D'après la propriété fondamentale de cours : $\text{Im}(\varphi)$ est engendrée par les images par φ des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ce qui s'écrit :

$$\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}\big(\varphi(E_1), \varphi(E_2), \varphi(E_3), \varphi(E_4)\big) = \text{Vect}(2E_1, E_2+E_3, E_2+E_3, 2E_4) = \text{Vect}(E_1, E_2+E_3, E_4)$$

Selon les propriétés des sous-espaces engendrés : on peut supprimer de la famille génératrice un vecteur redondant, et multiplier par un scalaire non-nul un vecteur de la famille, sans changer l'espace engendré.

La famille $(E_1, E_2 + E_3, E_4)$ est ainsi génératrice de $\text{Im}(\varphi)$, il reste à vérifier que c'est une famille libre.

Soient a, b, c trois réels tels que $a.E_1 + b.(E_2 + E_3) + c.E_4 = 0_2$ (matrice nulle)

$$\iff \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff a = b = c = 0$$

d'après le principe d'identification des coefficients. La famille $(E_1, E_2 + E_3, E_4)$ est ainsi une base de $\text{Im}(\varphi)$, ce qui justifie que :

$$\dim \text{Im}(\varphi) = 3.$$

b) Le **théorème du rang**, appliqué à l'endomorphisme φ de l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, donne :

$$\dim \text{Im}(\varphi) + \dim \text{Ker}(\varphi) = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \iff \dim \text{Ker}(\varphi) = 4 - 3 = 1$$

Il suffit donc de trouver une matrice non-nulle M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, pour qu'elle forme une base de ce sous-espace.

Les calculs précédents permettent de vérifier sans peine que puisque $\varphi(E_2) = \varphi(E_3)$, alors :

$$\varphi(E_2) - \varphi(E_3) = 0_2 \iff \varphi(E_2 - E_3) = 0_2 \qquad \text{par linéarité de } \varphi$$

Ainsi $E_2 - E_3$ est un élément non nul de $\text{Ker}(\varphi)$, et $(E_2 - E_3)$ en est une base.

c) Revenons à la définition du sous-espace propre de φ associé à la valeur propre 2 :

$$E_2(\varphi) = \left\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \middle| \varphi(M) = 2.M\right\}$$

$$\text{Or :} \quad \varphi(M) = 2.M \iff M + {}^{t}M = 2.M \iff {}^{t}M = M \iff M \text{ est symétrique}$$

Or l'ensemble $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées symétriques d'ordre 2 est :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \middle| (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ a.\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_1} + b.\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_2+E_3} + c.\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=E_4} \middle| (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect}(E_1, E_2+E_3, E_4)\end{aligned}$$

ce qui est la façon la plus claire de prouver que : $\quad E_2(\varphi) = \text{Im}(\varphi) \quad$ (cf. 3.a)).

d) Le théorème spectral s'applique ici dans toute sa rigueur pour dire que :

- $\text{Ker}(\varphi)$ étant de dimension 1, alors 0 est bien valeur propre de φ $\quad$ ($\text{Ker}(\varphi) = E_0(\varphi)$ étant le sous-espace propre associé).

- $\text{Im}(\varphi) = E_2(\varphi)$ étant de dimension 3 d'après ce qui précède, 2 est bien valeur propre de φ.

- La somme des dimensions des sous-espaces propres de φ est toujours inférieure ou égale à $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$.

  Or ici, on a déjà : $\quad \dim E_0(\varphi) + \dim E_2(\varphi) = 1 + 3 = 4$.

  Par conséquent :

- φ n'admet pas d'autre valeur propre que 0 et 2.

  On connaît une base (E_1, E_2+E_3, E_4) du sous-espace $E_2(\varphi) = \text{Im}(\varphi)$, et une base $(E_2 - E_3)$ de $E_0(\varphi) = \text{Ker}(\varphi)$.

Exercice 2

On admet que si Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires à densité, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle existe est définie par :

$$\text{Cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2)$$

On admet également que si Z_1 et Z_2 sont indépendantes, alors leur covariance est nulle.
On considère deux variables aléatoires réelles X et U définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et U suivant la loi discrète uniforme sur $\{-1, 1\}$.
On pose $Y = UX$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. a) La formule des probabilités totales appliquée avec le s.c.e. $\big([U=1],\ [U=-1]\big)$ donne :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(Y \leqslant x) &= P\big([U=1] \cap [Y \leqslant x]\big) + P\big([U=-1] \cap [Y \leqslant x]\big) \\ &= P\big([U=1] \cap [UX \leqslant x]\big) + P\big([U=-1] \cap [UX \leqslant x]\big) \\ &= P\big([U=1] \cap [X \leqslant x]\big) + P\big([U=-1] \cap [-X \leqslant x]\big) \\ &= P\big([U=1] \cap [X \leqslant x]\big) + P\big([U=-1] \cap [X \geqslant -x]\big)\end{aligned}$$

b) Comme U est X sont deux variables aléatoires indépendantes, on peut finir le calcul précédent :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ P(Y \leqslant x) &= P(U=1) \times P(X \leqslant x) + P(U=-1) \times P(X \geqslant -x) \\ &= \frac{1}{2} \times \Phi(x) + \frac{1}{2} \times (1 - \Phi(-x)) \\ &= \frac{1}{2} \times \Phi(x) + \frac{1}{2} \times \Phi(x) = \Phi(x)\end{aligned}$$

Selon les propriétés de la loi normale centrée, réduite. On en déduit que Y et X ont la même fonction de répartition sur $\mathbb{R}$, donc que ces deux variables aléatoires suivent la même loi.

2. a) L'espérance de U vaut : $E(U) = -1 \times P(U=-1) + 1 \times P(U=1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$

Par ailleurs : $XY = X \times UX = UX^2$. Comme U et X sont indépendantes, U et X^2 le sont aussi, et :

$$E(XY) = E(UX^2) = E(U) \times E(X^2) = 0$$

b) La covariance du couple (X, Y) est alors donnée par la formule :

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 = 0$$

3. a) D'après le cours sur la loi normale centrée réduite, et la formule de Koenig-Huygens :

$$E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 1 + 0 = 1$$

Le théorème de transfert donne ainsi l'égalité :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = 1 \iff \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = 1 \iff \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$$

car la fonction $x \mapsto x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$ est paire sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $A \in \mathbb{R}_+$: on réalise une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$, en possant :

$$\begin{aligned} u(x) &= x^3 &\longrightarrow\quad u'(x) &= 3x^2 \\ v'(x) &= x e^{-\frac{x^2}{2}} &\longrightarrow\quad v(x) &= -e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, donc pour tout $A \in \mathbb{R}_+$:

$$\int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \Big[-x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} \Big]_0^A + 3 \int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3 \int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$$

c) Les croissances comparées donnent : $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} = 0$, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$ converge comme on l'a vu, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$ converge, et vaut :

$$\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = 3 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{3}{2}\sqrt{2\pi}$$

d) La variable aléatoire X admet un moment d'ordre 4 si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$ est absolument convergente. Or la fonction $x \mapsto x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue, positive et paire sur $\mathbb{R}$: comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$ converge, cela suffit donc à assurer que X admet un moment d'ordre 4, qui vaut :

$$E(X^4) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{3}{2}\sqrt{2\pi} = 3$$

4. a) D'après la définition de Y : $X^2Y^2 = X^2 \times U^2X^2 = X^4$; en effet, la variable aléatoire U ne prenant que les valeurs -1 et 1, U^2 est une variable certaine égale à 1.

   On a bien, d'après la question précédente : $E(X^2Y^2) = 3$.

   b) La covariance du couple (X^2, Y^2) vaut :

$$\text{cov}(X^2, Y^2) = E(X^2Y^2) - E(X^2)E(Y^2) = 3 - 1 \times E(U^2X^2) = 3 - E(X^2) = 2$$

   c) Puisque la covariance du couple (X^2, Y^2), alors il est certain que X^2 et Y^2 ne sont *pas* indépendantes. Mais alors, X et Y ne sont pas non plus indépendantes, sinon X^2 et Y^2 le seraient, d'après le lemme des coalitions !

   d) Cet exercice a introduit deux variables aléatoires X et Y qui ne sont pas indépendantes, et pourtant de covariance nulle.

   On vérifie donc une fois de plus, cette fois dans le cas à densité, que la réciproque de l'implication :

$$X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \Longrightarrow \text{cov}(X, Y) = 0,$$

   est fausse en général !

Exercice 3

1. a) Question ultra-classique : la fonction $h : x \mapsto x - \ln(x)$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ avec : $\forall x > 0,\ h'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.

   L'étude du signe de h' montre que h est décroissante sur $]0; 1]$, puis croissante sur $[1; +\infty[$, et admet donc un minimum en $x = 1$.

   Ainsi : $\forall x > 0,\ h(x) \geqslant h(1) = 1$ ce qui implique bien : $\forall x > 0,\ h(x) > 0$.

   b) Il est donc possible de définir la fonction f sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$

   comme quotient de fonctions bien définies, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$ d'après ce qui précède.

2. a) La fonction f est d'abord continue sur $]0; +\infty[$, comme quotient de fonctions continues sur cet intervalle, où on a vu que le dénominateur ne s'annule pas.

   Pour la continuité en 0 : pour $x > 0$ proche de 0, on a :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x)(\frac{x}{\ln(x)} - 1)} = \frac{1}{\frac{x}{\ln(x)} - 1}, \quad \text{où :} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln(x)}, \text{ donc : } \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\frac{x}{\ln(x)} - 1} = \frac{1}{-1} = -1,$$

   soit : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$: la fonction f est bien continue en 0, donc en définitive sur $[0; +\infty[$.

   Remarque : le terme dominant en 0^+ est bien ici $\ln(x)$, d'où la factorisation réalisée ici.

   b) On étudie dans cette question le taux d'accroissement de f en 0 :

$$\forall x > 0,\ \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} - (-1)}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(x) + x - \ln(x)}{x - \ln(x)} = \frac{1}{x - \ln(x)}, \text{ où :}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x - \ln(x) = +\infty, \text{ donc par inverse : } \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x - \ln(x)} = 0 = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0},$$

   ce qui prouve bien que f est dérivable (à droite) en 0, avec : $f'_d(0) = 0$.

3. a) La fonction f est bien sûr dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions de référence dérivables sur cet intervalle, où le dénominateur ne s'annule pas.

$$\forall x > 0 : \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.(x-\ln(x)) - \ln(x).(1-\frac{1}{x})}{(x-\ln(x))^2} = \frac{1-\ln(x)}{(x-\ln(x))^2}.$$

b) Pour $x > 1$, on a : $\quad f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-\ln(x)} = \dfrac{\ln(x)}{x}.\dfrac{1}{1-\frac{\ln(x)}{x}}$, où : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées, ce qui implique : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \times \dfrac{1}{1-0} = 0.$

La courbe de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (c'est-à-dire l'axe des abscisses) en $+\infty$.

c) Le signe de $f'(x)$ est, sur $]0;+\infty[$, celui de $1-\ln(x)$ puisque le dénominateur est toujours strictement positif d'après 1. Comme : $1-\ln(x) > 0 \iff \ln(x) < 1 \iff x < e$, on en déduit le tableau de variation :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

4. Vu que : $\forall x > 0,\ x - \ln(x) > 0$ d'après 1.,le signe de f est donc celui de $\ln(x)$ sur $]0;+\infty[$.
On en déduit donc que f est négative sur $[0;1[$, puis positive sur $]1;+\infty[$ (et ne s'annule qu'en 0).

5. Pour tout réel positif $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

a) La fonction f étant continue sur $[0;+\infty[$, elle admet des primitives sur cet intervalle. La fonction F est ainsi définie sur $[0;+\infty[$, de par son expression, comme LA primitive de f qui s'annule en 0. À ce titre, F est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$, puisque sa dérivée f est continue.

Le signe de f, obtenu à la question précédente, donne les variations de F :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
F		$\searrow$		$\nearrow$	

b) $\forall x > 0, \quad \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{(\ln(t))^2}{2}\right]_1^x = \frac{(\ln(x))^2}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$

c) Pour tout réel $t > 1$, on sait que $\ln(t) > 0$, donc : $\quad t - \ln(t) < t \quad$ et $\quad t - \ln(t) > 0$ d'après 1.

Ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$: $\quad \dfrac{1}{t-\ln(t)} > \dfrac{1}{t}$, donc :

$$\forall t > 1, \quad \frac{\ln(t)}{t-\ln(t)} > \frac{\ln(t)}{t} \qquad (\ln(t) > 0)$$

Les fonctions concernées sont continues sur $[1;+\infty[$, pour $x>1$ les bornes sont dans l'ordre croissant, donc par croissance de l'intégrale :

$$\forall x \geqslant 1, \quad \int_1^x \frac{\ln(t)}{t-\ln(t)}\mathrm{d}t \geqslant \int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{(\ln(x))^2}{2}.$$

Le théorème de comparaison permet de conclure : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{\ln(t)}{t-\ln(t)}\mathrm{d}t = +\infty.$

On a par ailleurs : $\forall x \geqslant 1,\ F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ d'après la relation de Chasles.

La première intégrale est une constante réelle puisque f est continue sur $[0;1]$, la seconde tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On a bien : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$, ce qui signifie au passage que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$, est divergente.

PROBLÈME

Partie 1

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

1. a) La matrice M étant triangulaire, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, c'est-à-dire, rangées dans l'ordre décroissant :

$$\mathrm{Sp}(M) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$$

b) La matrice M est carrée d'ordre 3, et possède trois valeurs propres distinctes : elle est donc diagonalisable, selon le critère *suffisant*.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Le produit matriciel donne : $MP = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Or si on se souvient que le produit matriciel MP de deux matrices carrées revient à réaliser le produit de M par chacune des colonnes de P, produits qui forment les colonnes de MP, on en déduit :

- $M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc le vecteur $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie $MU_1 = 1.U_1$ et U_1 est vecteur propre de M pour la valeur propre $\lambda_1 = 1$.
- $M\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc le vecteur $U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie $MU_2 = \dfrac{1}{2}U_2$ et U_2 est vecteur propre de M pour la valeur propre $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$.
- $M\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$, donc le vecteur $U_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie $MU_3 = \dfrac{1}{3}U_3$ et U_3 est vecteur propre de M pour la valeur propre $\lambda_3 = \dfrac{1}{3}$.

b) La matrice P est inversible pour deux raisons :

- La plus évidente est que c'est une matrice triangulaire supérieure, dont les coefficients diagonaux sont tous non-nuls.
- On peut aussi dire que P est la matrice de la famille (U_1, U_2, U_3) constituée de trois vecteurs propres associés à 3 valeurs propres distinctes : d'après le cours, on sait que cette famille est libre, et donc que P est de rang maximal 3, donc inversible.

La matrice P est en fait la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, à la base de vecteurs propres (U_1, U_2, U_3).

La formule de changement de base s'écrit : $\quad M = PDP^{-1}$,

où D est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ des valeurs propres de M.

À partir de cette relation, la récurrence habituelle donne évidemment : $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = PD^nP^{-1}$.

c) La méthode de Gauss donne : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme la matrice D est diagonale, alors pour tout n de $\mathbb{N}$: $\quad D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)^n \end{pmatrix}$, et après calculs :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1-(\frac{1}{2})^n & 1-4(\frac{1}{2})^n+3(\frac{1}{3})^n \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 4(\frac{1}{2})^n-4(\frac{1}{3})^n \\ 0 & 0 & (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix}$$

Partie 2

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On y effectue au hasard des tirages d'une boule selon la procédure suivante :

- Si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.
- Si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on note B_i (respectivement R_i) l'événement « on obtient une boule blanche (respectivement rouge) au i^{e} tirage ».

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches qui restent dans l'urne après le n^{e} tirage et l'on pose $X_0 = 2$.

On pose $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \end{pmatrix}$ et on a donc $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, les événements $\big([X_n=0],\ [X_n=1],\ [X_n=2]\big)$ forment un système complet.

   La formule des probabilités totales, avec ce s.c.e., donne :

   $$P(X_{n+1}=0) = P\big([X_n=0]\cap[X_{n+1}=0]\big) + P\big([X_n=1]\cap[X_{n+1}=0]\big) + P\big([X_n=2]\cap[X_{n+1}=0]\big)$$

   où : $P\big([X_n=2]\cap[X_{n+1}=0]\big) = 0$ puisqu'on ne peut pas, en un seul tirage, retirer les deux boules blanches qui étaient encore dans l'urne à l'issue du n^{e} tirage.

   Si $P(X_n=0) \neq 0$, on peut écrire : $\quad P\big([X_n=0]\cap[X_{n+1}=0]\big) = P(X_n=0) \times P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=0)$ où $P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=0) = 1$ puisque si l'urne ne contient plus aucune boule blanche au n^{e} tirage, il est certain qu'on sera dans la même situation au tirage suivant.

La relation $P\big([X_n=0]\cap[X_{n+1}=0]\big)=P(X_n=0)$ est encore vraie si $P(X_n=0)=0$, auquel cas les deux membres sont nuls.

Si $P(X_n=1)\neq 0$, on peut écrire : $\quad P\big([X_n=1]\cap[X_{n+1}=0]\big)=P(X_n=1)\times P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=0)$; sachant que l'urne contient une boule blanche et la rouge au n^{e} tirage, la probabilité de retirer la boule blanche est $\dfrac{1}{2}$.

La relation $P\big([X_n=1]\cap[X_{n+1}=0]\big)=\dfrac{1}{2}P(X_n=1)$ est vraie même si $P(X_n=1)=0$, auquel cas les deux membres sont nuls.

La formule des probabilités totales donne aussi :

$$P(X_{n+1}=1)=P\big([X_n=0]\cap[X_{n+1}=1]\big)+P\big([X_n=1]\cap[X_{n+1}=1]\big)+P\big([X_n=2]\cap[X_{n+1}=1]\big)$$

où : $P\big([X_n=0]\cap[X_{n+1}=1]\big)=0$ puisque le nombre de boules blanches dans l'urne ne peut que rester stable ou diminuer.

Si $P(X_n=1)\neq 0$: $\quad P\big([X_n=1]\cap[X_{n+1}=1]\big)=P(X_n=1)\times P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=1)$; la probabilité conditionnelle est celle de tirer la boule rouge dans une urne qui en contient une rouge et une blanche, donc : $P\big([X_n=1]\cap[X_{n+1}=1]\big)=\dfrac{1}{2}P(X_n=1)$, formule encore vraie si $P(X_n=1)=0$.

Si $P(X_n=2)\neq 0$: $\quad P\big([X_n=2]\cap[X_{n+1}=1]\big)=P(X_n=2)\times P_{[X_n=2]}(X_{n+1}=1)$, où la probabilité conditionnelle est celle de retirer une boule rouge d'une urne qui en contient deux rouges et une blanche, donc : $P\big([X_n=2]\cap[X_{n+1}=1]\big)=\dfrac{2}{3}P(X_n=2)$, formule encore vraie si $P(X_n=2)=0$.

Enfin, par une dernière utilisation de la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1}=2)=P\big([X_n=0]\cap[X_{n+1}=2]\big)+P\big([X_n=1]\cap[X_{n+1}=2]\big)+P\big([X_n=2]\cap[X_{n+1}=2]\big)$$

où : $\quad P\big([X_n=0]\cap[X_{n+1}=2]\big)=P\big([X_n=1]\cap[X_{n+1}=2]\big)=0$, et :

Si $P(X_n=2)\neq 0$, $\quad P\big([X_n=2]\cap[X_{n+1}=2]\big)=P(X_n=2)\times P_{[X_n=2]}(X_{n+1}=2)$, où la probabilité conditionnelle est celle de tirer la boule rouge dans l'urne qui en contient une blanche et deux rouges ;

la formule $P\big([X_n=2]\cap[X_{n+1}=2]\big)=\dfrac{1}{3}P(X_n=2)$ est encore vraie si $P(X_n=2)=0$.

On en déduit : pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$U_{n+1}=\begin{pmatrix}P(X_{n+1}=0)\\P(X_{n+1}=1)\\P(X_{n+1}=2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P(X_n=0)+\frac{1}{2}P(X_n=1)\\\frac{1}{2}P(X_n=1)+\frac{2}{3}P(X_n=2)\\\frac{1}{3}P(X_n=3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1/2&0\\0&1/2&2/3\\0&0&1/3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}P(X_n=0)\\P(X_n=1)\\P(X_n=2)\end{pmatrix}=MU_n$$

2. L'énoncé donnant la formule : $\quad U_n=M^nU_0$ à démontrer, on rédige la récurrence très simple qui en constitue la preuve :

   $\boxed{\text{I.}}$ Pour $n=0$: $M^0U_0=I_3U_0=U_0$, donc la formule est vraie au rang 0.

   $\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$, alors au rang suivant :

   $U_{n+1}=MU_n\overset{H.R.}{=}M\times M^nU_0=M^{n+1}U_0$, donc la propriété est héréditaire.

   $\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

   Le calcul explicite de U_n est alors très simple : étant donné la valeur de U_0, le produit M^nU_0 correspond simplement à la troisième colonne de la matrice M^n qui a été obtenue à la dernière question de la partie 1.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

3. On note T_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage où l'on extrait la première boule blanche et T_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage où l'on extrait la deuxième boule blanche. On admet que T_1 et T_2 sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que les variables aléatoires X_n $(n \in \mathbb{N})$.

   a) La variable aléatoire T_1 correspond au temps d'attente d'un premier succès : obtenir une boule blanche, dans une suite d'épreuves de Bernoulli identiques et sans mémoire, puisque tant qu'on n'obtient que des boules blanches, l'urne reste dans l'état initial pour le tirage suivant.

   La probabilité de tirer une première boule blanche dans ces conditions est $\frac{2}{3}$, donc T_1 suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{2}{3}$:

$$T_1(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \ P(T_1 = k) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3}$$

   b) L'événement $[T_2 = 2]$ est réalisé si et seulement si on obtient les deux boules blanches coup sur coup :

$$[T_2 = 2] = B_1 \cap B_2 \quad \text{et} \quad P(T_2 = 2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

   L'événement $[T_2 = 3]$ est réalisé si et seulement si on obtient une première boule blanche au premier ou au deuxième tirage, la seconde étant obtenue au troisième tirage seulement :

   $[T_2 = 3] = (B_1 \cap R_2 \cap B_3) \cup (R_1 \cap B_2 \cap B_3)$; par union disjointe et d'après la formule des probabilités composées :

$$P(T_2 = 3) = P(B_1) \times P_{B_1}(R_2) \times P_{B_1 \cap R_2}(B_3) + P(R_1) \times P_{R_1}(B_2) \times P_{R_1 \cap B_2}(B_3)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \boxed{= \frac{5}{18}}$$

   c) Le couple (T_1, T_2) a pour univers-image l'ensemble des couples (i, j) d'entiers naturels non-nuls tels que $i < j$: en effet, le tirage de la deuxième boule blanche dans l'urne, intervient forcément strictement après la première !

   Ainsi : pour tout couple $(i, j) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$ tel que $i \geqslant j$, $P\big([T_1 = i] \cap [T_2 = j]\big) = 0$, et sinon, si $i < j$:

$$[T_1 = i] \cap [T_2 = j] = R_1 \cap \ldots \cap R_{i-1} \cap B_i \cap R_{i+1} \cap \ldots \cap R_{j-1} \cap B_j$$

   et d'après la formule des probabilités composées :

$$P\big([T_1 = i] \cap [T_2 = j]\big) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \times \ldots \times P_{R_1 \cap \ldots \cap R_{i-2}}(R_{i-1}) \times P_{R_1 \cap \ldots R_{i-1}}(B_i)$$
$$\times P_{R_1 \cap \ldots \cap R_{i-1} \cap B_i}(R_{i+1}) \times \ldots \times P_{R_1 \cap \ldots \cap R_{j-2}}(R_{j-1}) \times P_{R_1 \cap \ldots \cap R_{j-1}}(B_j)$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{j-i-1} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{i} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \times 2^i$$

$$P\big([T_1 = i] \cap [T_2 = j]\big) = \left(\frac{2}{3}\right)^{i} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$$

Le calcul de la loi marginale de T_2, qui a pour univers-image $[\![2,+\infty[\![$, repose sur la formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet d'événements $\big([T_1=i]\big)_{i\in\mathbb{N}^*}$:

$$\forall j \geqslant 2, \quad P(T_2=j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P\big([T_1=i]\cap[T_2=j]\big) = \sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{2}{3}\right)^i \times \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$$

puisque les termes de la somme sont nuls lorsque $i \geqslant j$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \times \frac{2}{3} \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}}{1-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \times \frac{2}{3} \times 3 \times \left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}\right]$$

$$\forall j \geqslant 2, \quad P(T_2=j) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}$$

d) La variable aléatoire T_2 admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{j\geqslant 2} jP(T_2=j)$ est absolument convergente ; comme il s'agit d'une série à termes positifs ($j \geqslant 2$ et $P(T_2=j)\geqslant 0$ comme probabilité), la convergence simple suffit. Pour tout $N \geqslant 2$:

$$\sum_{j=2}^{N} jP(T_2=j) = 2\sum_{j=2}^{N} j\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} - 2\sum_{j=2}^{N} j\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}$$

On reconnaît deux séries géométriques dérivées de raisons $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ appartenant à $]-1,1[$: la série étudiée est donc convergente comme somme de séries convergentes, et T_2 admet une espérance qui vaut :

$$E(T_2) = 2\sum_{j=2}^{+\infty} j\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} - 2\sum_{j=2}^{+\infty} j\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1} = 2\left[\frac{1}{(1-1/2)^2}-1\right] - 2\left[\frac{1}{(1-1/3)^2}-1\right]$$

$$= 2\times 4 - 2 - 2\times\frac{9}{4} + 2 \boxed{=\frac{7}{2}}$$

4. a) Pour tout entier $n \geqslant 2$: l'événement $[T_2=n]$ est réalisé si et seulement si l'urne contient encore une boule blanche à l'issue du $(n-1)^{\text{e}}$ tirage, et n'en contient plus aucune à l'issue du tirage suivant :

$$\forall n \geqslant 2, \quad [T_2=n] = [X_{n-1}=1]\cap[X_n=0]$$

b) La formule des probabilités composées, et la loi de X_n calculée au début de cette partie donnent :

$$\forall n \geqslant 2, \quad P(T_2=n) = P(X_{n-1}=1)\times P_{[X_{n-1}=1]}(X_n=0) = \left[4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]\times\frac{1}{2}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

On retrouve bien la loi de T_2 par cette autre méthode.

5. a) On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(1,1,'uin',1,n)` renvoie aléatoirement un nombre entier élément de $[\![1,n]\!]$.

Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche le plus petit entier naturel n pour lequel $X_n = 0$.

```
X = 2; n = 0;
while (X>1)
    n = n+1;
```

```
4         hasard = grand(1,1,'uin',1,3)
5         if (hasard <= 2)  then
6             X = 1
7         end
8     end
9     while (X>0)
10        n = n+1;
11        hasard = grand(1,1,'uin',1,2)
12        if (hasard == 1) then
13            X = 0
14        end
15    end
16    disp(n)
```

b) Le plus petit entier naturel n pour lequel $X_n = 0$ donne déjà la valeur de T_2, puisque cela correspond à l'instant où on a retiré la seconde boule blanche de l'urne. Il suffit en fait de rajouter une instruction `disp(n)` après la première boucle `while` (ligne 9), cette valeur de n correspondant bien à la valeur de T_1, nombre de tirages juste nécessaires pour retirer la première boule blanche de l'urne.