# MATHÉMATIQUES - Edhec E 2006

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

## Exercice 1

1. a) Puisque $A$ représente $f$ dans la base canonique :

$$(x,y,z)\in \operatorname{Ker} f \iff f(x,y,z)=(0,0,0) \iff A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rrrl} 2x & +10y & +7z & =0\\ x & +4y & +3z & =0\\ -2x & -8y & -6z & =0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrll} 2x & +10y & +7z & =0 & \\ & -y & -z/2 & =0 & L_2\leftarrow L_2-L_1/2\\ & 2y & +z & =0 & L_3\leftarrow L_3+L_1\end{array}\right. \iff \begin{cases} x=-5y-7z/2=-z\\ y=-\frac{1}{2}z\end{cases}$$

(les lignes $L_2$ et $L_3$ étant proportionnelles). Ainsi :

$$\operatorname{Ker}(f)=\left\{(-z,-\tfrac{1}{2}z,z)\,\middle|\, z\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{Vect}\big((-1,-\tfrac{1}{2},1)\big)=\operatorname{Vect}(-\tfrac{1}{2}u)=\operatorname{Vect}(u)$$

(car on ne change pas l'espace vectoriel engendré en multipliant un vecteur de la famille génératrice par un scalaire non nul).

b) D'après le cours : $A=\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible *si et seulement si* $f$ est un automorphisme : la question précédente dit en particulier que le noyau de $f$ n'est pas réduit à $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, donc que $f$ n'est pas injective, donc pas bijective, et finalement que $A$ n'est pas inversible.

On pouvait aussi remarquer tout simplement que les lignes $L_2$ et $L_3$ sont proportionnelles ($L_3=-2L_2$), ce qui est un critère de non-inversibilité.

2. a) On cherche ici un vecteur $v=(x,1,z)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$f(v)=u \iff \left\{\begin{array}{rrrl} 2x & +10 & +7z & =2\\ x & +4 & +3z & =1\\ -2x & -8 & -6z & =-2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrll} 2x & +10 & +7z & =2 & \\ & -1 & -z/2 & =0 & L_2\leftarrow L_2-L_1/2\\ & 2 & +z & =0 & L_3\leftarrow L_3+L_1\end{array}\right.$$

$$\iff \begin{cases} x=(2-10+7.2)=3\\ z=-2\end{cases} \qquad \text{Ainsi, } \boxed{v=(3,1,-2)}$$

b) On cherche maintenant un vecteur $w=(x,1,z)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$f(w)=v \iff \left\{\begin{array}{rrrl} 2x & +10 & +7z & =3\\ x & +4 & +3z & =1\\ -2x & -8 & -6z & =-2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrll} 2x & +10 & +7z & =3 & \\ & -1 & -z/2 & =-1/2 & L_2\leftarrow L_2-L_1/2\\ & 2 & +z & =1 & L_3\leftarrow L_3+L_1\end{array}\right.$$

$$\iff \begin{cases} x=(3-10+7)/2=0\\ z=-1\end{cases} \qquad \text{Ainsi, } \boxed{w=(0,1,-1)}$$

c) La famille $(u,v,w)$ est constituée de trois vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 : il suffit donc de démontrer qu'elle est libre, pour que ce soit une base de $\mathbb{R}^3$.



© Major-Prépa

Soient donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $\quad \lambda_1.u + \lambda_2.v + \lambda_3.w = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl} 2\lambda_1 & +3\lambda_2 & & = 0 \\ \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \\ -2\lambda_1 & -2\lambda_2 & -\lambda_3 & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrl} \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 & +3\lambda_2 & & = 0 \; L_1 \leftrightarrow L_2 \\ -2\lambda_1 & -2\lambda_2 & -\lambda_3 & = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl} \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 & -2\lambda_3 & = 0 \; L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & & \lambda_3 & = 0 \; L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}\right. \iff \lambda_3 = 0 = \lambda_2 = \lambda_1.$$

Ainsi la famille $\mathcal{B}'$ est bien libre, et c'est une base de $\mathbb{R}^3$, et la matrice de passage $P$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

est : $\quad P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}.$

3. a) Les relations vérifiées par les vecteurs $u, v, w$ dans ce qui précède, permettent d'obtenir $N = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ très facilement :

   $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ puisque $u \in \text{Ker}(f)$. Par définition, $f(v) = u$ et $f(w) = v$, donc :

$$N = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(w) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u \\ v \\ w \end{array}$$

   Cette matrice est triangulaire : ses valeurs propres se lisent donc directement sur la diagonale de $N$. Ainsi $\text{Sp}(N) = \{0\} = \text{Sp}(f)$ : les valeurs propres d'une matrices sont exactement les mêmes que celle de l'endomorphisme qu'elle représente.

   Si donc $f$ était diagonalisable, il existerait une matrice $Q$ telle que $Q^{-1}NQ$ soit diagonale, avec pour éléments diagonaux les valeurs propres de $f$ : on aurait donc $Q^{-1}NQ = 0_3 \iff N = 0_3$, ce qui est évidemment faux, donc $f$ n'est pas diagonalisable.

   b) La formule de changement de base : $\quad A = PNP^{-1}$ donne plus généralement :

   $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(k) :\ A^k = PN^kP^{-1}$ comme le prouve une récurrence simple sur $k$, toujours la même :

   $\boxed{\text{I.}}$ Pour $k = 0$, $A^0 = I$ et $PN^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   $\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(k+1)$ est aussi vraie :

---

$$A^{k+1} = A^k \times A \overset{H.R.}{P} N^kP^{-1} \times PNP^{-1} = PN^k \times I \times NP^{-1} = PN^{k+1}P^{-1}$$

   donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(k)$ l'est.

   $\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

   En particulier : $\quad A^3 = PN^3P^{-1}$, où $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = N^2 \times N = 0_3$ (matrice nulle) après calculs.

   On a donc : $\quad A^3 = 0_3$, et plus généralement, pour tout entier $k \geqslant 3$, $A^k = A^3 \times A^{k-3} = 0_3$.

4. On note $\mathcal{C}_N$ (respectivement $\mathcal{C}_A$) l'ensemble des matrices qui commutent avec $N$ (respectivement avec $A$), soit : $\quad \mathcal{C}_N = \big\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \big|\ MN = NM\big\}$.



© Major-Prépa

a) L'ensemble $\mathcal{C}_N$ est non-vide : il contient au moins la matrice nulle $0_3$, mais aussi $N$, et $I$ !
Ensuite, pour toutes matrices $(M, M')$ de $\mathcal{C}_N$, et tous réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ :

$$(\lambda.M + \mu.M')N = \lambda.MN + \mu.M'N \overset{M,M' \in \mathcal{C}_N}{=} \lambda.NM + \mu.NM' = (\lambda.M + \mu.M')N$$

donc $\lambda.M + \mu.M' \in \mathcal{C}_N$, et $\mathcal{C}_N$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Un raisonnement en tout point semblable avec $A$ à la place de $N$, prouverait que $\mathcal{C}_A$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

La deuxième partie de la question requiert une résolution explicite de l'équation matricielle $MN = NM$ : soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, alors

$$MN = NM \iff \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = e = i \\ b = f \\ d = 0 = g = h \end{cases}$$

Et donc :

$$\mathcal{C}_N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ a.I + b.N + c.N^2 \middle| \, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect}(I, N, N^2).$$

b) Établissons l'équivalence demandée :

$$M \in \mathcal{C}_A \iff AM = MA \iff PNP^{-1}M = MPNP^{-1} \iff NP^{-1}MP = P^{-1}MPN \iff P^{-1}MP \in \mathcal{C}_N$$

(dans l'avant-dernier calcul, on a multiplié les deux membres de l'égalité par $P^{-1}$ à gauche, et par $P$ à droite).
Et d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_A &\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 ;\ P^{-1}MP = a.I + b.N + c.N^2 \\ &\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 ;\ M = P(a.I + b.N + c.N^2)P^{-1} = a.PP^{-1} + b.PNP^{-1} + c.PN^2P^{-1} \\ &\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 ;\ M = a.I + b.A + c.A^2 \end{aligned}$$

Ces équivalences prouvent bien ainsi que : $\quad \mathcal{C}_A = \text{Vect}(I, A, A^2)$.

---

## Exercice 2

On considère la fonction $f$ définie par : $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-x)^2} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[, \\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. On vérifie les trois points nécessaires pour montrer que $f$ est une densité de probabilité :
   - La fonction $f$ est clairement positive sur $[0, \frac{1}{2}[$ et $[\frac{1}{2}, 1[$ puisque le carré d'un réel est toujours positif, et comme elle est nulle en dehors de $[0, 1[$, elle est bien positive sur tout $\mathbb{R}$.


© Major-Prépa

- La fonction $f$ est continue sur chacun des intervalles $]0, \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}, 1[$ comme inverse de fonctions continues qui y sont bien définies.

  Comme $f$ est constante sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$, elle est bien continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en un nombre fini de points, à savoir $0, \frac{1}{2}$ et $1$.

- Enfin :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \int_{0}^{1/2} \frac{1}{2(1-x)^2}\mathrm{d}x + \int_{1/2}^{1} \frac{1}{2x^2}\mathrm{d}x + \int_{1}^{+\infty} 0\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{1}{2(1-x)}\right]_0^{1/2} + \left[-\frac{1}{2x}\right]_{1/2}^{1} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1$$

La fonction $f$ peut donc bien être considérée comme une densité de probabilité.

Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire $X$ définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant la fonction $f$ pour densité.

2. On calcule la fonction de répartion $F$ de $X$, en distinguant soigneusement les cas , sachant que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$

- Pour tout $x \leqslant 0$ : $\quad F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0 \ \mathrm{d}t = 0.$

- Pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}[$ :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \ \mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \frac{1}{2(1-t)^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2(1-t)}\right]_0^{x} = \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2}$$

- Pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1[$ :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{1/2} \frac{1}{2(1-t)^2}\mathrm{d}t + \int_{1/2}^{x} \frac{1}{2t^2}\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2t}\right]_{1/2}^{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} + 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2x}$$

- Pour tout $x \geqslant 1$ :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \ \mathrm{d}t + \int_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} 0 \ \mathrm{d}t = 0 + 1 + 0 = 1$$

Bilan : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2(1-x)} - \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[ \\ \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2x} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[ \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$

3. La variable aléatoire $X$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Comme la fonction $t \mapsto t.f(t)$ est nulle en dehors de $[0, 1[$ (parce que $f$ l'est), et qu'elle est positive et continue par morceaux sur $[0, 1[$, alors on peut déjà conclure que $X$ admet une espérance, qui vaut :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{1/2} \frac{t}{2(1-t)^2}\mathrm{d}t + \int_{1/2}^{1} \frac{t}{2t^2}\mathrm{d}t$$



© Major-Prépa

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{t-1+1}{(1-t)^2}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{1/2}^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \left(-\frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2}\right)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{1/2}^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln(|1-t|) + \frac{1}{1-t}\right]_0^{1/2} + \frac{1}{2}\left[\ln(t)\right]_{1/2}^1 \\
&= \frac{1}{2}\left[-\ln(2) + 2 - 0 - 1\right] + \frac{1}{2}\ln(2) \\
E(X) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

**Remarque :** ce résultat est cohérent dans la mesure où on peut assez facilement voir que la courbe de $f$ présente une symétrie axiale, selon la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$...

4. a) D'après le théorème de transfert : $E((X-1)^2)$ existe si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (t-1)^2 f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

   Comme la fonction concernée est positive (comme produit de deux facteurs positifs), nulle en-dehors de $[0,1[$, et continue par morceaux sur $[0,1[$, cette intégrale est convergente, $E((X-1)^2)$ existe et vaut :

$$
\begin{aligned}
E((X-1)^2) &= \int_0^1 (t-1)^2 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{1/2} \frac{1}{2}\mathrm{d}t + \int_{1/2}^1 \frac{(t-1)^2}{2t^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \left[-\ln(t) - \frac{1}{2t}\right]_{1/2}^1 \\
&= \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2} - \ln(2) + 1 \\
E((X-1)^2) &= 1 - \ln(2)
\end{aligned}
$$

   b) Comme $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$ et comme $X$ admet une espérance : on en déduit, par linéarité de l'espérance, que $X^2 = (X-1)^2 + 2X - 1$ admet une espérance, c'est-à-dire que $X$ admet un moment d'ordre 2 qui vaut :

$$E(X^2) = E((X-1)^2) + 2E(X) - 1 = 1 - \ln(2).$$

   La variable aléatoire $X$ admet donc une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - \ln(2) - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \ln(2)$$

5. On apelle *variable indicatrice d'un événement* $A$, la variable de Bernoulli qui vaut 1 si $A$ est réalisé, et 0 sinon.

   On considère maintenant la variable aléatoire $Y$ , indicatrice de l'événement $[X \leqslant \frac{1}{2}]$ et la variable aléatoire $Z$, indicatrice de l'événement $[X > \frac{1}{2}]$.

   a) Il est assez facile de voir que puisque les événements $[X \leqslant \frac{1}{2}]$ et $[X > \frac{1}{2}]$ sont contraires l'un de l'autre, la v.a.r. $Y$ vaut 1 quand $Z$ vaut 0, et réciproquement.



© Major-Prépa

On a donc toujours : $Y + Z = 1 \iff Y = 1 - Z$, c'est-à-dire que $Y$ est une fonction affine de $Z$, de la forme $Y = aZ + b$ avec $a = -1 < 0$.
On sait dans ce cas, d'après le cours, que le coefficient de corrélation linéaire de ces deux variables aléatoires vaut $\rho(Y, Z) = -1$.

b) Par définition du coefficient de corrélation linéaire : $\rho(Y, Z) = \dfrac{\operatorname{Cov}(Y, Z)}{\sigma(Y)\sigma(Z)}$.

Or $Y$ est une variable de Bernoulli de paramètre $p = P(Y = 1) = P(X \leqslant \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}$, donc : $V(Y) = p(1-p) = \dfrac{1}{4}$ ; de même, $Z$ est une v.a.r. de Bernoulli, cette fois de paramètre $P(Z = 1) = P(X > \frac{1}{2}) = 1 - p$ qui vaut $\dfrac{1}{2}$ encore, donc : $V(Z) = \dfrac{1}{4}$ aussi.
Finalement :

$$\operatorname{Cov}(Y, Z) = \rho(Y, Z) \times \sqrt{V(Y)V(Z)} = -\frac{1}{4}$$

---

# Exercice 3

Soit $f$ la fonction définie pour tout couple $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$.

1. a) La fonction $f$ est polynômiale en les deux variables $x$ et $y$, elle est donc de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$, et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)(x, y) = 4x + 2y - 1 \text{ et } \partial_2(f)(x, y) = 4y + 2x - 1$$

b) Les points critiques de $f$ sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x, y) = 0 \\ \partial_2(f)(x, y) \quad = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 2y & = 1 \\ 2x + 4y & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 2y & = 1 \\ 6y & = 1 \ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = \dfrac{1}{4}(1 - 2y) = \dfrac{1}{6} \\ y & = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

La fonction $f$ admet donc bien pour seul point critique $A = (\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6})$.

2. a) La fonction $f$ étant de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$, elle admet sur ce domaine des dérivées partielles d'ordre 2, données par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial^2_{1,1}(f)(x, y) = 4, \quad \partial^2_{2,2}(f)(x, y) = 4, \quad \partial^2_{1,2}(f)(x, y) = 2 = \partial^2_{2,1}(f)(x, y)$$

b) La Hessienne de $f$ en $A$ est donc : $H = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, dont les valeurs propres sont les réels $\lambda$ tels que $H - \lambda.I_2 = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 2 & 4 - \lambda \end{pmatrix}$ soit non-inversible. D'après le critère d'inversibilité des matrices $2 \times 2$, c'est le cas si et seulement si :

$$(4 - \lambda)^2 - 4 = 0 \iff (4 - \lambda - 2)(4 - \lambda + 2) = 0 \iff (2 - \lambda)(6 - \lambda) = 0$$

D'après l'identité remarquable bien connue. On en déduit que les valeurs propres de $H$ sont 2 et 6, toutes deux strictement positives : sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, au point critique $A = (\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6})$ $f$ présente un extrémum local, et c'est un minimum local qui vaut : $m = f(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6}) = \dfrac{2}{36} + \dfrac{2}{36} + \dfrac{2}{36} - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{6} = -\dfrac{1}{6}$.


© Major-Prépa

3. a) D'après les règles de calcul bien connues sur les identités remarquables :

$$\begin{aligned}\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad 2(x+\frac{y}{2}-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{2}(y-\frac{1}{6})^2 &= 2(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{1}{16}+xy-\frac{x}{2}-\frac{y}{4})+\frac{3}{2}(y^2+\frac{1}{36}-\frac{y}{3})\\ &= 2x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{8}+2xy-x-\frac{y}{2}+\frac{3y^2}{2}+\frac{1}{24}-\frac{y}{2}\\ &= 2x^2+2y^2+2xy-x-y+\frac{1}{6}\\ &= f(x,y)+\frac{1}{6}\end{aligned}$$

b) Comme le carré d'un réel est toujours positif, le calcul précédent permet d'affirmer :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \left(x+\frac{y}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{6}\right)^2\geqslant 0 \iff \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)+\frac{1}{6}\geqslant 0 \iff \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)\geqslant -\frac{1}{6}$$

Or $m=-\frac{1}{6}=f(A)$ est bien une valeur atteinte par $f$ : on en déduit que $m$ est le minimum global de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.

4. a) Il n'est pas difficile de constater la relation : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ g(x,y)=f(e^x,e^y)$.

Et puisque $m$ est le minimum global de $f$ sur $\mathbb{R}$, on peut donc écrire :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(e^x,e^y)\geqslant -\frac{1}{6} \iff \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ g(x,y)\geqslant -\frac{1}{6}.$$

b) L'unicité du minimum (découlant de l'unicité du point critique) de $f$ donne même l'équivalence :

$$g(x,y)=-\frac{1}{6} \iff f(e^x,e^y)=-\frac{1}{6} \iff (e^x,e^y)=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right) \iff (x,y)=\big(-\ln(6),-\ln(6)\big)$$

Elle permet de conclure que $g$ admet un minimum global valant $-\frac{1}{6}$, atteint en l'unique point $\big(-\ln(6),-\ln(6)\big)$.

---

# Problème

## Partie 1 : Étude d'une variable discrète sans mémoire

1. On pose $q=1-p$. Comme la variable aléatoire $X$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ : l'événement contraire à $[X\geqslant 1]$ est $[X=0]$, ce qui implique : $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-p=q$.

   Par hypothèse $(m=1)$, on a bien $q>0$. Comme par ailleurs $p>0$, $1-p=q<1$.

2. Soit $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ : par hypothèse, $P_{(X\geqslant m)}(X\geqslant n+n)=P(X\geqslant n)$, ce qui s'écrit aussi, par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\frac{P\left((X\geqslant m)\cap(X\geqslant n+m)\right)}{P(X\geqslant m)}=P(X\geqslant n)$$

   Si $[X\geqslant n+m]$ est réalisé, alors $[X\geqslant m]$ est réalisé, soit : $[X\geqslant n+m]\subset[X\geqslant m]$, et par conséquent, la relation précédente devient :

$$\frac{P(X\geqslant n+m)}{P(X\geqslant m)}=P(X\geqslant n) \iff P(X\geqslant n+m)=P(X\geqslant m)\times P(X\geqslant n).$$



© Major-Prépa

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = P(X \geqslant n)$.

   a) En reprenant le résultat de la question précédente avec $m = 1$ :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X \geqslant n+1) = P(X \geqslant 1).P(X \geqslant n) \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q.u_n,$$

   ce qui exprime que la suite $(u_n)$ est géométrique de raison $q$, et de premier terme $u_0 = P(X \geqslant 0) = 1$ puisque $X$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

   b) Ainsi bien sûr : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X \geqslant n) = q^n$.

   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement $(X \geqslant n)$ s'écrit comme l'union disjointe :

$$[X \geqslant n] = [X = n] \cup [X \geqslant n+1]$$

   Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$P(X \geqslant n) = P(X = n) + P(X \geqslant n+1) \iff u_n = P(X = n) + u_{n+1} \iff P(X = n) = u_n - u_{n+1}.$$

   d) On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = q^n - q^{n+1} = (1-q).q^n = p.q^n$.

   *NB : on appelle parfois cette loi : "loi géométrique sur $\mathbb{N}$", ou "loi géométrique décalée". Il n'est pas difficile de montrer qu'il s'agit de la loi du nombre d'échecs avant un premier succès, dans une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et sans mémoire.*

4. a) Puisque $X$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $X+1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et :

   $\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad P(X+1 = k) = P(X = k-1) = p.q^{k-1}$ : on reconnaît que $X+1$ suit la loi géométrique de paramètre $p$.

   b) On a donc : $E(X+1) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X+1) = \dfrac{q}{p^2}$. Comme par ailleurs, $E(X+1) = E(X) + 1$ et $V(X+1) = V(X)$, on en déduit : $E(X) = \dfrac{1}{p} - 1 = \dfrac{q}{p}$, et $V(X) = \dfrac{q}{p^2}$.

## Partie 2 : Taux de panne d'une variable discrète

Pour toute variable aléatoire $Y$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(Y \geqslant n) > 0$, on définit le **taux de panne** de $Y$ à l'instant $n$, noté $\lambda_n$, par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = P_{(Y \geqslant n)}(Y = n)$.

$\rightarrow$ *On peut intépréter ce nombre comme la probabilité que la panne se produise exactement à l'instant $n$, sachant que les $n-1$ instants précédents n'ont pas donné lieu à une panne.*

1. a) Là encore, par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \lambda_n = \frac{P\left([Y \geqslant n] \cap [Y = n]\right)}{P(Y \geqslant n)} = \frac{P(Y = n)}{P(Y \geqslant n)} \text{ puisque } [Y = n] \subset [Y \geqslant n],$$

   et par conséquent $[Y \geqslant n] \cap [Y = n] = [Y = n]$.

   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $1 - \lambda_n = 1 - \dfrac{P(Y = n)}{P(Y \geqslant n)} = \dfrac{P(Y \geqslant n) - P(Y = n)}{P(Y \geqslant n)} = \dfrac{P(Y \geqslant n+1)}{P(Y \geqslant n)}$ selon la relation établie en 3.c) dans la partie 1.

   c) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(Y \geqslant n) > 0$, on a déjà avec la relation précédente : $1 - \lambda_n > 0 \iff \lambda_n < 1$. Comme de plus $[Y \geqslant n+1] \subset [Y \geqslant n]$, on a $0 < P(Y \geqslant n+1) \leqslant P(Y \geqslant n)$, ce qui assure que $\dfrac{P(Y \geqslant n+1)}{P(Y \geqslant n)} = 1 - \lambda_n \leqslant 1 \iff \lambda_n \geqslant 0$.

   d) Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ : $P(Y \geqslant n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(1 - \lambda_k)$, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ .

   $\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 1$ : $\displaystyle\prod_{k=0}^{1-1}(1 - \lambda_k) = 1 - \lambda_0 = \frac{P(Y \geqslant 1)}{P(Y \geqslant 0)} = P(Y \geqslant 1)$ puisque $Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$



© Major-Prépa

(et donc : $P(Y \geqslant 0) = 1$). Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie :

---

$$\prod_{k=0}^{n+1-1} (1-\lambda_k) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)\times(1-\lambda_n) \overset{H.R.}{=} P(Y \geqslant n).(1-\lambda_n) = P(Y \geqslant n).\frac{P(Y \geqslant n+1)}{P(Y \geqslant n)} = P(Y \geqslant n+1).$$

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est héréditaire, et initialisée à $n = 1$ : d'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k)$ est la somme des probabilités d'événements incompatibles deux à deux, c'est donc la probabilité de leur réunion : $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n-1}[Y = k] = [Y \leqslant n-1]$, dont l'événement contraire est : $[Y > n-1] = [Y \geqslant n]$.

   Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k) = P(Y \leqslant n-1) = 1 - P(Y \geqslant n)$.

   b) Comme $Y$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, on sait que :
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k) = 1 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} P(Y = k)$. La relation de la question précédente donne donc :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - P(Y \geqslant n) = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} P(Y \geqslant n) = 0.$$

   c) Reprenons le résultat de la question 1.d) de cette partie : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y \geqslant n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)$.

   Comme les questions précédentes et les hypothèses faites permettent d'affirmer que tous les nombres de cette relation sont strictement positifs, on peut écrire l'égalité des images par la fonction ln des deux membres, pour obtenir :

$$\ln\big(P(Y \geqslant n)\big) = \ln\Big(\prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)\Big) \iff -\ln P(Y \geqslant n) = \sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1-\lambda_k)$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(Y \geqslant n) = 0^+$ : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\big(P(Y \geqslant n)\big) = -\infty$, et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1-\lambda_k) = +\infty$.

   d) Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\lambda_n = 0$, alors $\ln(1-\lambda_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\lambda_n$, et $-\ln(1-\lambda_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda_n$, terme général positif (c'est une probabilité !)

   Le théorème de comparaison des séries à termes positifs assure alors que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \lambda_k$ est de même nature que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} -\ln(1-\lambda_k)$, c'est-à-dire divergente d'après le résultat précédent.

3. a) On considère la fonction `Scilab` suivante, rédigée récursivement :

```
function p = f(n)
    if n==0 then
        p = 1
    else
        p = n*f(n-1)
    end
endfunction
```

b) On considère la fonction récursive suivante :

```
function t = g(a,n)
    if n==0 then
        t = 1
    else
        t = a*g(a,n-1)
    end
endfunction
```

D'après cette définition : $g(a,0) = 1$ et si $n \geqslant 1$ :
$g(a,n) = a \times g(a,n-1) = a^2 \times g(a,n-2) = \ldots = a^n \times g(a,0) = a^n$ : cette fonction sert à calculer n'importe quelle puissance entière positive d'un réel $a$.

c) On propose ci-dessous deux scripts possibles en `Scilab` pour calculer la somme en utilisant les deux fonctions précédentes :

- Avec un vecteur, des opérations termes à termes et la fonction `sum` :

```
n = input('donner n entier naturel non nul : ')
a = input('donner a>0 : ')
V = zeros(1,n)
for k = 0:(n-1)
    V(k+1) = g(a,k)/f(k)
end
S = exp(-a) * sum(V)
disp(S)
disp((exp(-a)*g(a,n)/f(n))/(1-S))
```

Le décalage d'indice dans la boucle est rendu nécessaire par le fait que `Scilab` numérote ses vecteurs à partir de l'indice 1 et non 0.

Le deuxième résultat affiché est le taux de panne $\lambda_n = \dfrac{P(Y=n)}{P(Y \geqslant n)} = \dfrac{P(Y=n)}{1-P(Y \leqslant n-1)}$ pour une loi de Poisson de paramètre $a$.

- Avec une somme construite un terme après l'autre, avec une boucle FOR :

```
n = input('donner n entier naturel non nul : ')
a = input('donner a>0 : ')
S = 0
for k = 0:(n-1)
    S = S + g(a,k)/f(k)
end
disp(exp(-a)*S)
disp((exp(-a)*g(a,n)/f(n))/(1-S))
```

d) La fonction suivante a été réécrite et complétée dans le langage `Scilab`. L'instruction de boucle est basée sur la relation de récurrence suivante, valable pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ : $\dfrac{a^k}{k!} = \dfrac{a}{k} \times \dfrac{a^{k-1}}{(k-1)!}$.

```
function s = sigma(a,n)
    p = 1; s = 1;
    for k = 1:(n-1)
        p = p*a/k
        s = s + p
    end
    s = exp(-a)*s
endfunction
```



© Major-Prépa

## Partie 3 : Caractérisation des variables dont la loi est du type de celle de $X$.

1. Vu les calculs faits dans la partie 1 : pour la v.a.r. $X$, $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = \dfrac{P(X \geqslant n)}{P(X = n)} = \dfrac{q^n}{pq^n} = \dfrac{1}{p}$ : le taux de panne d'une v.a.r. suivant une loi "géométrique décalée", est constant.
2. On considère une v.a.r. $Z$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(Z \geqslant n) > 0$, dont on suppose que le taux de panne est constant : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = \lambda$.
   a) D'après la question 1.$(c)$ de la partie 2, on sait déjà que le taux de panne constant de $Z$ vérifie : $0 \leqslant \lambda < 1$. Si $\lambda = 0$, en reprenant l'expression obtenue en 1.$(a)$ de la partie 2, on obtient :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 = \dfrac{P(Z = n)}{P(Z \geqslant n)} \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ P(Z = n) = 0$, ce qui est bien sûr absurde !
   Ainsi $0 < \lambda < 1$.
   b) On reprend cette fois la relation de la question 1.$(b)$ de la partie 2 :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 - \lambda = \frac{P(Z \geqslant n+1)}{P(Z \geqslant n)} \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ P(Z \geqslant n+1) = (1-\lambda).P(Z \geqslant n),$$
   ce qui prouve que la suite $\big(P(Z \geqslant n)\big)$ est géométrique, de raison $1 - \lambda$.
   On se retrouve bien dans la situation de la partie 1 avec $q = 1 - \lambda$, qui nous permet de conclure que $Z$ suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}$, de paramètre $1 - \lambda$.
   Les variables aléatoires discrètes dont le taux de panne est constant, et telles que $P(Z \geqslant n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, suivent bien toutes une loi du type de celle de $X$.


© Major-Prépa