MATHÉMATIQUES - Edhec E 2000

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

1. Pour x réel :

$$e^x - e^{-x} > 0 \iff e^x > e^{-x} \overset{(\star)}{\iff} x > -x \iff 2x > 0 \iff x > 0$$

($\star$) car la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Donc : $\boxed{D =]0; +\infty[}$, et la fonction $f: x \mapsto \ln(e^x - e^{-x})$ est bien définie sur D.

2. a) La fonction f est aussi dérivable sur D comme composée de fonctions dérivables, et :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

$\forall x \in D :\quad e^x > 0,\ e^-x > 0$ donc $e^x + e^-x > 0$, et on a vu que : $\forall x \in D,\ e^x - e{-}x > 0$.
Finalement, par quotient : $\quad \forall x \in D,\ f'(x) > 0$, et f est donc strictement croissante sur D.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ (car $\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$),
donc par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - e^{-x} = +\infty$. $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(e^x - e^{-x}) = +\infty$ par composition.

$\lim\limits_{x \to 0^+} e^x = e^0 = 1$ (la fonction exp est continue en 0), et $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-x} = e^0 = 1$ aussi,
donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} e^x - e^{-x} = 1 - 1 = 0^+$ car $e^x - e^{-x} > 0$ sur D.
$\lim\limits_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(e^x - e^{-x}) = -\infty$ par composition de limites.

b) La fonction f est donc **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$, elle est aussi **continue** (car dérivable) sur cet intervalle, **à valeurs dans** $]-\infty, +\infty[$ qui contient bien 0.
Le **théorème de la bijection** assure alors l'existence d'un unique réel α vérifiant : $f(\alpha) = 0$.

On peut en fait retrouver ce résultat, et calculer la valeur exacte de α, en résolvant explicitement l'équation $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \iff \ln(e^x - e^{-x}) = 0 \iff e^x - e^{-x} = 1 \iff e^x - \frac{1}{e^x} = 1 \iff \frac{e^{2x} - 1}{e^x} = 1$$
$$\iff e^{2x} - 1 = e^x \iff e^{2x} - e^x - 1 = 0$$

Comme $e^{2x} = (e^x)^2$, le changement de variable $X = e^x$ ramène à résoudre l'équation du second degré : $\quad X^2 - X - 1 = 0$.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$, il y a donc deux racines : $X_1 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
$2 = \sqrt{4} < \sqrt{5} < 3 = \sqrt{9}$, donc $X_1 < 0$ et $e^x = X_1$ est impossible.

Par contre, $X_2 > 0$ et $e^x = X_2 \iff x = \boxed{\ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)}$ est la seule solution de l'équation $f(x) = 0$, on appelle α cette solution.

c) On sait que, pour tout réel a où la fonction f est dérivable, la courbe de f admet une tangente au point d'abscisse a, qui a pour équation : $\boxed{y = f'(a) \times (x-a) + f(a)}$.

Le coefficient directeur de cette droite est donc $f'(a)$, et la question posée est en fait : "montrer que $f'(\alpha) = 0$".

Il faut ici limiter au maximum les longs calculs!

Comme α est l'unique réel vérifiant : $f(\alpha) = 0$, on a donc : $\ln(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 1 \iff e^{\alpha} - e^{-\alpha} = 1$, qui donne même : $e^{-\alpha} = e^{\alpha} - 1$, et :

$f'(\alpha) = \dfrac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}} = \dfrac{2e^{\alpha} - 1}{1}$; Or $e^{\alpha} = e^{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, donc :

$2e^{\alpha} - 1 = 1 + \sqrt{5} - 1 = \boxed{\sqrt{5} = f'(\alpha)}$.

3. a) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors $f(x) - x$ présente une forme indéterminée lorsqu'on veut calculer sa limite en $+\infty$. Pour la lever, on tranforme cette expression en utilisant par exemple :

$\forall x > 0,\ f(x) - x = \ln(e^x - e^{-x}) - x = \ln(e^x - e^{-x}) - \ln(e^x) = \ln\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x}\right) = \ln(1 - e^{-2x})$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = 0$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - e^{-2x} = 1$,

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 - e^{-2x}) = \ln(1) = 0 \iff \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0}$.

b) Ce résultat prouve que la courbe (C) admet une *asymptote oblique* (Δ), qui a pour équation :

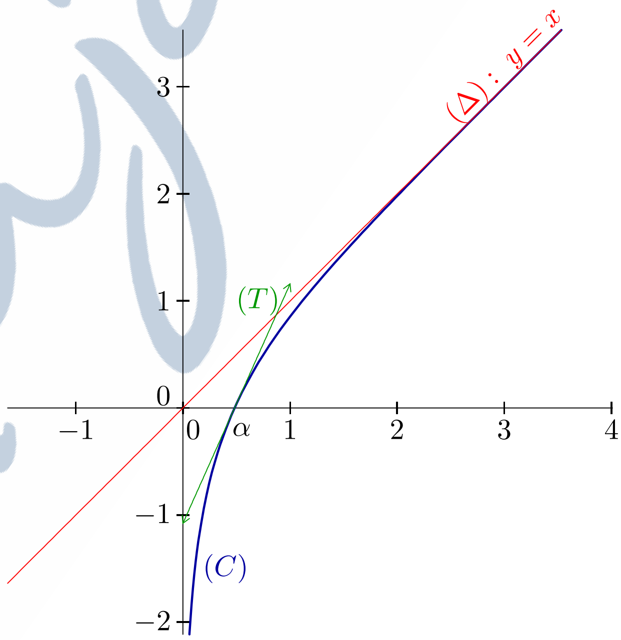
$$y = x.$$

c) La position relative de (C) et (Δ) est alors donnée par le signe de la différence : $f(x) - x$, qu'on reprend sous la forme : $f(x) - x = \ln(1 - e^{-2x})$.

Pour tout $x > 0$: $e^{-2x} > 0$, donc $1 - e^{-2x} < 1$, ce qui implique : $\forall x > 0,\ \ln(1 - e^{-2x}) < \ln(1) = 0$ (rq : $-2x < 0$ donc $e^{-2x} < 1 \iff 1 - e^{-2x} > 0$) ; on a utilisé ici la stricte croissance des fonctions exp et ln sur leurs domaines respectifs.

On a donc prouvé que : pour tout $x > 0$, $f(x) - x < 0$, ce qui exprime que la courbe (C) est toujours **au-dessous** de son asymptote Δ.

4. On peut maintenant tracer l'allure de (C), en faisant apparaître l'asymptote (Δ) et la tangente (T) ; on n'oubliera pas que cette droite a le point de coordonnées $(\alpha, f(\alpha) = 0)$ en commun avec (C), que cette droite a pour coefficient directeur $\sqrt{5} \approx 2,24$ et que la courbe (C) est *tangente* à (T) au voisinage de α ($\approx 0,48$).



5. Soit λ un réel, on note g_λ la fonction définie par : $\begin{cases} g_\lambda(x) = 0 & \text{si } x < \alpha \\ g_\lambda(x) = \dfrac{\lambda}{e^{2x}-1} & \text{si } x \geqslant \alpha \end{cases}$.

a) On pose $h(x) = f(x) - x = \ln(1-e^{-2x})$ pour tout $x > 0$ d'après les calculs précédents. La fonction h est bien dérivable sur $D =]0, +\infty[$, et :

$$\forall x \in D, \quad h'(x) = \frac{2e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{2}{e^{2x}-1}$$

Il apparaît ainsi que $\frac{1}{2}.h$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{e^{2x}-1}$ sur $]0, +\infty[$. Mais alors :

- La fonction g_λ est continue sur $]-\infty, \alpha[$ comme fonction constante nulle, et sur $]\alpha, +\infty[$ comme inverse d'une fonction continue sur cet intervalle inclus dans $]0, +\infty[$, où $e^{2x} - 1$ ne s'annule pas.
- La fonction g_λ est positive nulle sur $]-\infty, \alpha[$; pour tout $x \geqslant \alpha > 0$, $2x > 0$ donc $e^{2x} > 1$ et $g_\lambda(x)$ est alors positif si et seulement si $\lambda \geqslant 0$.
- Enfin : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\alpha} 0 \, \mathrm{d}x + \lambda. \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{e^{2x}-1}\mathrm{d}x$, sous réserve de convergence.

  Or pour tout réel $A > \alpha$:

  $$\int_{\alpha}^{A} \frac{1}{e^{2x}-1}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}h(x)\right]_{\alpha}^{A} = \frac{1}{2}\left(h(A) - h(\alpha)\right).$$

  Et comme : $\lim\limits_{A\to+\infty} h(A) = 0$ comme on l'a vu à la question 3.a)

  tandis que $h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = 0 - \alpha$. On en conclut que :

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(x)\mathrm{d}x \text{ converge et vaut } \lambda \times \frac{1}{2}\alpha$$

La fonction g_λ est alors une densité de probabilité si et seulement si : $\lambda \times \dfrac{\alpha}{2} = 1 \iff \boxed{\lambda = \dfrac{2}{\alpha}}$, qui est bien positif.

b) La fonction de répartition G_λ de X (avec $\lambda = \dfrac{1}{\alpha}$) se calcule alors facilement, en distinguant deux cas :

- Pour tout $x < \alpha$: $\quad G_\lambda(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g_\lambda(t)\mathrm{d}t = 0$ car g_λ est nulle sur $]-\infty, \alpha[$.
- Pour tout $x \geqslant \alpha$:

$$G_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\alpha} 0 \, \mathrm{d}t + \int_{\alpha}^{x} g_\lambda(t)\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{2}\left(h(x) - h(\alpha)\right) = \frac{1}{\alpha}\left[\ln(1-e^{-2x}) + \alpha\right]$$

Bilan : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \; G_{1/\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ 1 - \dfrac{1}{\alpha}\ln(1-e^{-2x}) & \text{si } x \geqslant \alpha \end{cases}$

Exercice 2

Soit la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note E l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $\quad KM = MK = M$.

1. a) On montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace de référence $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:
   - La matrice nulle 0_3 vérifie : $0_3M = M0_3 = 0_3$, donc $0_3 \in E$ et E est non vide.
   - Soient M et N deux matrices de E, vérifiant donc : $KM = MK = M$ et $KN = NK = N$. Alors : $K(M+N) = KM + KN = MK + NK = (M+N)K$,

     et de même : $K(M+N) = KM + KN = M + N$, ce qui prouve que $M + N \in E$.
   - Pour tout réel λ :

     $K(\lambda.M) = \lambda.KM = \lambda.MK = \lambda.M$, donc $\lambda.M \in E$.

   L'ensemble E est donc stable par somme et par multiplication externe : c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc un espace vectoriel lui-même.

   b) Dans ce raisonnement par l'absurde, on suppose qu'il existe une matrice M de E qui soit inversible ; dans ce cas, elle possède un inverse M^{-1} qui vérifie :

   $MM^{-1} = I$, et $KM = M$, donc $KMM^{-1} = MM^{-1} \iff K = I$, ce qui est évidemment faux !

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ une matrice de E.

   a) On écrit explicitement les égalités matricielles $KM = MK = M$ pour procéder à l'identification des coefficients :

$$\begin{pmatrix} g & h & k \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ k & h & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \iff a = c = g = k \text{ et } h = b \text{ et } f = d$$

   Il s'agit bien d'une équivalence. On en déduit : $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix} \middle| (a,b,d,e) \in \mathbb{R}^4 \right\}$.

   b) La forme générale des matrices de E qu'on vient d'obtenir, rend évident le fait qu'aucune d'entre elles n'est inversible : elles possèdent toutes deux lignes égales !

   c) Le résultat de la question a) permet également d'écrire :

$$E = \left\{ a.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| (a,b,d,e) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

$$= \text{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{U_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U_4} \right)$$

   Ce qui prouve à nouveau que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ comme sous-espace engendré, et que (U_1, U_2, U_3, U_4) est une famille génératrice de E. On vérifie facilement que cette famille est aussi libre, en posant une combinaison linéaire nulle de ces quatre vecteurs :

$$a.U_1 + b.U_2 + c.U_3 + d.U_4 = 0_3 \iff \begin{pmatrix} a & b & a \\ c & d & c \\ a & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff a = b = c = d = 0$$

   On a donc obtenu une base de E, et $\dim(E) = 4$.

3. On considère l'ensemble F des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$, ou x, y et z sont des réels quelconques.

a) Utilisons l'argument le plus efficace :

$$F = \left\{ x.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + z.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect}\,(U_1, U_2 + U_3, U_4)$$

Ce qui prouve que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Il reste à dire que : F est inclus dans E, puisque toute matrice de F est un cas particulier de matrice de E, où les coefficients de U_2 et U_3 de la combinaison linéaire, seraient égaux.

On connaît déjà une famille génératrice de F, et pour tous réels x, y, z :

$$x.U_1 + y.(U_2 + U_3) + z.U_4 = 0_3 \iff \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff x = y = z.$$

La famille $(U_1, U_2 + U_3, U_4)$ est donc aussi libre : c'est une base de F, qui est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de E.

b) Les matrices de F sont toutes *symétriques réelles* : elles sont donc toutes diagonalisables, d'après le théorème du cours.

c) Dans cette question, on considère la matrice $U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Avec un peu de pratique, on peu assez facilement repérer des valeurs et vecteurs propres d'une matrice telle que U :

- Le fait que U soit non inversible (en tant que matrice de F, donc de E, voir la question 1.b), implique le fait que 0 soit valeur propre de U. On repère assez facilement que les colonnes 1 et 3 de U sont égales, donc : $U \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui prouve que $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de U pour la valeur propre 0.

- On peut aussi remarquer que la somme des éléments de chaque colonne de U est égale à 8, et donc : $U \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = 8. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qui prouve que 8 est valeur propre de U, et que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

Il resterait à en trouver une troisième, laquelle n'est pas aussi évidente... on est donc obligé de revenir à la méthode classique : λ est valeur propre de U si et seulement si $U - \lambda.I$ est non-inversible, et on échelonne cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1]{L_3 \leftarrow 3L_3 - (3-\lambda)L_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & 8-3\lambda & 2\lambda \\ 0 & 2\lambda & 6\lambda - \lambda^2 \end{pmatrix}$$

ici les deux pivots restants dépendent de λ, et sont donc potentiellement nuls. On utilise donc une étape intermédiaire pour combiner L_2 et L_3 afin d'éliminer λ de l'une des lignes :

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow 2L_2 + 3L_3]{} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & 16 & 22\lambda - 3\lambda^2 \\ 0 & 2\lambda & 6\lambda - \lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[8L_3 - \lambda L_2]{} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & 16 & 22\lambda - 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix}$$

où $Q(\lambda) = 8(6\lambda - \lambda^2) - \lambda(22\lambda - 3\lambda^2) = 48\lambda - 30\lambda^2 + 3\lambda^3 = 3\lambda(\lambda^2 - 10\lambda + 16)$.

La réduite de Gauss est non-inversible si et seulement si :

$Q(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0$ ou $\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0$.

Après résolution de l'équation du second degré, on trouve les trois valeurs propres : $\boxed{0, 2, 8}$.

On connaît déjà un vecteur propre associé à 0, puis à 8. Il reste à trouver un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que :

$$(U - 2.I)X = 0_{3,1} \iff \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 16 & 32 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} 3x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ & & 16y & + & 32z & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \begin{cases} 3x - 4z + z = 0 \iff x = z \\ y = -2z \end{cases}$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de U pour la valeur propre 2.

4. On note φ l'application de F dans $\mathbb{R}$ qui a toute matrice A de F, associe le nombre $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}a_{i,j}$.

   a) Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ deux matrices de F, et λ un réel quelconque. Alors la matrice $\lambda.A + B$ a pour coefficients : $(\lambda.a_{i,j} + b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ et :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda.A + B) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}(\lambda.a_{i,j} + b_{i,j}) = \sum_{i=1}^{3}\left(\lambda.\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}.a_{i,j} + \sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}.b_{i,j}\right) \\ &= \lambda.\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}a_{i,j} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}b_{i,j} \\ \varphi(\lambda.A + B) &= \lambda.\varphi(A) + \varphi(B) \end{aligned}$$

   On a utilisé ici deux fois de suite la linéarité de la somme. Remarquons que φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$, puisqu'elle calcule la somme des coefficients de la matrice à laquelle on l'applique, chacun affectés d'un coefficient égal à 1 ou -1.

   b) Puisque $\varphi : F \to \mathbb{R}$ est une application linéaire, son image $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$.
   Par conséquent : $\dim \mathrm{Im}(\varphi) \leqslant \dim \mathbb{R} = 1$, donc $\mathrm{Im}(\varphi)$ est soit de dimension 1, soit de dimension 0.
   Or $\mathrm{Im}(\varphi)$ n'est pas de dimension 0 ; sinon cela signifie que φ est l'application nulle, c'est-à-dire : $\forall A \in F,\ \varphi(A) = 0$, ce qui est évidemment absurde (on vérifie facilement que $\varphi(I) = 3$ par exemple).
   Donc $\dim \mathrm{Im}(\varphi) = 1$, et par conséquent : $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$.
   Il suffit alors d'appliquer le *théorème du rang* à l'application φ pour obtenir :

$$\dim \mathrm{Ker}(\varphi) + \dim \mathrm{Im}(\varphi) = \dim F \iff \dim \mathrm{Ker}(\varphi) = 3 - 1 = 2.$$

   c) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors :
   $\varphi(M) = x - y + x - y + z - y + x - y + x = 4x - 4y + z$ d'après la définition de φ, et :
   $\varphi(M) = 0 \iff 4x - 4y + z = 0 \iff z = 4y - 4x$, d'où :

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 4y - 4x & y \\ x & y & x \end{pmatrix} \middle| (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ x.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \middle| (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -4 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\right)$$

On a ainsi obtenu une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(\varphi)$; comme on sait déjà que $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = 2$, cela suffit à faire de cette famille une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Exercice 3

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

1. a) Soit $n \geqslant 1$: f_n est définie, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (fonction polynomiale), et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ f_n'(x) = nx^{n-1} + 18x \geqslant 0 \text{ et même : } f_n'(x) > 0 \text{ pour } x > 0.$$

La fonction f_n est donc **strictement croissante** et **continue** (fonction polynomiale!) sur $\mathbb{R}_+$.
De plus : $f_n(0) = -4 < 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^n + 9x^2 - 4 = +\infty$ (puisque les deux termes non constants tendent tous les deux vers $+\infty$).
Toutes les hypothèses sont donc réunies pour pouvoir utiliser le **théorème de la bijection** :

$$f_n \text{ réalise une bijection de } [0, +\infty[\text{ dans } [-4; +\infty[.$$

Comme $0 \in]-4, +\infty[$: il existe donc un unique réel strictement positif, noté u_n, tel que $f_n(u_n) = 0$.

b) • $f_1(x) = 0 \iff 9x^2 + x - 4 = 0$: cette équation du second degré, a pour discriminant $\Delta = 1 + 4.4.9 = 145 > 0$; il y a donc deux solutions distinctes $x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{145}}{18} < 0$ et $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{145}}{18} > 0$.

$$\text{Donc } u_1 = \frac{\sqrt{145} - 1}{18}$$

• $f_2(x) = 0 \iff 10x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = \dfrac{2}{5}$. Donc $u_2 = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

c) On rappelle que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$: les images de deux, ou trois réels par f_n sont donc rangées dans le même ordre que ces nombres.

On a pour $n \geqslant 1$: $f_n(0) = -4 < 0$ et $f_n\left(\dfrac{2}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 9.\dfrac{4}{9} - 4 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n > 0$.
D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ f_n(0) < f_n(u_n) = 0 < f_n\left(\frac{2}{3}\right)$$

Donc , par croissance <u>stricte</u> de f_n sur $\mathbb{R}_+$:

$$0 < u_n < \frac{2}{3}, \quad \text{ie} \quad u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$$

2. a) Pour tout $n \geqslant 1$, $x \in]0, 1[$: $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - x^n = x^n(x - 1)$.
Pour $x \in]0, 1[$: $x^n > 0$, $x - 1 < 0$ donc par produit : $\forall x \in]0, 1[, \ f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$.
On a bien :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f_{n+1}(x) < f_n(x)$$

b) Pour tout $n \geqslant 1$: $\quad u_{n+1} \in \left]0, \frac{2}{3}\right[\subset]0,1[$, donc :

$$\forall n \geqslant 1, \quad f_{n+1}(u_{n+1}) < f_n(u_{n+1}) \iff 0 < f_n(u_{n+1})$$

Mais on a aussi : $0 = f_n(u_n)$, donc :

$$\forall n \geqslant 1, \quad f_n(u_n) < f_n(u_{n+1})$$

D'où, par croissance stricte (là encore!) de f_n sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall n \geqslant 1, \; u_n < u_{n+1}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc (strictement) croissante.

c) On a vu en a) et en b) que : $(u_n)_n$ est croissante, et qu'elle est bornée ($\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$), donc majorée.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc convergente (et $\ell \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$) d'après le théorème de limite monotone.

3. a) On a vu au 1. c) que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_n < \frac{2}{3}$.

On a donc, par croissance stricte de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < (u_n)^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$0 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$: $\quad$ d'après le théorème d'encadrement, on peut donc conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n)^n = 0$$

b) On sait que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \; (u_n)^n + 9u_n^2 - 4 = 0$. $\quad$ Lorsque n tend vers $+\infty$, l'égalité est conservée puisque la limite du membre de gauche existe : en effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0 + 9.\ell^2 - 4$.

D'où : $\quad 9\ell^2 - 4 = 0 \iff \ell^2 = \frac{4}{9}$. Or ℓ est positive :

$$\text{Donc } \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$$

4. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\alpha_n = \frac{2}{3} - u_n$. On a déjà, par 1.c) : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \; \alpha_n > 0$.
D'autre part :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; (u_n)^n + 9u_n^2 - 4 = 0 \iff \frac{(u_n)^n}{9} = \frac{4}{9} - u_n^2 \iff \frac{(u_n)^n}{9} = \left(\frac{2}{3} - u_n\right)\left(\frac{2}{3} + u_n\right)$$

l'idée étant de faire apparaître α_n grâce à l'équation vérifiée par u_n. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \alpha_n = \frac{(u_n)^n}{6 + 9u_n}$$

(Rq. : $\frac{2}{3} + u_n > 0$ car $u_n > 0$). De 3.a) on tire :

$$0 \leqslant \alpha_n \leqslant \frac{(2/3)^n}{6 + 9u_n} \leqslant \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$(6 + 9u_n \geqslant 6 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{6 + 9u_n} \leqslant \frac{1}{6})$

Or : la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est convergente, comme série géométrique de raison $\frac{2}{3} \in]-1,1[$.

Le théorème de comparaison des séries à termes positifs assure donc que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \alpha_n$ est elle-même convergente.

PROBLÈME

On lance indéfiniment une pièce donnant "*Pile*" avec la probabilité p et "*Face*" avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que $p \in]0;1[$ et on admet que les lancers sont mutuellement indépendants.
Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on dit que le k-ième lancer est un changement s'il amène un résultat différent de ceui du $(k-1)$-ième lancer.
On note P_k (resp. F_k) l'événement : « on obtient "*Pile*" (resp. "*Face*") au k-ième lancer ».
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

Partie 1 : étude de quelques exemples

1. En deux lancers, il peut y avoir 1 changement, ou aucun : $X_2(\Omega) = \{0;1\}$.
   $[X_2 = 0] = (P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)$, réunion de deux événements incompatibles, et les lancers sont indépendants, donc : $P(X_2 = 0) = p^2 + q^2$. De même :
   $[X_2 = 1] = (P_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap P_2)$, et $P(X_2 = 1) = pq + qp = 2qp$ par les mêmes arguments.
2. a) En trois lancers : $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
   - $[X_3 = 0] = (P_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3)$, et $P(X_3 = 0) = p^3 + q^3$.
   - $[X_3 = 1] = (P_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (P_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3)$,
     et $P(X_3 = 1) = pq^2 + p^2q + qp^2 + q^2p = 2pq^2 + 2qp^2 = 2pq(p+q) = 2pq$
   - $[X_3 = 2] = (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3)$,
     et $P(X_3 = 2) = pqp + qpq = pq(p+q) = pq$.

   b) $X_3(\Omega)$ est fini, donc X_3 admet une espérance qui vaut :

   $$E(X_3) = 0.P(X_3 = 0) + 1.P(X_3 = 1) + 2.P(X_3 = 2) = 2pq + 2pq = 4pq.$$

   X_3 admet aussi un moment d'ordre 2 qui vaut :

   $$E(X_3^2) = 0^2.P(X_3 = 0) + 1^2.P(X_3 = 1) + 2^2.P(X_3 = 2) = 2pq + 4pq = 6pq.$$

   La v.a.r. X_3 admet enfin une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

   $$V(X_3) = E(X_3^2) - E(X_3)^2 = 6pq - 16p^2q^2 = 2pq(3 - 8pq).$$

3. a) $X_4(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$, et :
   - $P(X_4 = 0) = p^4 + q^4$, $\quad P(X_4 = 3) = P(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4) + P(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) = 2p^2q^2$.
   - Les cas favorables à l'événement $[X_4 = 1]$ sont :
     $P_1F_2F_3F_4,\ P_1P_2F_3F_4,\ P_1P_2P_3F_4,\ F_1P_2P_3P_4,\ F_1F_2P_3P_4,\ F_1F_2F_3P_4$, donc :
     $P(X_4 = 1) = pq^3 + p^2q^2 + p^3q + qp^3 + q^2p^2 + q^3p = 2pq(q^2 + pq + p^2)$.
   - Les cas favorables à l'événement $[X_4 = 2]$ sont :
     $P_1F_2P_3P_4,\ P_1F_2F_3P_4,\ P_1P_2F_3P_4,\ F_1P_2F_3F_4,\ F_1P_2P_3F_4,\ F_1F_2P_3F_4$, donc :
     $P(X_4 = 2) = p^3q + p^2q^2 + p^3q + pq^3 + p^2q^2 + pq^3 = 2pq(p^2 + pq + q^2)$.

Partie 2 : étude du cas $p \neq q$

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. En n lancers, le nombre de changements est au minimum égal à 0, et au maximum il y a $n-1$ changements, toutes les valeurs possibles sont intermédiaires : $X_n(\Omega) = [\![0; n-1]\!]$.

   $[X_n = 0] = (P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n)$, réunion de deux événements incompatibles. Les lancers étant indépendants : $P(X_n = 0) = p^n + q^n$.

2. Pour qu'il y ait un seul changement en n lancers, il faut commencer par un certain nombre k de résultats identiques, suivi de $n-k$ résultats contraires ($1 \leqslant k \leqslant n-1$). Cela peut s'écrire :

$$[X_n = 1] = \bigcup_{k=1}^{n-1} [(P_1 \cap \ldots \cap P_k \cap F_{k+1} \cap \ldots \cap F_n) \cup (F_1 \cap \ldots \cap F_k \cap P_{k+1} \cap \ldots \cap P_n)]$$

   C'est une réunion d'événements incompatibles deux à deux, donc :

$$P(X_n = 1) = \sum_{k=1}^{n-1} p^k q^{n-k} + q^k p^{n-k} = q^n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^k + p^n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} \quad \text{sommes géométriques}$$

$$= q^n . \frac{p}{q} . \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}}{1 - \frac{p}{q}} + p^n . \frac{q}{p} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}}{1 - \frac{q}{p}} \quad \text{comme } p \neq q,\ .\frac{p}{q} \neq 1 \text{ et } \frac{q}{p} \neq 1$$

$$= \frac{pq^n - qp^n}{q - p} + \frac{qp^n - pq^n}{p - q} = \frac{pq^n - qp^n - qp^n + pq^n}{p - q} = \frac{2pq}{p - q}(q^{n-1} - p^{n-1})$$

3. L'événement $[X_n = n-1]$ est réalisé si et seulement si chacun des lancers, du deuxième au n-ième, amène un résultat contraire au précédent.

   $\star$ Si n est pair : $[X_n = n-1] = (P_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap P_{n-1} \cap F_n) \cup (F_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n)$ (il y a autant de Piles que de Faces dans les deux cas), donc :

$$P(X_n = n-1) = (pq)^{\frac{n}{2}} + (qp)^{\frac{n}{2}} = 2(pq)^{\frac{n}{2}} \quad \text{dans le cas où } n \text{ est pair.}$$

   $\star$ Si n est impair :
   $[X_n = n-1] = (P_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap P_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n) \cup (F_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap F_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n)$, le résultat qui commence la série, la termine aussi :

$$P(X_n = n-1) = (pq.pq \ldots pq.p) + (qp.qp. \ldots .qp.q) = (pq)^{\frac{n-1}{2}}.(p+q) = (pq)^{\frac{n-1}{2}} \text{ quand } n \text{ est impair.}$$

4. Toutes ces formules permettent de retrouver rapidement les lois de X_3 et X_4, il suffit d'identifier à chaque calcul de probabilité, la bonne formule à employer :
   - Pour X_3 : $P(X_3 = 0) = p^3 + q^3$ d'après 1., $P(X_3 = 2) = (pq)^{\frac{3-1}{2}} = pq$ d'après 3. puisque 3 est impair, et :
     $P(X_3 = 1) = \dfrac{2pq}{p-q}(p^2 - q^2) = \dfrac{2pq}{p-q} \times (p-q)(p+q) = 2pq$ puisque $p + q = 1$.
   - Pour X_4 : $P(X_4 = 0) = p^4 + q^4$, $P(X_4 = 3) = 2(pq)^{\frac{4}{2}} = 2p^2q^2$ puisque 4 est pair.
   - $P(X_4 = 1) = \dfrac{2pq}{p-q}(p^3 - q^3) = \dfrac{2pq}{p-q} \times (p-q)(p^2 + qp + q^2)$ (identité remarquable généralisée), soit : $P(X_4 = 1) = 2pq(p^2 + pq + q^2)$. Enfin :
     $P(X_4 = 2) = 1 - P(X_4 = 0) - P(X_4 = 1) - P(X_4 = 3) = 1 - p^4 - q^4 - 2pq(p^2 + pq + q^2) - 2p^2q^2$ dont on vérifie qu'on obtient bien le résultat ptécédent après simplifications.

5. On suppose toujours $p \neq q$ dans cette question. Pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, on note Z_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le k-ième lancer est un changement, et 0 sinon.

   On a bien sûr affaire à une variable de Bernoulli, pour laquelle le succès : "obtenir un changement au k-ième lancer" est l'événement :
   $(P_{k-1} \cap F_k) \cup (F_{k-1} \cap P_k)$, de probabilité $2pq$ (calculs semblables à ceux de la loi de X_2).
   Ainsi : $P(Z_k = 1) = 2pq$ et $P(Z_k = 1) = 1 - 2pq$ $(= p^2 + q^2$ au passage).

   La variable X_n compte le nombre de changements obtenus depuis le lancer 2 (le premier où on peut observer un changement), jusqu'au n-ième.

   La relation classique s'applique : $X_n = \sum_{k=2}^{n} Z_k$, puisque chaque changement ($[Z_k = 1]$ réalisé) contribuera d'une unité à la somme, et sinon ne modifiera pas sa valeur.
   La linéarité de l'espérance donne ensuite :

$$E(X_n) = \sum_{k=2}^{n} E(Z_k) = \sum_{k=2}^{n} 2pq = (n-1).2pq$$

Partie 3 : étude du cas $p = q$

1. Comme souvent (toujours !), l'examen de l'*univers-image* est fondamental pour éviter les erreurs d'interprétation !

   On a vu que $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, donc la seule loi binomiale que pourrait suivre X_3, aurait pour premier paramètre... $n = 2$ et pas 3 ! Avec $p = q = 1/2$, $E(X_3) = 1$, donc le deuxième paramètre doit valoir $1/2$ puisque le produit des deux paramètres doit donner l'espérance de la loi binomiale.

   On recalcule les valeurs de la loi en prenant en compte que $p = q = 1/2$, et on compare avec celles de la loi binomiale $\mathcal{B}(2, 1/2)$:

$P(X_3 = 0)1/8 + 1/8 = 1/4$	$\binom{2}{0}(1/2)^0(1/2)^2 = 1.1.1/4$
$P(X_3 = 1) = 2.1/2.1/2 = 1/2$	$\binom{2}{1}(1/2)^1(1/2)^1 = 2.1/4 = 1/2$
$P(X_3 = 2) = 1/2.1/2 = 1/4$	$\binom{2}{2}(1/2)^2(1/2)^0 = 1.1/4.1 = 1/4$

   On a bien vérifié que $X_3 \hookrightarrow \mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$.
   Une démarche similaire montre que $X_4 \hookrightarrow \mathcal{B}(3, \frac{1}{2})$. Les calculs sont laissés au lecteur assidu et ne présentent pas de difficulté particulière.

2. Justifions plus généralement que X_n suit, quand $p = q = 1/2$, la loi binomiale de paramètres $(n-1, 1/2)$: il y a en effet $n-1$ changements au maximum en n lancers, et X_n compte ce nombre de changements survenus au cours des $n-1$ lancers *qui suivent le premier*.

   Le fait que la pièce soit équilibrée rend les changements *indépendants* : lorsqu'on a $p < q$ par exemple, un Pile au premier lancer va donner un changement (Face) au lancer suivant avec une plus forte probabilité, que dans le cas contraire !

   Ce n'est plus le cas maintenant, le changement est toujours de probabilité $1/2$ (valeur de $2pq$ quand $p = q = 1/2$) : on a bien montré que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1, \frac{1}{2})$.