MATHÉMATIQUES - EMLyon E 2016

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On note I et A les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et $\mathscr{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathscr{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} ; \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

PARTIE I : Étude de la matrice A

1. Le calcul matriciel donne : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Soient a, b, c trois réels tels que :

$$a.I + b.A + c.A^2 = 0_3 \iff \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff a = b = c = 0$$

par identification des coefficients. La famille (I, A, A^2) est bien libre.

3. a) La matrice A est symétrique réelle : elle est donc bien diagonalisable, d'après le théorème (admis) du cours.

b) Bien qu'on sache déjà que A est diagonalisable, pour répondre à cette question il faut déterminer les valeurs propres de A ; ce sont les réels λ tels que $A - \lambda.I$ est non inversible.

$$A - \lambda.I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + \lambda.L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda^2)L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix}$$

où $Q(\lambda) = \lambda + (1-\lambda^2)\lambda = \lambda(2-\lambda^2)$.

La matrice $A - \lambda.I$est non-inversible si et seulement si sa réduite de Gauss l'est : cela se produit si et seulement si l'un au moins des coefficients diagonaux de cette dernière, est nul, donc si et seulement si λ est racine du polynôme Q. On en déduit :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}.$$

Calcul des sous-espaces propres :

- $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \iff AX = 0_{3,1} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$.

  Ainsi : $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \middle| \ x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

- $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\sqrt{2}}(A) \iff (A - \sqrt{2}I)X = 0_{3,1} \iff \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\iff \begin{cases} x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2z + z = 0 \\ y = \sqrt{2}z \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = \sqrt{2}z \end{cases}$.

  Ainsi : $E_{\sqrt{2}}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ \sqrt{2}z \\ z \end{pmatrix} \middle| \ z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

- $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-\sqrt{2}}(A) \iff (A + \sqrt{2}I)X = 0_{3,1} \iff \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\iff \begin{cases} x + \sqrt{2}y + z = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2z + z = 0 \\ y = -\sqrt{2}z \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -\sqrt{2}z \end{cases}$.

  Ainsi : $E_{-\sqrt{2}}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -\sqrt{2}z \\ z \end{pmatrix} \middle| \ z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

La matrice A admet trois valeurs propres distinctes, ce qui confirme qu'elle est diagonalisable. Il suffit pour obtenir une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres pour A, de réunir les trois vecteurs propres précédemment obtenus : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage demandée, telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

4. Cette question se résout directement par le calcul matriciel de $A^3 = A \times A^2$ dont on vérifie qu'elle vaut $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$...

On imagine que si cette question est posée à cet instant, c'est qu'on veut utiliser la formule de changement de base, qui donne :

$$A^3 = PD^3P^{-1} = P \begin{pmatrix} (-\sqrt{2})^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0^3 & 0 \\ 0 & 0 & (\sqrt{2})^3 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1} = P \times 2.DP^{-1} = 2PDP^{-1} = 2A$$

On a exploité le fait que D est diagonale, et donc ses puissances sont immédiates.

PARTIE II : Étude d'une application définie sur $\mathscr{E}$

5. Il suffit ici d'écrire :

$$\mathscr{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} ; \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ a.I + b.a + c.A^2 ; \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect}(I, A, A^2)$$

pour prouver que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, comme sous-espace engendré par la famille (I, A, A^2). Comme celle-ci est par ailleurs libre (prouvé à la question **2.**), c'est une base de $\mathscr{E}$, et $\dim \mathscr{E} = 3$.

6. D'après ce qui précède : une matrice M appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si il existe trois réels a, b, c tels que $M = a.I + b.A + c.A^2$.

Mais alors : $AM = a.A + b.A^2 + c.A^3 = 0.I + (a + 2c).A + b.A^2$ puisque $A^3 = 2A$, ce qui prouve que $AM \in \text{Vect}(I, A, A^2) = \mathscr{E}$.

On note f l'application de $\mathscr{E}$ dans lui-même, qui à toute matrice M de $\mathscr{E}$ associe AM.

7. La linéarité de f vient de la distributivité du produit matriciel :

$$\forall (M, N \in \mathscr{E}, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda.M + N) = A(\lambda.M + N) = \lambda.AM + AN = \lambda.f(M) + f(N)$$

Et comme on a vu que $f : \ \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, c'est bien un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

8. Les images : $f(I) = A, \ f(A) = A^2, \ f(A^2) = A^3 = 2A$ permettent d'en déduire la matrice de f dans la base (I, A, A^2) de $\mathscr{E}$:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. a) On passe ici par la représentation matricielle de f par F :

$$F^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F^3 = F \times F^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On a bien $F^3 = 2F$ donc l'égalité d'applications : $f \circ f \circ f = 2f$ est ainsi vérifiée.

b) L'égalité précédente, qui s'écrit aussi : $f^3 - 2f = 0$ (endomorphisme nul), exprime que $P(X) = X^3 - 2X$ est un polynôme annulateur de f, et on sait qu'alors, les valeurs propres λ de f sont toutes racines de P : elles vérifient toutes $\lambda^3 = 2\lambda$.

On redonne ci-dessous la preuve dans le cas présent, de cette propriété importante :

Toute valeur propre λ de f, est associée à un vecteur propre **non-nul**, en l'occurrence $M \in \mathscr{E} \setminus \{0_3\}$ tel que : $f(M) = \lambda.M$.

Mais alors : $f \circ f(M) = f(f(M)) = f(\lambda.M) = \lambda.f(M) = \lambda^2.M$ et de même : $f^3(M) = f(f^2(M)) = f(\lambda^2.M) = \lambda^2.f(M) = \lambda^2.\lambda.M = \lambda^3.M$.

Et comme $f^3 = 2f$, on a ainsi : $\lambda^3.M = 2\lambda.M \iff \lambda^3 = 2\lambda$ puisque $M \neq 0_3$.

c) D'après ce qui précède, les valeurs propres *possibles* de f sont donc $-\sqrt{2}, 0$ et $\sqrt{2}$.

On vérifie chacune en cherchant les matrices M de $\mathscr{E}$ qui vérifient : $f(M) = \lambda.M$. Les calculs menés précédemment, à la question **6.** notamment, amènent à résoudre le problème sous la forme : $(a + 2c).A + b.A^2 = \lambda.(a.I + b.A + c.A^2)$, où a, b, c sont les inconnues réelles.

Le fait que (I, A, A^2) soit une base de $\mathscr{E}$ rend même cette relation équivalente au système :

$$\begin{cases} 0 & = \lambda.a \\ a + 2c & = \lambda.b \\ b & = \lambda.c \end{cases}, \text{ par unicité des coordonnées dans cette base.}$$

- Pour $\lambda = 0$:

$$f(M) = 0_3 \iff (a + 2c).A + b.A^2 = 0_3 \iff \begin{cases} a + 2c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2c \\ b = 0 \end{cases}$$

Donc 0 est bien valeur propre de f (il y a une infinité de solutions), et :

$$E_0(f) = \big\{ -2c.I + c.A^2 | \ c \in \mathbb{R} \big\} = \text{Vect}(A^2 - 2.I)$$

- Pour $\lambda = \sqrt{2}$:

$$f(M) = \sqrt{2}.M \iff (a+2c).A+b.A^2 = \sqrt{2}.(a.I+b.A+c.A^2) \iff \begin{cases} a+2c & = \sqrt{2}b \\ \sqrt{2}a & = 0 \\ b & = \sqrt{2}c \end{cases} \iff \begin{cases} a & = 0 \\ b & = \sqrt{2}c \end{cases}$$

Donc $\sqrt{2}$ est bien valeur propre de f, et :

$$E_{\sqrt{2}}(f) = \left\{\sqrt{2}c.A + c.A^2 |\ c \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}(\sqrt{2}.A + A^2)$$

- Pour $\lambda = -\sqrt{2}$:

$$f(M) = -\sqrt{2}.M \iff (a+2c).A+b.A^2 = -\sqrt{2}.(a.I+b.A+c.A^2) \iff \begin{cases} a+2c & = -\sqrt{2}b \\ -\sqrt{2}a & = 0 \\ b & = -\sqrt{2}c \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = -\sqrt{2}c \end{cases}$$

Donc $-\sqrt{2}$ est bien valeur propre de f, et :

$$E_{-\sqrt{2}}(f) = \left\{ -\sqrt{2}c.A + c.A^2 |\ c \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}(-\sqrt{2}.A + A^2)$$

10. L'endomorphisme f n'est pas bijectif puisque 0 est valeur propre de f ($E_0(f) = \text{Ker}(f)$ n'est pas réduit à $\{0_3\}$).

Par ailleurs, f est un endomorphisme de $\mathscr{E}$ possédant trois valeurs propres distinctes : comme $\dim \mathscr{E} = 3$, le critère suffisant est vérifié, qui assure que f est diagonalisable.

11. On a déjà obtenu $\text{Ker}(f)$, qui correspond au sous-espace propre pour la valeur propre 0 :

$\text{Ker}(f) = \text{Vect}(A^2 - 2.I)$. Comme la matrice $A^2 - 2.I$ qui engendre $\text{Ker}(f)$ n'est pas la matrice nulle, elle constitue une base du noyau.

Comme (I, A, A^2) est une base de $\mathscr{E}$, d'après la propriété de cours :

$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(I), f(A), f(A^2)) = \text{Vect}(A, A^2, A^3) = \text{Vect}(A, A^2, 2.A) = \text{Vect}(A, A^2)$.

La famille (A, A^2) étant libre comme sous-famille d'une famille libre, c'est une base de $\text{Im}(f)$.

12. a) Comme on vient de le voir, toute matrice de $\text{Im}(f)$ est combinaison linéaire de A et A^2 seulement, ce qui est impossible pour la matrice $I + A^2$, vu que la famille (I, A, A^2) est libre.

L'équation $f(M) = I + A^2$, d'inconnue $M \in \mathscr{E}$, n'admet donc aucune solution.

b) Cette fois, $A + A^2$ appartient bien à $\text{Vect}(A, A^2) = \text{Im}(f)$ et l'équation $f(M) = A + A^2$ admet des solutions dans $\mathscr{E}$. On cherche M sous la forme $M = a.I + b.A + c.A^2$, comme à la question **9.c)**, de sorte que :

$$f(M) = A + A^2 \iff (a+2c).A + b.A^2 = A + A^2 \iff \begin{cases} a + 2c = 1 \\ b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 - 2c \\ b = 1 \end{cases}$$

On trouve donc une infinité de solution, qui sont toutes les matrices $M = (1-2c).I + A + c.A^2$, où c est un réel quelconque.

Exercice 2

On considère l'application $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0;+\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

On admet : $\quad 0,69 < \ln(2) < 0,70.$

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. La fonction f est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$ comme somme et produit de fonctions continues sur cet intervalle. Par ailleurs :

$\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln(t) = 0$ par croissances comparées, donc $\lim\limits_{t\to 0^+} t^2 - t\ln(t) = 0^2 - 0 = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 0 = f(0)$, ce qui prouve que f est continue en 0.

Finalement, la fonction f est continue sur $[0;+\infty[$.

2. La fonction f est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$ comme somme et produit de telles fonctions, et :

$$\forall t \in]0;+\infty[, \quad f'(t) = 2t - (\ln(t) + t \times \frac{1}{t}) = 2t - 1 - \ln(t); \quad f''(t) = 2 - \frac{1}{t}$$

3. On étudie d'abord les variations de f', donc le signe de $f''(t)$, comme l'énoncé nous y incite :

$\forall t \in]0;+\infty[,\ f''(t) = 2 - \frac{1}{t} = \frac{2t-1}{t}$. $\quad$ Comme $t > 0$, $f''(t)$ a le signe de $2t - 1$:

t	0		$1/2$		$+\infty$
$2t-1$		$-$	0	$+$	
$f''(t)$		$-$	0	$+$	
f'		↘		↗	

La fonction f' admet donc un minimum atteint en $t = \frac{1}{2}$, qui vaut $f'(\frac{1}{2}) = 1 - 1 - \ln(\frac{1}{2}) = \ln(2) > 0$:

on en déduit que f' est strictement positive sur $]0;+\infty[$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Pour tout $t \in]0;+\infty[$: $\quad f(t) = t^2 - t\ln(t) = t^2\left(1 - \frac{\ln(t)}{t}\right)$, où :

$\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$ par croissances comparées, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} 1 - \frac{\ln(t)}{t} = 1$, soit

$$\lim_{t\to+\infty} t^2\left(1 - \frac{\ln(t)}{t}\right) = +\infty = \lim_{t\to+\infty} f(t).$$ D'où le tableau de variations :

t	0		$+\infty$
$f'(t)$	$\Vert$	$+$	
f	0	↗	$+\infty$

4. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) Pour savoir si la courbe C admet une tangente en O, on étudie la dérivabilité de f en 0, et on écrit pour cela son taux d'accroissement en ce point :

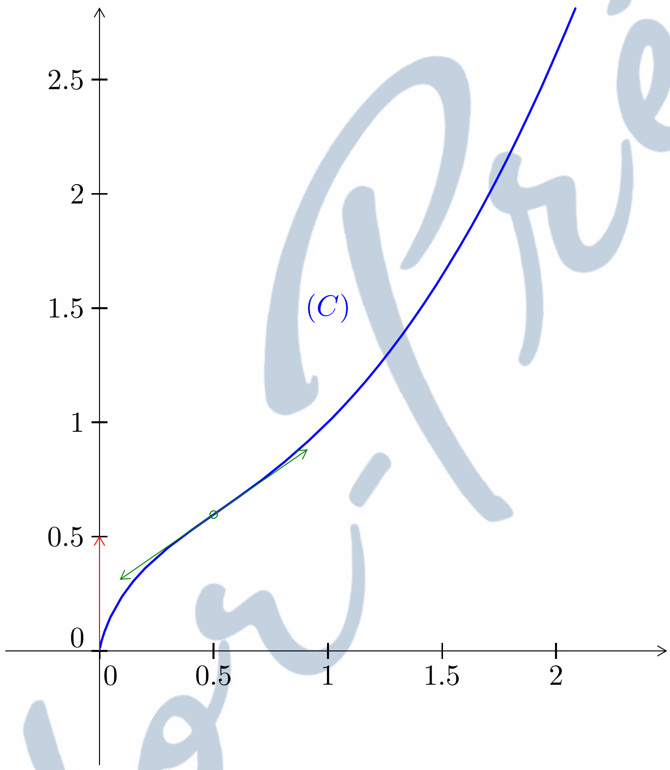
$\forall t \in]0;+\infty[,\ \dfrac{f(t)-f(0)}{t-0} = t - \ln(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} +\infty.$

On en déduit que f n'est pas dérivable en 0, mais que la courbe C admet une demi-tangente verticale en O.

b) On a vu à la question **3.**, que f'' s'annule en changeant de signe, une seule fois sur $]0;+\infty[$ en $t=\dfrac{1}{2}$.

La courbe C admet donc un unique point d'inflexion de coordonnées $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln(2))$.

c) On trace une allure cohérente de C en tenant compte de tous les éléments précédents, et en adaptant l'échelle :



5. La fonction f est continue, strictement croissante sur $[0;+\infty[$, à valeurs dans $[0;+\infty[$ qui contient 1 : d'après le théorème de la bijection, il existe une unique solution $t\in[0;+\infty[$ à l'équation $f(t)=1$. Comme de plus, $f(1) = 1^2 - 1\ln(1) = 1-0 = 1$, le réel 1 est bien cette unique solution.

PARTIE II : Étude d'une fonction F de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0;+\infty[^2 \to \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall (x,y) \in]0;+\infty[^2, \quad F(x,y) = x\ln(y) - y\ln(x).$$

6. La fonction F de classe C^2 admet pour dérivée partielles d'ordre 1 :

$$\forall (x,y) \in]0;+\infty[^2, \quad \partial_1(F)(x,y) = \ln(y) - \frac{y}{x}, \quad \partial_2(F)(x,y) = \frac{x}{y} - \ln(x)$$

7. a) Soit $(x,y)\in]0;+\infty[^2$. (x,y) est un point critique de F si et seulement si :

$$\begin{cases}\partial_1(F)(x,y) &= 0\\ \partial_2(F)(x,y) &= 0\end{cases} \iff \begin{cases}\ln(y)-\dfrac{y}{x} &= 0\\ \dfrac{x}{y}-\ln(x) &= 0\end{cases} \iff \begin{cases}x\ln(y)-y &= 0\\ x-y\ln(x) &= 0\end{cases}$$

Il est alors clair que si $0<x\leqslant 1$, alors $\ln(x)\leqslant 0$ et $x-y\ln(x)>0$ ne peut jamais s'annuler. (x,y) est donc point critique de F si et seulement si :

$$\begin{cases}x>1 \text{ et } y=\dfrac{x}{\ln(x)}\\ x\ln(\dfrac{x}{\ln(x)})-\dfrac{x}{\ln(x)}=0\end{cases} \iff \begin{cases}x>1 \text{ et } y=\dfrac{x}{\ln(x)}\\ \ln(x)-\ln(\ln(x))-\dfrac{1}{\ln(x)}=0\end{cases} \iff \begin{cases}x>1 \text{ et } y=\dfrac{x}{\ln(x)}\\ [\ln(x)]^2-\ln(x).\ln(\ln(x))=1\end{cases}$$

Ce qui est bien : (x,y) est point critique de F si et seulement si

$$x>1,\quad y=\frac{x}{\ln(x)}\quad \text{et}\quad f\big(\ln(x)\big)=1.$$

b) Comme on l'a vu, l'équation $f(t)=1$ admet l'unique solution strictement positive $t=1$, donc : $f(\ln(x))=1 \iff \ln(x)=1 \iff x=e$, et comme alors $y=\dfrac{x}{\ln(x)}=e$, la fonction F admet bien un unique point critique, qui est (e,e).

8. La fonction F étant de classe C^2 sur $]0;+\infty[^2$: son seul point critique est aussi son seul extrémum possible. Pour connaître sa nature, on écrit la Hessienne de F en (e,e), en commençant d'abord par le calcul des dérivées partielles d'ordre deux :

$$\forall(x,y)\in]0;+\infty[^2,\quad \partial^2_{1,1}(F)(x,y)=\frac{y}{x^2},\quad \partial^2_{2,2}(F)(x,y)=-\frac{x}{y^2}$$

$$\forall(x,y)\in]0;+\infty[^2,\quad \partial^2_{1,2}(F)(x,y)=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\partial^2_{2,1}(F)(x,y)\quad \text{(th. de Schwarz)}$$

La Hessienne de F en (e,e) est donc : $\quad H=\begin{pmatrix}e^{-1} & 0\\ 0 & -e^{-1}\end{pmatrix}$.

Cette matrice est diagonale, donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux $e^{-1}>0$ et $-e^{-1}<0$: on peut donc conclure qu'au point critique (e,e), la fonction F n'admet pas d'extrémum local, mais un point-col.

PARTIE III : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\quad u_0=\dfrac{1}{2}\quad$ et $\quad\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$.

9. Montrons par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$: $u_n\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$, est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ Il est évident que $\mathcal{P}(0)$ est vraie vu la valeur $u_0=\dfrac{1}{2}$ choisie par l'énoncé.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

On admet : $\dfrac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant 1$, or f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, donc :

$f(\dfrac{1}{2})\leqslant f(u_n)\leqslant f(1) \iff \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\ln(2)\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$. Or : $\ln(2)>\dfrac{1}{2}$, donc $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\ln(2)>\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Par transitivité de l'inégalité, on obtient bien : $\dfrac{1}{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$, et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

10. Le plus simple est ici de procéder à nouveau par récurrence, cette fois pour prouver que la propriété $\mathcal{Q}(n)$: "$u_n \leqslant u_{n+1}$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ $u_1 = f(u_0) = f(\frac{1}{2})$ pour lequel on a déjà prouvé à la question précédente : $\frac{1}{2} \leqslant f(\frac{1}{2})$, donc $u_0 \leqslant u_1$ et $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{Q}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et sous cette hypothèse, montrons que $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie :

On admet : $u_n \leqslant u_{n+1}$, or f est croissante sur $[0;+\infty[$, donc :
$f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \iff u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$, et $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{Q}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante.

11. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par 1 : elle est par conséquent convergente, d'après le théorème de limite monotone, de limite $\ell \in \left[\frac{1}{2};1\right]$. La fonction f étant continue sur cet intervalle, la limite ℓ est un point fixe de f, solution de l'équation :

$$f(\ell) = \ell \iff \ell^2 - \ell\ln(\ell) = \ell \iff \ell - \ln(\ell) = 1 \qquad (\ell \geqslant \frac{1}{2})$$

Une étude rapide de la fonction h : $t \mapsto t - \ln(t)$ montre qu'elle est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$; comme $1 - \ln(1) = 1$, 1 est solution de la dernière équation, et la stricte décroissante de la fonction h assure qu'il n'y en a pas d'autre. Finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

12. Question d'informatique logique : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers 1, pour N assez grand $1-u_N > 0$ peut être rendu aussi petit qu'on le souhaite.

```
N=0; u=1/2
while 1-u > 1e-4
    u = u^2-u*log(u)
    N = N+1
end
disp(N)
```

Exercice 3

PARTIE I : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $\quad f(t)=\dfrac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

1. La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ puisque : $\forall t\in\mathbb{R},\ 1+e^{-t}>0$, et :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ -t\in\mathbb{R} \text{ avec } f(-t)=\frac{e^t}{(1+e^t)^2}=\frac{e^{2t}\times e^{-t}}{(e^t(e^{-t}+1))^2}=\frac{e^{2t}\times e^{-t}}{e^{2t}\times(1+e^{-t})^2}=\frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}=f(t)$$

Donc f est bien une fonction paire.

2. On vérifie les trois conditions sur f :

- La fonction f est bien continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions de référence continues sur $\mathbb{R}$, dont le dénominateur ne s'annule jamais.
- La fonction f est bien positive sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux expressions toujours positives.
- Pour tout réel $A>0$:

$$\int_0^A f(t)\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{1+e^{-t}}\right]_0^A=\frac{1}{1+e^{-A}}-\frac{1}{2}$$

On a en effet reconnu une expression du type $-\dfrac{u'}{u^2}$ qui a pour primitive $\dfrac{1}{u}$, avec $u:\ t\mapsto e^{-t}$ et $u':\ t\mapsto -e^{-t}$.

Comme $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}-\frac{1}{1+e^{-A}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{1+0}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.

Et comme f est paire : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=1.$

La fonction f est bien une densité de probabilité.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

3. La fonction de répartition F_X de X, est définie par : $\quad\displaystyle\forall x\in\mathbb{R},\ F_X(x)=\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t.$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, et tout $B\leqslant x$:

$$\int_B^x f(t)\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{1+e^{-t}}\right]_B^x=\frac{1}{1+e^{-x}}-\frac{1}{1+e^{-B}}$$

où : $\displaystyle\lim_{B\to-\infty}1+e^{-B}=+\infty$, donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F_X(x)=\lim_{B\to-\infty}\int_B^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{1+e^{-x}}.$$

4. a) Il y a plusieurs méthodes plus ou moins efficaces pour répondre à cette question, voici une possibilité :

Pour tout réel $t\in[0,+\infty[,\ tf(t)=\dfrac{te^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\leqslant te^{-t}$ puisque $1+e^{-t}>1$ et $te^{-t}\geqslant 0$ pour $t\in[0,+\infty[$.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty}te^{-t}\mathrm{d}t$ converge (et vaut 1) puisque cette intégrale impropre est égale à l'espérance d'une loi exponentielle de paramètre 1, bien définie d'après le cours.

Les fonctions concernées étant continues et postives sur $[0,+\infty[$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty}tf(t)\mathrm{d}t$ converge, d'après le théorème de comparaison des intégrales impropres de telles fonctions.

b) La fonction f étant paire, alors $g: t \mapsto tf(t)$ est effectivement impaire : $\forall t \in \mathbb{R},\ g(-t) = -tf(-t) = -tf(t) = -g(t)$.

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge (absolument, c'est une fonction positive sur $\mathbb{R}_+$), alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente et vaut $\displaystyle -\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$.

On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} tf(t)\mathrm{d} + \int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ est elle-même absolument convergente et vaut 0.

Cela signifie bien que X admet une espérance qui vaut $E(X) = 0$.

PARTIE II : Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1+e^x)$.

5. La fonction $x \mapsto 1 + e^x$ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]1, +\infty[$ sur lequel ln est elle-même continue, strictement croissante : par composition, la fonction φ est donc elle-même continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 + e^x = +\infty = \lim_{X\to+\infty} \ln(X)$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^x) = +\infty$ par composition.

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 1 + e^x = 1$, et ln est continue en 1, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^x) = \ln(1) = 0$.

Le théorème éponyme[1] assure alors que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $I =]0, +\infty[$.

6. On résout, pour tout réel $y \in]0, +\infty[$, l'équation $y = \varphi(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$y = \varphi(x) \iff y = \ln(1+e^x) \iff e^y = 1 + e^x \iff e^y - 1 = e^x \iff x = \ln(e^y - 1)$$

Ainsi : $\forall y \in I =]0, +\infty[,\quad \varphi^{-1}(y) = \ln(e^y - 1)$, bien défini puisque $e^y > 1$ lorsque $y > 0$.

On définit la variable aléatoire réelle Y en posant : $Y = \varphi(X)$.

7. Pour tout réel x : $1 + e^x > 1$, donc $\varphi(x) = \ln(1+e^x) > 0$ par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

L'événement $[Y \leqslant 0] = [\varphi(X) \leqslant 0]$ est donc négligeable (ou quasi-impossible), et $P(Y \leqslant 0) = 0$.

8. De la question précédente, on déduit déjà, par croissance et positivité d'une fonction de répartition :

$$\forall x \in]-\infty, 0],\quad 0 \leqslant P(Y \leqslant x) \leqslant P(Y \leqslant 0) = 0 \Longrightarrow \forall x \in]-\infty, 0],\ F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = 0$$

On calcule alors, pour tout réel $x > 0$:

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= P(Y \leqslant x) = P(\varphi(X) \leqslant x) = P(X \leqslant \varphi^{-1}(x)) && \text{car } \varphi \text{ est bijective, croissante sur } \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{1+\exp(-\varphi^{-1}(x))} && \text{d'après l'expression de } F_X \text{ calculée en } \mathbf{3.} \\
&= \frac{1}{1+\dfrac{1}{e^x - 1}} && \text{d'après l'expression de } \varphi^{-1} \text{ calculée en } \mathbf{6.} \\
F_Y(x) &= \frac{e^x - 1}{e^x} = 1 - e^{-x}
\end{aligned}$$

Bilan : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

9. La fonction de répartition de Y est celle d'une **loi exponentielle de paramètre** $\lambda = 1$, la variable aléatoire Y suit donc cette loi.

Le cours donne : $\quad E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 1 \quad$ et $\quad V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2} = 1$.

1. Un peu de raffinement dans l'expression :-)

PARTIE III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variable aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la partie I.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad T_n = \max(X_1, \ldots, X_n) \quad$ et $\quad U_n = T_n - \ln(n)$.

10. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout réel x : $\quad [T_n \leqslant x] = \bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k \leqslant x]$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_{T_n}(x) = P(T_n \leqslant x) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leqslant x) \qquad \text{par indépendance des } X_k$$
$$= (F_X(x))^n \qquad \text{car les } X_k \text{ ont toutes même loi que } X \text{ définie en I.}$$
$$= \frac{1}{(1+e^{-x})^n}$$

b) Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad P(U_n \leqslant x) = P(T_n - \ln(n) \leqslant x) = P(T_n \leqslant x + \ln(n)) = \frac{1}{(1+e^{-x-\ln(n)})^n}$$
$$= \left(1 + e^{-x} \times e^{-\ln(n)}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}.$$

1. On étudie classiquement la limite de $P(U_n \leqslant x)$ lorsque n tend vers $+\infty$, pour chaque réel x fixé ; on passe ici par la forme exponentielle des puissances :

$$\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)\right),\text{ où :}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{n} = 0$, on peut donc utiliser le développement limité de $\ln(1+u)$ à l'ordre 1 en 0 : $\ln(1+u) = u + o(u)$ pour écrire :

$$-n\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right) = -n.\left(\frac{e^{-x}}{n} + o(\frac{1}{n})\right) = -e^{-x} + o(1),\text{ d'où : } \quad \lim_{n\to+\infty} -n\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}.$$

Comme la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, on peut donc conclure :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \lim_{n\to+\infty} \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right)\right) = e^{-e^{-x}} = \lim_{n\to+\infty} P(U_n \leqslant x)$$

Or la fonction $F:\ x \mapsto e^{-e^{-x}}$ est positive, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme composée de telles fonctions, avec :

$\forall x \in \mathbb{R},\quad F'(x) = e^{-x}.e^{-e^{-x}} = e^{-x-e^{-x}} > 0$. C'est donc une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et de plus :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} -e^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-e^{-x}} = e^0 = 1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} -e^{-x} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-e^{-x}} = 0$.

La fonction F est donc bien une fonction de répartition, et si on note U une variable aléatoire qui admet F pour fonction de répartition, le calcul de limite précédent se réécrit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \lim_{n\to+\infty} P(U_n \leqslant x) = F(x) = P(U \leqslant x)$$

Comme F est continue sur $\mathbb{R}$, cela signifie bien que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge en loi vers** U, variable aléatoire de densité $f_U:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f_U(x) = F'(x) = e^{-x-e^{-x}}$$

Cette loi décidément très classique dans les sujets ECE de ces dernières années, est appelée ***Loi de Gumbel****.*