MATHÉMATIQUES - EMLyon E 2012

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

Partie I : Étude de la matrice B

1. Les valeurs propres de B sont les réels λ tels que $B-\lambda.I_2$ est non inversible.
   Pour les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on dispose du critère d'inversibilité selon le déterminant :
   $B-\lambda.I_2 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ est non inversible $\iff (2-\lambda)\times(3-\lambda)-1\times 2 = 0 \iff \lambda^2-5\lambda+4=0.$
   Les deux racines du trinôme sont 1 et 4, ce sont les valeurs propres de B.
   $(B-I_2).X = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x+2y=0 \iff x=-2y,$
   donc : $E_1(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
   $(B-4I_2)X = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x-y=0 \iff x=y,$
   donc $E_4(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
   La matrice B est bien diagonalisable, comme élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui possède deux valeurs propres distinctes.
2. Au vu des résultats précédents, il existe bien une matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ semblable à B, via une matrice de passage P dont les colonnes sont vecteurs propres de B pour chacune de ses valeurs propres.
   $U_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ était le vecteur propre de base obtenu pour la valeur propre 1 ; comme $E_1(B)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $-\frac{1}{2}.U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est encore vecteur propre de B pour cette valeur propre.
   Le vecteur $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie déjà la condition demandée, donc la matrice P cherchée est :
   $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, telle que : $B = PDP^{-1}$.
3. $D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 5.D-4.I_2$. Mais alors :
   $B^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} = P(5.D-4.I_2)P^{-1} = 5.PDP^{-1}-4.PP^{-1} = 5.B-4.I_2.$
4. La relation précédemment obtenue permet d'écrire :
   $B^2-5.B = -4.I_2 \iff -\frac{1}{4}.(B-5.I_2).B = I_2$, ce qui prouve que B est inversible, d'inverse :
   $B^{-1} = -\frac{1}{4}(B-5.I_2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (ce qu'on pouvait vérifier immédiatement avec le critère d'inversibilité des matrices 2×2).

Partie II : Étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère l'application $h: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ M \mapsto h(M) = AMB$.

1. Soient $M,\ N$ deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque :

   $h(\lambda.M + N) = A(\lambda.M + N)B = \lambda.AMB + ANB = \lambda.h(M) + h(N)$, donc h est une application linéaire.

   De plus : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ h(M) = AMB \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ comme produit de trois matrices 2×2.

   L'application h est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. On revient ici à la définition initiale d'une application bijective : h sera bijective si et seulement si : pour tout $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'équation $h(M) = N$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, possède une unique solution qui est alors notée $M = h^{-1}(N)$.

   Cette stratégie est motivée par le fait que dans le même temps, l'énoncé demande l'expression de la bijection réciproque h^{-1}, ce qui est bien fourni par la résolution, pour $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ quelconque, de l'équation :

$$\begin{aligned} h(M) = N &\iff AMB = N \\ &\iff MB = A^{-1}N \\ &\iff M = A^{-1}NB^{-1} \end{aligned}$$

   On a utilisé ici le fait que A et B sont inversibles : pour la matrice A cela vient du fait qu'elle est diagonale, de coefficients diagonaux tous deux non nuls.

   On en conclut que h est bien bijective (c'est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de bijection réciproque

$$h^{-1}: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ M \mapsto A^{-1}MB^{-1}$$

3. On détermine dans cette question les valeurs propres de l'automorphisme h.

   a) Soient $\lambda \in \mathbb{R},\ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   On note $N = MP$, et on a donc aussi : $M = NP^{-1}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} h(M) = \lambda.M \iff AMB = \lambda.M &\iff ANP^{-1}B = \lambda.NP^{-1} \\ &\iff ANP^{-1}BP = \lambda.NP^{-1}P \iff AND = \lambda.N \end{aligned}$$

   b) Soit $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$AND = \lambda.N \iff \begin{pmatrix} x & 4y \\ -z & -4t \end{pmatrix} = \lambda.\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (1-\lambda)x & = 0 \\ (4-\lambda)y & = 0 \\ (-1-\lambda)z & = 0 \\ (-4-\lambda)t & = 0 \end{cases}.$$

   Ce système admet donc une solution non nulle si et seulement si $\lambda \in \{1, -1, 4, -4\}$.

   c) Comme l'équation matricielle résolue ci-dessus équivaut à : $h(M) = \lambda.M$, ces quatre réels sont donc les valeurs propres de h.
   Comme h est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension 4, possédant 4 valeurs propres distinctes : h vérifie le critère suffisant de diagonalisabilité, et dans une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :

$$H = Mat_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Remarque : il n'est pas difficile de vérifier que $\mathcal{B} = (E_{1,1}P^{-1}, E_{2,1}P^{-1}, E_{1,2}P^{-1}, E_{2,2}P^{-1})$ où les $E_{i,j}$ sont les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Mais ce n'était pas demandé !

d) L'égalité d'endomorphismes demandée se montre grâce à la représentation matricielle dans la base $\mathcal{B}$:

$$(H-I_4)(H+I_4)(H-4I_4)(H+4I_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le produit de ces quatre matrices diagonales est bien la matrice nulle, ce qui prouve bien l'égalité d'endomorphismes :

$$(h-e) \circ (h+e) \circ (h-4e) \circ (h+4e) = 0 \text{ (endomorphisme nul)}$$

Exercice 2

Partie I : Étude d'une fonction d'une variable réelle

On considère l'application $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : $\forall t \in [0,+\infty[, \ f(t) = \begin{cases} t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

1. La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.
Par croissances comparées : $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln(t) = 0 = f(0)$, donc f est aussi continue en 0.
La fonction f est donc bien continue sur $[0,+\infty[$.

2. La fonction f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ comme produit de fonctions de classe C^1 sur cet intervalle, et :
$$\forall t \in]0,+\infty[, \ f'(t) = \ln(t) + t \times \frac{1}{t} = 1 + \ln(t)$$

3. Les variations de f dépendent du signe de sa dérivée, on résout :
$f'(t) \geqslant 0 \iff 1 + \ln(t) \geqslant 0 \iff \ln(t) \geqslant -1 \iff t \geqslant e^{-1}$ par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$.
Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} t\ln(t) = +\infty$ par produit de deux limites infinies, le tableau de variations complet de f est :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	0	↘	$-e^{-1}$	↗	$+\infty$

4. La fonction f est même de classe C^2 sur $]0,+\infty[$, avec :
$$\forall t \in]0,+\infty[, \ f''(t) = \frac{1}{t} > 0$$
donc f est bien convexe sur $]0,+\infty[$.

5. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) On étudie ici la dérivabilité de f en 0 :

Pour tout réel $t > 0$, $\dfrac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \ln(t) \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$, donc f n'est pas dérivable en 0, mais Γ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

b) Pour déterminer les points d'intersection de Γ et de l'axe des abscisses, on résout l'équation : $f(t) = 0$.

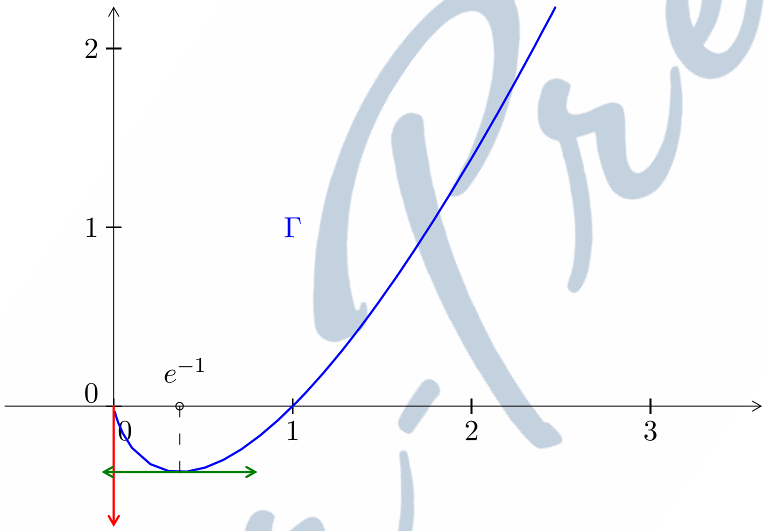
$f(0) = 0$, donc 0 est solution, et pour $t > 0$: $f(t) = 0 \iff t\ln(t) = 0 \iff \ln(t) = 0 \iff t = 1$.

Les points cherchés ont donc pour coordonnées $(0, 0)$ et $(1, 0)$.

c) Étude de la branche infinie de Γ : on sait déjà que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$, ensuite :

$\forall t > 0$, $\dfrac{f(t)}{t} = \ln(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc Γ admet une branche parabolique d'axe (Oy) au voisinage de $+\infty$.

d) On trace enfin l'allure de Γ en tenant compte de toutes les informations précédentes :



Partie II : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0, +\infty[^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^2, définie, pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$, par :

$$F(x, y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}.$$

1. L'application F est bien de classe C^2 de $]0, +\infty[^2$ dans $\mathbb{R}$ comme somme et quotients de fonctions de classe C^2.

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2\text{: } \partial_1(F)(x, y) = \frac{1}{xy} - \frac{\ln(y)}{x^2}, \text{ et } \partial_2(F)(x, y) = -\frac{\ln(x)}{y^2} + \frac{1}{xy}$$

2. Gradient de F en (e, e) : $\nabla F(e, e) = \begin{pmatrix} \partial_1(F)(e, e) \\ \partial_2(F)(e, e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{e \times e} - \dfrac{\ln(e)}{e^2} \\ -\dfrac{\ln(e)}{e^2} + \dfrac{1}{e \times e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{e^2} - \dfrac{1}{e^2} \\ -\dfrac{1}{e^2} + \dfrac{1}{e^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

donc (e, e) est bien un point critique de F.

3. Pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$:

$$\partial^2_{1,1}(F)(x, y) = -\frac{1}{x^2 y} + \frac{2\ln(y)}{x^3}, \ \partial^2_{2,2}(F)(x, y) = \frac{2\ln(x)}{y^3} - \frac{1}{xy^2}$$

$$\partial^2_{1,2}(F)(x,y) = -\frac{1}{xy^2} - \frac{1}{yx^2} = \partial^2_{2,1}(F)(x,y)$$

(F étant de classe C^2, le théorème de Schwarz garantit l'égalité des dérivées croisées).

4. La Hessienne de F en (e,e) est donc :

$$H = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(F)(e,e) & \partial^2_{1,2}(F)(e,e) \\ \partial^2_{2,1}(F)(e,e) & \partial^2_{2,2}(F)(e,e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3} & -2e^{-3} \\ -2e^{-3} & e^{-3} \end{pmatrix}$$

On calcule alors les valeurs propres de H en déterminant les réels λ tels que $H - \lambda.I_2 = \begin{pmatrix} e^{-3}-\lambda & -2e^{-3} \\ -2e^{-3} & e^{-3}-\lambda \end{pmatrix}$ soit non-inversible.

D'après le critère d'inversibilité des matrices 2×2, c'est le cas si et seulement si le déterminant de $H - \lambda.I_2$ est nul, soit :

$$(e^{-3}-\lambda)^2 - 4(e^{-3})^2 = 0 \iff (e^{-3}-\lambda-2e^{-3})(e^{-3}-\lambda+2e^{-3}) = 0 \iff (-e^{-3}-\lambda)(3e^{-3}-\lambda) = 0$$

D'après la règle du produit nul, les valeurs propres de H sont donc $3e^{-3} > 0$ et $-e^{-3} < 0$, qui sont de signes opposés.

On peut donc conclure que F n'admet pas d'extrémum local en (e,e), mais un point-col.

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $x > 0$, on écrit :

$x^{n+2}.e^{-\frac{x^2}{2a^2}} = \exp\left((n+2)\ln(x) - \frac{x^2}{2a^2}\right) = \exp\left(x^2.\left[(n+2).\frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{1}{2a^2}\right]\right)$, où :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ par croissances comparées, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} (n+2)\frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{1}{2a^2} = -\frac{1}{2a^2} < 0$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left[(n+2)\frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{1}{2a^2}\right] = -\infty$, et enfin :

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left(x^2\left[(n+2)\frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{1}{2a^2}\right]\right) = \lim_{X\to-\infty} e^X = 0$$

On a donc prouvé que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n+2}.e^{-\frac{x^2}{2a^2}} = 0$, c'est-à-dire que :

$$x^n.e^{-\frac{x^2}{2a^2}} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ au voisinage de } +\infty.$$

Or : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ converge comme intégrale de Riemann, d'exposant $\alpha = 2 > 1$, et $x \mapsto x^n.e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ est une fonction continue, positive sur $[1,+\infty[$.

Le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives assure donc que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} x^n.e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x$ est convergente.

Comme par ailleurs, $x \mapsto x^n.e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ est continue sur $[0,1]$, l'intégrale de cette fonction entre 0 et 1 est bien définie, et on peut conclure :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\quad I_n = \int_0^{+\infty} x^n.e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n.e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} x^n.e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x \text{ est convergente}$$

2. a) Une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0, a^2)$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

On sait par ailleurs que f est une fonction paire, et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$, donc :

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x = a\sqrt{2\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{a\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

b) La fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = -\frac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$. On en déduit :

$$\forall A > 0,\ \int_0^A x e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x = -a^2\int_0^A \varphi'(x)\mathrm{d}x = -a^2\left[\varphi(x)\right]_0^A = -a^2.\left(e^{-\frac{A^2}{2a^2}} - 1\right)$$

Comme $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} e^{-\frac{A^2}{2a^2}} = 0$, on en déduit : $\displaystyle I_1 = \int_0^{+\infty} x.e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x = a^2$.

3. a) Soit un entier $n \geqslant 2$, et t un réel de $[0, +\infty[$; on réalise une intégration par parties de $\displaystyle\int_0^t x^n.e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x$, en posant :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = x^{n-1} & \to & u(x) = (n-1)x^{n-2} \\ v'(x) = x.e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \to & v(x) = -a^2.e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^t x^n.e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x &= \left[-a^2.x^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right]_0^t + a^2(n-1).\int_0^t x^{n-2}.e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}t \\ &= -a^2t.e^{-\frac{t^2}{2a^2}} + a^2(n-1).\int_0^t x^{n-2}.e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

b) D'après la question 1. : comme $n \geqslant 2$, les deux intégrales de la formule précédente admettent une limite lorsque t tend vers $+\infty$, et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -a^2t^{n-1}.e^{-\frac{t^2}{2a^2}} = 0$ toujours d'après 1. ; on peut donc passer à la limite quand t tend vers $+\infty$, pour obtenir :

$$\forall n \geqslant 2,\ \int_0^{+\infty} x^n.e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x = 0 + a^2(n-1).\int_0^{+\infty} x^{n-2}.e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x \iff \forall n \geqslant 2,\ I_n = a^2(n-1).I_{n-2}$$

c) Par application de la formule précédente :

$$I_2 = (2-1)a^2.I_0 = a^3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad I_3 = (3-1)a^2.I_1 = 2a^4$$

On considère l'application $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $g_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

4. • Il est clair que g_a est une fonction continue sur $]-\infty, 0[$ comme fonction constante nulle, et sur $]0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues sur cet intervalle.
La fonction g_a est donc continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0.

- La fonction g_a est aussi positive sur $\mathbb{R}$: soit parce qu'elle est nulle, soit comme produit de deux réels positifs $\dfrac{x}{a^2}$ et $e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ pour $x \in]0, +\infty[$.

- Enfin : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(t)\mathrm{d}t = 0 + \int_0^{+\infty} \frac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}.I_1 = 1$ puisque $I_1 = a^2$ comme on l'a vu à la question 2.b).

La fonction g_a est bien une densité de probabilité.

5. On considère une variable aléatoire X admettant g_a pour densité, soit G_a sa fonction de répartition :

$\forall t \in \mathbb{R},\ G_a(t) = P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} g_a(x)\mathrm{d}x$. On distingue deux cas :

- Si $t \leqslant 0$: $G_a(t) = 0$ puisque g_a est nulle sur $]-\infty, 0]$.

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} G_a(t) &= \int_{-\infty}^{0} g_a(x)\mathrm{d}x + \int_0^t g_a(x)\mathrm{d}x = 0 + \int_0^t \frac{x}{a^2}.e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x \\ &= \left[-e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right]_0^t \\ \forall t \in]0, +\infty[,\ G_a(t) &= 1 - e^{-\frac{t^2}{2a^2}} \end{aligned}$$

6. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x.g_a(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente. Comme la fonction $x \mapsto x.g_a(x)$ est nulle sur $]-\infty, 0]$ et positive sur $]0, +\infty[$, cela revient à prouver la convergence simple de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{a^2}.e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}.I_2$.

L'intégrale est bien convergente, et X admet une espérance, qui vaut, d'après la question 3.c) :

$$E(X) = \frac{1}{a^2}.I_2 = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

7. De même, la variable aléatoire X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2. Il faut donc prouver la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2.g_a(x)\mathrm{d}x$, ce qui revient à prouver la convergence simple de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{a^2}.e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}.I_3$.

L'intégrale et bien convergence, X admet donc un moment d'ordre 2 et une variance, qui valent :

$$E(X^2) = \frac{1}{a^2}.I_3 = 2a^2 \quad \text{et} \quad V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2a^2 - \frac{\pi}{2}.a^2 = \frac{4-\pi}{2}.a^2$$

d'après la formule de Koenig-Huygens.

8. a) On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme (à densité) sur l'intervalle $]0, 1]$: la variable aléatoire $\ln(U)$ est alors (presque-sûrement) définie, à valeurs dans $]-\infty, 0]$, ce qui garantit
que $Z = a\sqrt{-2\ln(U)}$ est (presque-sûrement) bien définie, à valeurs dans $[0, +\infty[$.

On peut donc déjà dire que : $\forall t \in]-\infty, 0[,\ F_Z(t) = P(Z \leqslant t) = 0$. Puis, pour tout réel $t \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned}F_Z(t) &= P(a\sqrt{-2\ln(U)} \leqslant t)) = P(-2a^2\ln(U) \leqslant t^2) \quad \text{par stricte croissance de } t \mapsto t^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\ &= P(\ln(U) \geqslant -\frac{t^2}{2a^2}) = P(U \geqslant e^{-\frac{t^2}{2a^2}}) \quad \text{par stricte croissance de exp sur } \mathbb{R} \\ &= 1 - P(U < e^{-\frac{t^2}{2a^2}}) = 1 - P(U \leqslant e^{-\frac{t^2}{2a^2}}) \quad \text{puisque } U \text{ est à densité}\end{aligned}$$

Et comme : $\forall t \in]0,+\infty[,\ -\dfrac{t^2}{2a^2} \leqslant 0$, alors $e^{-\frac{t^2}{2a^2}} \in]0,1]$, et donc : $\quad P(U \leqslant e^{-\frac{-t^2}{2a^2}}) = e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$. Ainsi :

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad F_Z(t) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$$

On constate donc que les variables aléatoires X et Z ont la même fonction de répartition elles suivent donc la même loi.

b) La question précédente permet de voir qu'il suffit de simuler une variable U suivant la loi uniforme sur $]0,1]$, pour en déduire $Z = a\sqrt{-2\ln(U)}$ qui simule la variable aléatoire X :

```
function Z=simulEML2012(a)
    U = rand()  //simule la loi uniforme sur ]0,1]
    Z = a*sqrt(-2*log(U))
endfunction
```

Tout simplement...!

On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivant toutes la même loi que la variable aléatoire X.

9. On considère la variable aléatoire $A_n = \dfrac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$.

a) La linéarité de l'espérance donne l'existence de $E(A_n)$, qui vaut :

$$E(A_n) = \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}.\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}.n.a\sqrt{\frac{\pi}{2}} = a$$

Ce qui prouve que A_n est bien un estimateur sans biais de a.

b) Comme A_n est un estimateur sans biais de a, son risque quadratique est égal à sa variance, qui vaut :

$$V(A_n) = \frac{2}{n^2\pi}V(X_1+X_2+\ldots+X_n) = \frac{2}{n^2\pi}(V(X_1)+V(X_2)+\ldots+V(X_n)) = \frac{2}{n^2\pi}\times n.\frac{4-\pi}{2}.a^2 = \frac{4-\pi}{n\pi}.a^2$$

car les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de même loi.

On définit la variable aléatoire $M_n = \text{Min}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Ainsi : $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (M_n > t) = (X_1 > t) \cap (X_2 > t) \cap \ldots \cap (X_n > t)$.

10. a) Soit un réel $t \in [0,+\infty[$; d'après l'égalité d'événements rappelée ci-dessus :

$$\begin{aligned}P(M_n > t) &= P((X_1 > t) \cap (X_2 > t) \cap \ldots \cap (X_n > t)) \\ &= P(X_1 > t) \times P(X_2 > t) \times \ldots \times P(X_n > t) \quad \text{par indépendance des } X_i \\ &= (P(X > t))^n = (1 - G_a(t))^n \qquad \text{car les } X_i \text{ suivent toutes la loi de } X \\ &= \left(e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right)^n\end{aligned}$$

$$P(M_n > t) = e^{-\frac{nt^2}{2a^2}}$$

b) Comme $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires à valeurs positives, il est évident que leur minimum est aussi à valeurs positives, et : $\forall t \in]-\infty, 0],\ P(M_n \leqslant t) = 0$.

Par ailleurs : $\forall t \in]0, +\infty[,\ P(M_n \leqslant t) = 1 - P(M_n > t)$. On en déduit l'expression complète de la fonction de répartition de M_n :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_{M_n}(t) = P(M_n \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\frac{nt^2}{2a^2}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

c) Il suffit ici de repérer que la fonction de répartition F_{M_n} est de la même forme que G_a obtenue à la question 5., on peut même écrire :

$\forall t \in]0, +\infty[,\ F_{M_n}(t) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2(a/\sqrt{n})^2}}$, donc $F_{M_n} = G_b$ avec $b = \dfrac{a}{\sqrt{n}}$.

On en conclut que M_n est elle-même une variable à densité, et que g_b est une densité de M_n, toujours avec $b = \dfrac{a}{\sqrt{n}}$.

d) On peut ici reprendre le calcul réalisé à la question 6., en remplaçant a par $b = \dfrac{a}{\sqrt{n}}$ pour conclure directement que :

M_n admet une espérance et une variance qui valent : $E(M_n) = a\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ et $V(M_n) = \dfrac{4-\pi}{2n}.a^2$

11. a) La linéarité de l'espérance donne ici : $E\left(\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}.M_n\right) = \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}.E(M_n) = a$, ce qui prouve que :

$$B_n = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}.M_n \text{ est un estimateur sans biais de } a.$$

b) Comme B_n est un estimateur sans biais de a, son risque quadratique est égal à sa variance, qui vaut :

$$V(B_n) = \frac{2n}{\pi}V(M_n) = \frac{2n}{\pi} \times \frac{4-\pi}{2n}.a^2 = \frac{4-\pi}{\pi}.a^2$$

Remarque : on a obtenu ici deux estimateurs sans biais A_n et B_n du paramètre a.

Mais comme $\lim\limits_{n \to +\infty} V(A_n) = 0$ alors que $V(B_n) = \dfrac{4-\pi}{\pi}.a^2 > 0$ reste constant : seul le premier estimateur est *convergent*, puisque son risque quadratique tend vers 0.

Il est donc très préférable d'estimer a par A_n plutôt que par B_n.