MATHÉMATIQUES - EMLyon E 2011

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On considère l'application

$$f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = (x + \ln x).e^{x-1}$$

Partie I : Étude et représentation graphique de f

1. La fonction f est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.
   Pour tout $x \in]0;+\infty[$:
   $$f'(x) = (1 + \frac{1}{x}).e^{x-1} + (x + \ln(x)).1.e^{x-1} = [1 + \frac{1}{x} + x + \ln(x)].e^{x-1}$$

2. Démontrons que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ \ln(x) + \frac{1}{x} > 0$.

   On étudie pour cela les variations de la fonction $h : x \mapsto \ln(x) + \frac{1}{x}$, définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, avec :

   $\forall x > 0,\ h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$. Comme $x^2 > 0$, sur $]0;+\infty[$, $h'(x)$ est du signe de $x - 1$:

   $x - 1 > 0 \iff x > 1$, donc h est strictement décroissante sur $]0;1]$, puis strictement croissante sur $[1;+\infty[$. Elle admet donc un minimum global en $x = 1$ qui vaut : $h(1) = \ln(1) + \frac{1}{1} = 1$, donc on peut écrire :

   $\forall x \in]0;+\infty[,\ \ln(x) + \frac{1}{x} \geqslant 1$, ce qui implique : $\forall x \in]0;+\infty[,\ \ln(x) + \frac{1}{x} > 0$.

3. Puisqu'on sait maintenant que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ \ln(x) + \frac{1}{x} > 0$, le fait d'ajouter $x + 1 > 0$ à cette quantité ne change pas son signe, et on a bien : $\forall x \in]0;+\infty[,\ x + \ln(x) + 1 + \frac{1}{x} > 0$.

4. On a vu en 1. que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = (x + \ln(x) + 1 + \frac{1}{x}).e^{x-1}$.

   Comme une exponentielle est toujours strictement positive, et puisque le facteur qui la précède est toujours strictement positif d'après 3., alors par produit :

   $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) > 0$, et la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1}$, donc par somme et par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x + \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x-1} = e^{-1} > 0$, donc par produit :
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

$f(1) = (1 + \ln(1)).e^{1-1} = (1+0).e^0 = 1$, et $f'(1) = (1 + \ln(1) + 1 + 1/1).e^{1-1} = 3$.

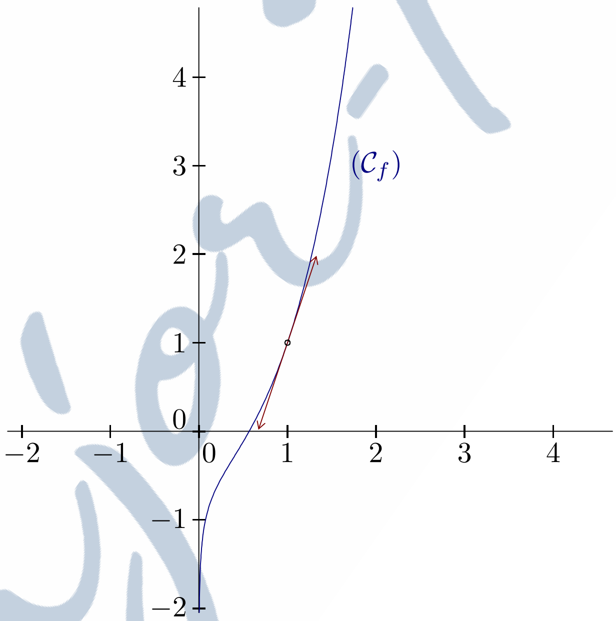
x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

6. La limite de f en 0^+ prouve que $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Pour $x > 0$: $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{(x + \ln(x))e^{x-1}}{x} = (1 + \dfrac{\ln(x)}{x}).e^{x-1}$, où : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{\ln(x)}{x} = 1$, et par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique d'axe (Oy) au voisinage de $+\infty$.

7. Équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 :
$y = f'(1).(x-1) + f(1) \iff y = 3(x-1) + 1 \iff y = 3x - 2$.



Partie II : intervention d'une suite réelle associée à f

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On démontre par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: "u_n existe et $u_n \geqslant 2$".

$\boxed{\text{I.}}$ $u_0 = 2$, donc $\mathcal{P}(0)$ est évidemment vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, soit : $u_{n+1} \geqslant 2$.

On sait que $u_n \geqslant 2$, et que f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc : $f(u_n) \geqslant f(2)$, où :
$f(2) = (2 + \ln(2)).e^{2-1} = (2 + \ln(2)).e$, avec : $2 + \ln(2) > 2$ vu que $\ln(2) > 0$ $(2 > 1)$, et $e > 1$, donc

par produit : $(2+\ln(2)).e > 2$, donc : $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant f(2) > 2$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

2. On démontre, par récurrence encore, que $\mathcal{P}(n)$: $u_n \geqslant e^n$ est vrai pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ $u_0 = 2$ et $e^0 = 1$, donc $u_0 \geqslant e^0$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie, soit : $u_{n+1} \geqslant e^{n+1}$

———————————————————

On sait (H.R.) que : $u_n \geqslant e^n$, et comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors :

$f(u_n) \geqslant f(e_n)$, où : $f(u_n) = u_{n+1}$, et $f(e^n) = (e^n + n) \times e^{e^n - 1}$, qui n'est pas évidemment supérieur à e^{n+1}...

On repart donc de : $f(u_n) = (u_n + \ln(u_n)).e^{u_n - 1}$, où : d'après la question précédente, $u_n \geqslant 2$ donc :

$\ln(u_n) \geqslant \ln(2) > 0$, et $u_n + \ln(u_n) > u_n \geqslant e^n$ (H.R.), et $u_n - 1 \geqslant 1$ donc $e^{u_n - 1} \geqslant e$ par croissance de exp sur $\mathbb{R}$.

Par produit d'inégalités entre réels positifs, on déduit : $f(u_n) \geqslant e^n \times e \iff u_{n+1} \geqslant e^{n+1}$.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$, on en déduit par comparaison : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3. La question est ici légitime : par définition de la divergence vers $+\infty$ de la suite, il existe bien un premier entier n tel que $u_n \geqslant 10^{20}$.

```
u=2; n=0;
while u < 1e20
    u = (u+log(u))*exp(u-1)
    n = n+1
end
disp(n)
```

Partie III : Étude d'extremums locaux pour une fonction de deux variables associée à f

On considère l'application : $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$.

1. La fonction F apparaît ici comme La primitive de f qui s'annule en 1, bien définie sur $]0, +\infty[$ puisque f est continue sur cet intervalle. Comme f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ (somme et produit de telles fonctions), sa primitive F est bien de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, et : $\forall x \in]0, +\infty[, \; F'(x) = f(x)$.

On considère l'application de classe C^2

$$G :]0, +\infty[^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto G(x, y) = F(x) + F(y) - 2e^{\frac{x+y}{2}}.$$

2. Pour tout couple $(x, y) \in]0, +\infty[^2$:

$$\partial_1(G)(x,y) = F'(x) + 0 - 2 \times \frac{1}{2} e^{\frac{x+y}{2}} = f(x) - e^{\frac{x+y}{2}} \quad \text{et} \quad \partial_2(G)(x,y) = 0 + F'(y) - 2 \times \frac{1}{2} e^{\frac{x+y}{2}} = f(y) - e^{\frac{x+y}{2}}$$

3. a) L'étude de la fonction f faite dans la partie I montre qu'elle est continue, strictement croissante sur $]0, +\infty[$: elle réalise donc une bijection, d'après le théorème du même nom, de $]0, +\infty[$ dans l'intervalle image $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$.

b) Le couple $(x,y)\in]0,+\infty[^2$ est un point critique de G si et seulement si :

$$\begin{cases}\partial_1(G)(x,y) &= 0\\ \partial_2(G)(x,y) &= 0\end{cases} \iff \begin{cases}f(x)-e^{\frac{x+y}{2}} &= 0\\ f(y)-e^{\frac{x+y}{2}} &= 0\end{cases} \iff \begin{cases}f(x)-e^{\frac{x+y}{2}} &= 0\\ f(x)-f(y) &= 0 \ L_2\leftarrow L_1-L_2\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}f(x) &= f(y)\\ f(x) &= e^{\frac{x+y}{2}}\end{cases} \iff \begin{cases}x=y\\ f(x)=e^x\end{cases} \quad \text{puisque } f \text{ est bijective}$$

$$\iff \begin{cases}x=y\\ (x+\ln(x))e^{x-1}=e^x\end{cases} \iff \begin{cases}x=y\\ x+\ln(x)=e\end{cases}$$

4. Il est très facile de voir que la fonction $\varphi:\ x\mapsto x+\ln(x)$ est continue, strictement croissante sur $]0,+\infty[$ comme somme de deux fonctions ayant ces propriétés, avec $\lim\limits_{x\to 0^+} x+\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\ln(x)=+\infty$.
La fonction φ réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui contient 0, et l'équation :

$$x+\ln(x)=e \text{ admet donc une unique solution } \alpha\in]0,+\infty[.$$

Comme de plus : $\varphi(1)=1$ et $\varphi(e)=e+1$: l'inégalité $\varphi(1)<\varphi(\alpha)<\varphi(e)$ est vraie et est équivalente à $1<\alpha<e$ par stricte croissance de φ sur $]0,+\infty[$.

5. Des deux questions précédentes, on déduit que le système : $\begin{cases}x=y\\ x+\ln(x)=e\end{cases}$ admet un unique couple solution, à savoir (α,α). C'est donc l'unique point critique de G, et par conséquent l'unique point en lequel cette fonction de classe C^2 sur $]0,+\infty[^2$ est susceptible de présenter un extrémum local.

On doit alors calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de G ; pour tout $(x,y)\in]0,+\infty[^2$:

$$\partial^2_{1,1}(G)(x,y)=f'(x)-\frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}}=(x+\ln(x)+1+\frac{1}{x})e^{x-1}-\frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}},\quad \partial^2_{2,2}(G)(x,y)=(y+\ln(y)+1+\frac{1}{y})e^{y-1}-\frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}}$$

$$\partial^2_{1,2}(G)(x,y)=\partial^2_{2,1}(G)(x,y)=-\frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}}$$

Au point critique (α,α), les dérivées partielles d'ordre 2 valent :

$$\partial^2_{1,1}(G)(\alpha,\alpha)=(\alpha+\ln(\alpha)+1+\frac{1}{\alpha}).e^{\alpha-1}-\frac{1}{2}e^{\alpha}=(e+1+\frac{1}{\alpha}).e^{\alpha-1}-\frac{1}{2}e^{\alpha}=(\frac{1}{2}+\frac{1}{e}+\frac{1}{e\alpha})e^{\alpha}=\partial^2_{2,2}(G)(\alpha,\alpha)$$

$$\partial^2_{1,2}(G)(\alpha,\alpha)=\partial^2_{2,1}(G)(\alpha,\alpha)=-\frac{1}{2}e^{\alpha}$$

La Hessienne de G en (α,α) est donc : $H=\begin{pmatrix}(\frac{1}{2}+\frac{1}{e}+\frac{1}{e\alpha})e^{\alpha} & -\frac{1}{2}e^{\alpha}\\ -\frac{1}{2}e^{\alpha} & (\frac{1}{2}+\frac{1}{e}+\frac{1}{e\alpha})e^{\alpha}\end{pmatrix}$

Ses valeurs propres sont les réels λ tels que : $H-\lambda.I_2=\begin{pmatrix}(\frac{1}{2}+\frac{1}{e}+\frac{1}{e\alpha})e^{\alpha}-\lambda & -\frac{1}{2}e^{\alpha}\\ -\frac{1}{2}e^{\alpha} & (\frac{1}{2}+\frac{1}{e}+\frac{1}{e\alpha})e^{\alpha}-\lambda\end{pmatrix}$
est non-inversible, ce qui est le cas si et seulement si son déterminant est nul, soit :

$$\left((\frac{1}{2}+\frac{1}{e}+\frac{1}{e\alpha})e^{\alpha}-\lambda\right)^2-\left(\frac{1}{2}e^{\alpha}\right)^2=0 \iff \left((\frac{1}{e}+\frac{1}{e\alpha})e^{\alpha}-\lambda\right)\times\left((1+\frac{1}{e}+\frac{1}{e\alpha})e^{\alpha}-\lambda\right)=0$$

D'après l'identité remarquable bien connue. La règle du produit nul fait donc apparaître que les valeurs propres de H sont :

$$\lambda_1=(\frac{1}{e}+\frac{1}{e\alpha})e^{\alpha}\quad\text{et}\quad \lambda_2=(1+\frac{1}{e}+\frac{1}{e\alpha})e^{\alpha}$$

Vu la définition de $\alpha \in]1, e[$, les deux valeurs propres sont strictement positives : on en déduit que G admet bien un extremum local au point (α, α), et que c'est un minimum local.

Exercice 2

On considère les matrices : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Partie I : Détermination d'une racine carrée de A

1. Sans calcul : A n'est pas inversible car elle a deux colonnes égales, et A est diagonalisable car elle est symétrique réelle.
   Comme les deux premières colonnes de A sont égales, et non proportionnelles à la troisième : $\text{rg}(A) = 2$.
2. L'énoncé donne déjà les trois valeurs propres à tester pour A :
   - On sait déjà que 0 est valeur propre de A, puisque cette dernière est non inversible. On détermine le sous-espace propre associé en résolvant le système : $AX = 0$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$AX = 0 \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

   Ainsi : $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Comme le seul vecteur de la famille génératrice obtenue de $E_0(A)$ est non-nul, il forme donc une famille libre, donc une base de ce sous-espace.

   - $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est non inversible car sa troisième colonne est égale à la somme des deux premières, donc 1 est bien valeur propre de A.
   On résout ensuite le système $AX = X \iff (A - I)X = 0$:

$$(A - I)X = 0 \iff \begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = 0 \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

   Ainsi : $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \middle| \, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$. À nouveau, le seul vecteur qui engendre $E_1(A)$ est non-nul, donc forme une famille libre, et finalement une base du sous-espace propre.

- $A - 4I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; le critère de non-inversiblité est ici moins évident, mais on vérifie que 4 est bien valeur propre de A en vérifiant que le système $(A-4I)X = 0$ possède une infinité de solutions :

$$(A-4I)X = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -3x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} -3x & + & y & + & z & = & 0 & \\ & & -8y & + & 4z & = & 0 & L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1 \\ & & 4y & - & 2z & = & 0 & L_3 \leftarrow 3L_3 + L_1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -3x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \quad (L_2 \text{ et } L_3 \text{ sont proportionnelles})$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ll} -3x + 3y & = 0 \iff x = y \\ z & = 2y \end{array} \right.$$

On trouve bien une infinité de solutions, donc 4 est bien valeur propre de A, le sous-espace propre associé est : $E_4(A) = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} \middle| \ y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

3. On sait déjà que A est diagonalisable : comme c'est une matrice d'ordre 3 et qu'on vient de lui trouver 3 valeurs propres distinctes, elle n'en possède pas d'autres, et les trois vecteurs propres déterminés précédemment forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, de sorte que :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. La méthode de Gauss donne : $\quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$.

5. D'après les propriétés des matrices diagonales, il est évident que $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ vérifie : $\Delta^2 = D$.

6. On note $R = P\Delta P^{-1}$, alors : $R^2 = P\Delta P^{-1} P\Delta P^{-1} = P\Delta I \Delta P^{-1} = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

   Le calcul explicite donne : $\quad R = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 5/3 \end{pmatrix}$.

Partie II : Étude d'endomorphismes

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et on considère les endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont respectivement A et R.

On note $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ telle que P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

1. D'après la formule de changement de base : puisque A représente f dans la base $\mathcal{B}$, alors $D = P^{-1}AP$ représente f dans la base $\mathcal{C}$.

   De même, la relation : $\quad R = P\Delta P^{-1} \iff \Delta = P^{-1}RP$ exprime que g, représenté par R dans la base $\mathcal{B}$, est représenté par Δ dans la base $\mathcal{C}$.

2. a) Le noyau $\text{Ker}(f)$ est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 0 : on a déjà fait tous les calculs dans la partie I !

   Ils prouvent que : $\text{Ker}(f) = E_0(f) = \text{Vect}(u_1)$ avec les notations introduites dans cette partie II ; le vecteur non-nul forme à lui seul une famille génératrice de $\text{Ker}(f)$ et libre, c'en est une base, et $\dim \text{Ker}(f) = 1$.

b) Utilisons là encore le bon point de vue : $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ étant une base de f, on sait que : $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(u_1), f(u_2), f(u_3)) = \text{Vect}(0_{\mathbb{R}^3}, u_2, 4u_3) = \text{Vect}(u_2, u_3)$.
La famille génératrice (u_2, u_3) de $\text{Im}(f)$ est aussi libre puisque c'est une sous-famille de la base $\mathcal{C}$: c'est donc une base de $\text{Im}(f)$, et $\dim \text{Im}(f) = 2$ (ce que donnerait aussi le théorème du rang).

3. a) Adoptons le même point de vue qu'à la question précédente : l'endomorphisme g étant représenté par Δ dans la base $\mathcal{C}$, on a donc :

$$g(u_1) = 0_{\mathbb{R}^3}, \quad g(u_2) = u_2, \quad g(u_3) = 2u_3$$

L'endomorphisme g est bien sûr diagonalisable avec trois valeurs propres distinctes, donc ses sous-espaces propres sont tous les trois de dimension 1, et notamment : $E_0(g) = \text{Ker}(g) = \text{Vect}(u_1)$.

b) On écrit là aussi que : $\text{Im}(g) = \text{Vect}(g(u_1), g(u_2), g(u_3)) = \text{Vect}(0_{\mathbb{R}^3}, u_2, 2u_3) = \text{Vect}(u_2, u_3)$, donc $\text{Im}(g) = \text{Im}(f)$ et $\dim \text{Im}(g) = 2$ à nouveau.

4. En passant par la représentation matricielle des différents endomorphismes dans la base $\mathcal{C}$: on cherche une matrice H telle que : $G = FH \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times H$.

Il n'est pas difficile de voir que la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ convient parfaitement, mais ce n'est pas la seule : $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ convient aussi.

C'est d'ailleurs cette dernière qu'on retient car elle est inversible (matrice diagonale sans aucun élément diagonal nul), contrairement à la première. L'endomorphisme h représenté par H dans la base $\mathcal{C}$ est alors bien un automorphisme tel que $g = f \circ h$.

La formule de changement de base donne pour finir : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = PHP^{-1} = \begin{pmatrix} 11/12 & -1/12 & -1/6 \\ -1/12 & 11/12 & -1/6 \\ -1/6 & -1/6 & 2/3 \end{pmatrix}$.

(Remarque : l'énoncé ne demandait pas le calcul explicite de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h)$.)

Exercice 3

Soit $p \in]0, 1[$, on note $q = 1 - p$.

Partie I : Différence de deux variables aléatoires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère n joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. À chaque tir, chaque joueur a la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.
On définit la variable aléatoire X égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir et la variable aléatoire Z égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.

1. La variable aléatoire X compte le nombre de succès (cible atteinte au premier tir) dans une répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de probabilité de succès p. Donc bien sûr, X suit la loi binomiale de paramètres (n, p) :

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!], \quad \forall k \in [\![0, n]\!], \ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k . q^{n-k}, \quad E(X) = np, \quad V(X) = npq$$

2. La variable aléatoire Z compte elle aussi le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes : cette fois par contre, on entend par "épreuve" la succession des deux tirs pour un joueur donné, où le succès est : toucher la cible au moins une fois.
   L'échec : manquer la cible deux fois de suite, est de probabilité q^2 puisque les deux tirs sont indépendants, donc :
   $$Z \text{ suit la loi binomiale de paramètres } (n, 1-q^2), \text{ et : } \quad E(Z) = n(1-q^2),\ V(Z) = nq^2(1-q^2).$$

On note $Y = Z - X$.

3. La variable aléatoire Y représente le nombre de joueurs qui ont atteint la cible au moins une fois en deux tirs, mais qui ne l'ont pas atteinte au premier tir. À nouveau (!), on compte le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, où le succès est cette fois : manquer la cible au premier tir et l'atteindre au second, ce qui est de probabilité qp. Donc Y suit la loi binomiale de paramètres (n, qp).
4. a) Les variables aléatoires X et Y sont évidemment non-indépendantes :
   l'événement $[X = n] \cap [Y = n]$ est impossible puisque $X + Y = Z$ ne peut pas prendre une valeur supérieure à n, et :
   $$P([X = n] \cap [Y = n]) = 0 \quad \text{alors que} \quad P(X = n) \times P(Y = n) = p^n \times (pq)^n \neq 0$$
   b) Utilisons astucieusement les résultats précédents : on connaît la variance $V(Z)$ de la variable aléatoire $Z = X + Y$, mais on a aussi : $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$. D'où :
   $$\begin{aligned} nq^2(1-q^2) = npq + npq(1-pq) + 2\text{cov}(X,Y) &\iff \text{cov}(X,Y) = \frac{1}{2}\left[nq^2(1-q^2) - npq - npq(1-pq)\right] \\ &\iff \text{cov}(X,Y) = \frac{1}{2}npq[q(1+q) - 1 - 1 + pq] \end{aligned}$$
   On obtient : $\quad \text{cov}(X, Y) = -np^2q \quad$ après simplifications.
   Remarque : il est logique d'obtenir une covariance négative : plus la valeur prise par X est grande, plus celle prise par Y sera faible.

Partie II : Variable aléatoire à densité conditionnée par une variable aléatoire discrète

Dans cette partie, on note U une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

1. D'après le cours :
   $$U(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(U = k) = q^{k-1}p, \quad E(U) = \frac{1}{p}, \quad V(U) = \frac{q}{p^2}$$

On considère une variable aléatoire T telle que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0, +\infty[,\ P_{[U=n]}(T > t) = e^{-nt}$.

2. a) On utilise ici la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([U = n])_{n\in\mathbb{N}^*}$, de probabilités non nulles :
   $$\begin{aligned} \forall t \in [0, +\infty[,\ P(T > t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(U = n) \times P_{[U=n]}(T > t) = \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}pe^{-nt} \\ &= \frac{p}{q}\sum_{n=1}^{+\infty}(qe^{-t})^n = \frac{p}{q} \times \frac{qe^{-t}}{1 - qe^{-t}} \qquad \text{série géométrique de raison } qe^{-t} \in]0, 1[\end{aligned}$$
   $$\forall t \in [0, +\infty[,\ P(T > t) = \frac{p.e^{-t}}{1 - q.e^{-t}}$$

b) Le calcul précédent permet déjà de calculer la fonction de répartition de T sur $[0,+\infty[$:

$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad F_T(t) = P(T \leqslant t) = 1 - P(T > t) = 1 - \frac{p.e^{-t}}{1-q.e^{-t}}$$

Il faut alors remarquer qu'en particulier : $F_T(0) = 1 - \dfrac{p}{1-q} = 1 - \dfrac{p}{p} = 0$.
Mais comme F_T est, en tant que fonction de répartition, croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{t\to-\infty} F_T(t) = 0$, alors :

$$\forall t \in]-\infty, 0[, \ F_T(t) = 0.$$

c) La fonction F_T est de classe C_1 sur $]-\infty,0[$ comme fonction constante, et sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions de classe C^1 sur cet intervalle, où : $\forall t \in]0,+\infty[, \ q.e^{-t} < 1$ donc $1-q.e^{-t} \neq 0$.

Par ailleurs : $\lim\limits_{t\to 0^+} F_T(t) = 1 - \dfrac{p}{1-q} = 0 = F_T(0) = \lim\limits_{t\to 0^-} F_T(t)$, donc F_T est aussi continue en 0.
La fonction F_T est donc continue sur tout $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 : T est donc bien une variable à densité.

Une densité de T est définie par dérivation de F_T là où c'est possible :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_T(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } t \leqslant 0 \\ -\dfrac{-p.e^{-t}.(1-q.e^{-t}) - p.e^{-t}.qe^{-t}}{(1-q.e^{-t})^2} = \dfrac{p.e^{-t}}{(1-q.e^{-t})^2} \quad \text{si } t > 0 \end{cases}$$

3. On note $Z = UT$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $z \in [0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} P_{[U=n]}(Z > z) &= P_{[U=n]}(UT > z) = P_{[U=n]}(n.T > z) = P_{[U=n]}(T > \frac{z}{n}) \quad \text{car } n > 0 \\ &= e^{-n.\frac{z}{n}} = e^{-z} \qquad \text{d'après l'énoncé et vu que } \frac{z}{n} \in [0,+\infty[\end{aligned}$$

b) On utilise à nouveau la formule des probabilités totales avec le s.c.e. $([U=n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour écrire :

$$\forall z \in [0,+\infty[, \quad P(Z > z) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(U=n) \times P_{[U=n]}(Z > z) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(U=n) \times e^{-z} = e^{-z}$$

puisque e^{-z} ne dépend pas de n et que la somme des probabilités de la loi de U vaut 1.

On a ainsi : $\forall z \in [0,+\infty[, \quad F_Z(z) = P(Z \leqslant z) = 1 - e^{-z}$, et là encore, puisque :

$F_Z(0) = 1 - e^0 = 0$, alors : $\forall z \in]-\infty, 0[, \ F_Z(z) = 0$.

On reconnaît la fonction de répartition de la **loi exponentielle de paramètre 1**, que suit donc la variable aléatoire Z.

c) Il suffit d'écrire ici, grâce aux résultats précédents : pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in [0,+\infty[$,

$$P(U=n, \ Z > z) = P(U=n) \times P_{[U=n]}(Z > z) = P(U=n) \times e^{-z} = P(U=n) \times P(Z > z)$$

C'est une façon d'exprimer qu'ici, les variables aléatoires U (discrète) et $Z = UT$ (à densité) sont indépendantes.