MATHÉMATIQUES - EMLyon E 2010

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre 2

1. Les calculs matriciels donnent :

   $AFA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $AGA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$, $AHA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$.

2. La façon la plus rapide de répondre complètement à la question est de donner la description des matrices constituant l'ensemble S_2 :

$$\begin{aligned} S_2 &= \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ M = a.F + b.G + c.H \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect}(F, G, H) \end{aligned}$$

   Ce qui prouve à la fois que S_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ comme sous-espace engendré, **et** que (F, G, H) est une famille génératrice de S_2.
   Il reste donc à vérifier si c'est une famille libre, or si a, b, c sont trois réels :

   $a.F + b.G + c.H = 0 \iff \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff a = b = c = 0.$

   La famille (F, G, H) est donc bien libre, c'est donc au final une base de S_2, et $\dim(S_2) = 3$.

   On note u l'application qui à chaque matrice S de S_2, associe la matrice $u(S) = ASA$.

   a) Une matrice est symétrique si et seulement si elle est égale à sa transposée. Soit donc S une matrice de S_2 quelconque, on calcule avec la propriété de la transposée d'un produit (pour toutes matrices carrées A et B de même format, ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$) :

      ${}^t(ASA) = {}^tA\,{}^tS\,{}^tA = ASA$ car S et A sont toutes deux symétriques.

      Ainsi, on a bien : $\forall S \in S_2,\ u(S) \in S_2$.

   b) Au vu du résultat précédent, il suffit de montrer que u est linéaire pour que ce soit un endomorphisme de S_2.
      Soient donc M, N deux matrices de S_2 et λ un réel quelconques :

      $u(\lambda.M + N) = A(\lambda.M + N)A = \lambda.AMA + ANA = \lambda.u(M) + u(N)$ d'après les règles de distributivité du produit matriciel.
      Donc u est une application linéaire de S_2 dans lui-même, c'est un endomorphisme de S_2.

   c) Les calculs préliminaires permettent d'écrire :
      $\star$ $u(F) = AFA = 4.H$

© Major-Prépa

$\star$ $u(G) = AGA = 4.G + 12.H$

$\star$ $u(H) = AHA = 4.F + 6.G + 9.H$. On en déduit la matrice de u dans la base (F, G, H) de S_2 :

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} u(F) & u(G) & u(H) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix} & \begin{matrix} F \\ G \\ H \end{matrix} \end{array}$$

Partie II : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

On note : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

1. L'énoncé donne ici les valeurs propres à tester ! Il est donc malavisé de calculer brutalement la réduite de Gauss de $M - \lambda.I_3$. On teste au contraire chacune des valeurs propres proposées :

$\star$ $\lambda = -4$: $M + 4.I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 4 & 12 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & 12 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice $M + 4.I$ est bien non-inversible (sa réduite de Gauss a une ligne nulle), donc -4 est bien valeur propre de M.
Pour calculer le sous-espace propre associé, on résout le système :

$$(M-4.I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrl} 4x & & + \ 4z & = 0 \\ & 8y & + \ 6z & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} x & = -z \\ y & = -\frac{3}{4}z \end{array} \right. .$$

Ainsi, $E_{-4}(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, sous-espace propre engendré par un seul vecteur non nul, qui en est donc une base.

$\lambda = 1$: $M - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 12 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice $M - I$ est bien non-inversible (sa réduite de Gauss a une ligne nulle), donc 1 est bien valeur propre de M.

$$(M - I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrl} -x & & + \ 4z & = 0 \\ & 3y & + \ 6z & = 0 \end{array} \right.$$

$\iff \left\{ \begin{array}{ll} x & = 4z \\ y & = -2z \end{array} \right.$, d'où : $E_1(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, sous-espace propre engendré par un vecteur non nul, qui en est donc une base.

$\star$ $M - 16.I = \begin{pmatrix} -16 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & 6 \\ 4 & 12 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow 4L_3 + L_1} \begin{pmatrix} -16 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & 48 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2} \begin{pmatrix} -16 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice $M - 16I_3$ est bien non-inversible (sa réduite de Gauss a une ligne nulle), donc 16 est bien valeur propre de M.

$$(M - 16.I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} -16 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrl} -16x & & + \ 4z & = 0 \\ & -12y & + \ 6z & = 0 \end{array} \right.$$

© Major-Prépa

$\iff \begin{cases} x &= \frac{1}{4}z \\ y &= \frac{1}{2}z \end{cases}$, d'où : $E_{16}(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, sous-espace propre engendré par un vecteur non nul, qui en est donc une base.

On est ici dans le cas d'application du critère *suffisant* de diagonalisabilité.
En effet, la matrice M représente l'endomorphisme u d'un espace S_2 de dimension 3, et elle possède au moins 3 valeurs propres distinctes ; d'après ce critère :
$\star$ M n'a pas d'autres valeurs propres : $\text{Sp}(M) = \{-4, 1, 16\} = \text{Sp}(u)$.
$\star$ les trois sous-espaces propres sont de dimension 1, et on obtient une base de vecteurs propres en prenant un vecteur non nul de chacun d'eux.

2. D'après ce qui précède, et au vu de la première ligne imposée de la matrice de passage, la base de vecteurs propres pour M est construite en prenant dans l'ordre :

   $\star$ un vecteur de $E_{-4}(M)$ de première coordonnée égale à 4 : $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = -4.\begin{pmatrix} -1 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (un sous-espace propre est stable par multiplication externe !),

   $\star$ puis un vecteur de $E_1(M)$ de première coordonnée égale à 4 : $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient déjà,

   $\star$ et enfin un vecteur de $E_{16}(M)$, de première coordonnée égale à 1 : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 4.\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   La matrice de passage de la base canonique à cette base de vecteurs propres, est bien entendu :
   $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, dont la formule de changement de base assure que : $M = PDP^{-1}$ (on a respecté l'ordre des valeurs propres lues sur la diagonale de D, dans le choix des vecteurs propres).

3. $(D+4I)(D-I)(D-16I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$: en effet, d'après la règle du produit de matrices diagonales : on effectue les produits des coefficients diagonaux de mêmes places, mais ici en l'occurrence chacun des trois coefficients diagonaux du produit présente un facteur 0, donc est nul.

4. En développant le produit ci-dessus, le résultat précédent devient :
   $(D^2 - D + 4D - 4I)(D - 16I) = D^3 - 16D^2 + 3D^2 - 48D - 4D + 64I = D^3 - 13D^2 - 52D + 64I$, expression finalement nulle d'après ce qui précède.
   La récurrence immédiate habituelle, issue de la relation : $M = PDP^{-1}$, donne, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
   $$M^n = PD^nP^{-1}$$
   Ainsi :
   $M^3 - 13M^2 - 52M + 64I = PD^3P^{-1} - 13PD^2P^{-1} - 52PDP^{-1} + 64PP^{-1}$
   $= P(D^3 - 13D^2 - 52D + 64I)P^{-1} = P0P^{-1} = 0$, ce qui donne bien : $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.

5. L'égalité précédente n'est que la traduction matricielle, dans la base (F, G, H) où M représente u, de l'égalité d'endomorphismes :
   $$u^3 = 13u^2 + 52u - 64e$$

© Major-Prépa

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe $\mathcal{C}^2$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = x - \ln(1+x^2)$$

et C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On rappelle que : $\ln(2) \approx 0,69$.

Partie I. Étude et tracé de C

1. a) Remarquons d'abord que la fonction f est bien de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions usuelles de classe C^2, où : $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+x^2 \geqslant 1 > 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R} :\ f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{(1-x)^2}{1+x^2}.$$

b) Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) \geqslant 0$ (ne s'annule qu'en $x = 1$), ce qui prouve que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c)

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} :\ f"(x) &= \frac{(2x-2)(1+x^2)-(x^2-2x+1)(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{(x-1)[2(1+x^2)-(x-1).2x]}{(1+x^2)^2}\\ &= \frac{2(x-1)(x+1)}{(1+x^2)^2} \quad \text{après factorisation.}\end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1+x^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} -\ln(1+x^2) = -\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} x - \ln(1+x^2) = -\infty$.

Quand $x \to +\infty$:

$x - \ln(1+x^2) = x.\left[1 - \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}\right] = x.\left[1 - \dfrac{\ln(x^2(1+1/x^2))}{x}\right] = x.\left[1 - 2.\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{\ln(1+1/x^2)}{x}\right]$,

où :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+1/x^2) = \ln(1) = 0$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+1/x^2)}{x} = 0$. Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.1 = +\infty$.

3. Les limites de f en $\pm\infty$ étant infinies, il faut étudier : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 1 - \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$.

Pour $x > 0$: $1 - \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} = 1 - 2.\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{\ln(1+1/x^2)}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

Pour $x < 0$ il faut bien sûr être plus soigneux ! On écrit :

$1 - \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} = 1 - \dfrac{\ln(x^2(1+1/x^2))}{x} = 1 - 2.\dfrac{\ln(|x|)}{x} - \dfrac{\ln(1+1/x^2)}{x}$, avec : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(|x|)}{x} = 0$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1+1/x^2)}{x} = 0$, soit : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

Ainsi : $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x$. On étudie alors : $f(x) - x = -\ln(1+x^2) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} -\infty$:

on conclut donc que la courbe C admet une *branche parabolique* d'axe la droite d'équation $y = x$.

4. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, un point d'inflexion de C a donc pour abscisse une valeur x_0 telle que $f"$ s'annule en changeant de signe en x_0.

© Major-Prépa

$\forall x \in \mathbb{R}$: $f"(x) = 2.\dfrac{(x-1)(x+1)}{(1+x^2)^2}$, de cette forme factorisée on déduit le tableau de signe de la dérivée seconde :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f"(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Et on constate que C admet deux points d'inflexion :

$$M_1(-1; f(-1) = -1 - \ln(2)) \quad \text{et} M_2(1; f(1) = 1 - \ln(2)).$$

5. La tangente T_0 à C au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = f'(0)(x-0) + f(0) \iff y = x$

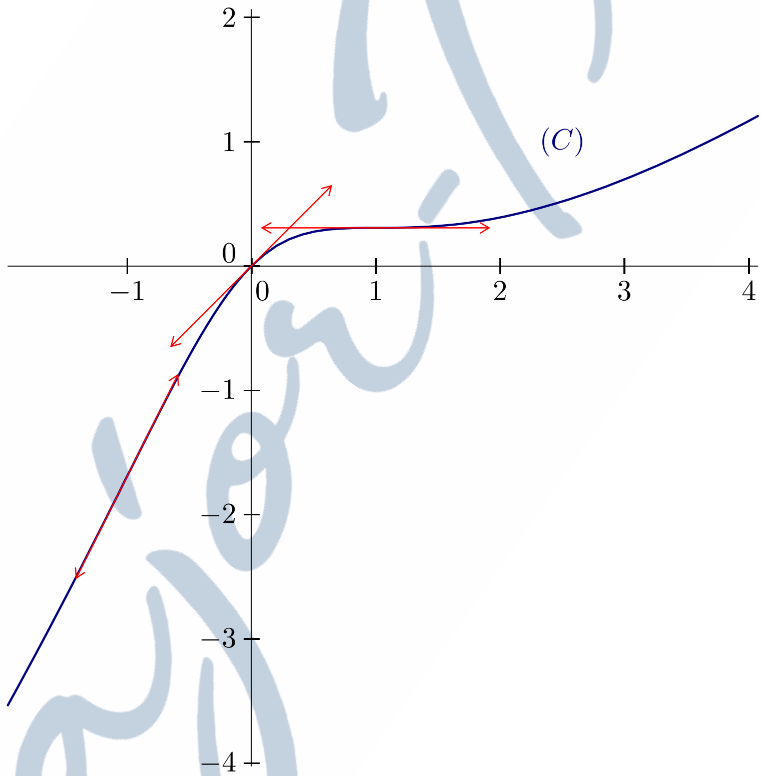
La tangente T_1 à C au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = f'(1)(x-1) + f(1) \iff y = 1 - \ln(2)$

La tangente T_{-1} à C au point d'abscisse -1 a pour équation :

$y = f'(-1)(x+1) + f(-1) \iff y = 2x + 2 - 1 - \ln(2) \iff y = 2x + 1 - \ln(2)$.

On trace alors la courbe C à l'aide de ces trois tangentes, en prenant soin de respecter leurs positions relatives :

C est au-dessous de T_0 sur $[-1; 1]$, puisque f est concave sur cet intervalle.
C traverse les tangentes T_1 et T_{-1} aux deux points d'inflexion calculés précédemment.



6. La fonction $x \mapsto x \times f(x)$ est bien continue sur $[0, 1]$ comme produit de fonctions continues sur cet intervalle, donc l'intégrale existe et :

$$\int_0^1 x \times f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2 - x\ln(1+x^2))\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x - \int_0^1 x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$$

La première intégrale vaut bien sûr : $\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}$, on réalise le changement de variable proposé :

$t = 1 + x^2 = u(x)$ dans la deuxième seulement :

© Major-Prépa

⋆ $u:\ x \mapsto 1+x^2$ est bien de classe C^1 sur $[0,1]$, et $\mathrm{d}t = u'(x)\mathrm{d}x = 2x\mathrm{d}x$.

⋆ Ainsi : $x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}.\ln(1+x^2).2x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\ln(t)\mathrm{d}t$.

⋆ Lorsque $x=0$, $t=1+0^2=1$; lorsque $x=1$, $t=1+1^2=2$

Donc par changement de variable :

$$\int_0^1 x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.\left[t.\ln(t)-t\right]_1^2 = \frac{1}{2}.[2\ln(2)-2-0+1] = \ln(2)-\frac{1}{2}.$$

D'où :

$$\int_0^1 x\times f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}-\ln(2)+\frac{1}{2} = \frac{5}{6}-\ln(2).$$

Partie II : Étude d'une suite et d'une série associées à f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$$

7. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$: $\quad u_{n+1}-u_n = f(u_n)-u_n = u_n-\ln(1+u_n^2)-u_n = -\ln(1+u_n^2)$.

Puisque : $\forall n\in\mathbb{N},\ 1+u_n^2\geqslant 1\quad (u_n^2\geqslant 0)$: $\quad \ln(1+u_n^2)\geqslant \ln(1)$ par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc :

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n = -\ln(1+u_n^2)\leqslant 0$, ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

8. Dans cette question, il fallait faire preuve d'initiative... puisque la suite (u_n) est décroissante, elle converge si et seulement si elle est majorée.

L'étude de la fonction f, le tracé de C et le calcul, par exemple, de $u_1=f(u_0)=1-\ln(2)\approx 0,31$ incitent à tenter de prouver que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geqslant 0$, ce qu'on fait par récurrence.

$\boxed{\text{I.}}$ La propriété est évidemment vraie pour $n=0$.

$\boxed{\text{H.}}$ Si pour un certain entier $n\in\mathbb{N},\ u_n\geqslant 0$: alors par croissance de f sur $\mathbb{R}$:

$u_{n+1}=f(u_n)\geqslant f(0)=0-\ln(1)=0$ ce qui prouve bien la propriété au rang $n+1$.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est donc initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, selon le principe de récurrence, et : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geqslant 0$.

La suite (u_n) est donc décroissante, minorée par 0 : elle converge donc selon le théorème de limite monotone. De plus, puisque f est **continue** sur $\mathbb{R}$, et que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$, sa limite est un point fixe de f, solution de l'équation :

$f(x)=x \iff x-\ln(1+x^2)=x \iff \ln(1+x^2)=0 \iff 1+x^2=1 \iff x^2=0 \iff x=0.$

Finalement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

9. Script `Scilab` : on calcule les termes successifs de la suite par application de la relation de récurrence : $u_{n+1}=f(u_n)$, tant que la distance de u_n à sa limite 0 est trop grande.

```
u=1
n=0
while u > 1e-3
    u=u-log(1+u^2)
    n=n+1
end
disp(n)
```

L'exécution du script rend : $n=993$ (premier rang pour lequel $u_n\leqslant 10^{-3}$, ce qui suggère une convergence assez lente de la suite.

© Major-Prépa

10. a) Sur l'intervalle $[0;1]$, on définit la fonction $g: \ x \mapsto x - \dfrac{1}{2}x^2 - f(x)$. Elle est dérivable sur $[0,1]$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle, et :

$$\forall x \in [0;1], \ g'(x) = 1 - x - f'(x) = 1 - x - (1 - \frac{2x}{1+x^2}) = \frac{-x(1+x^2)+2x}{1+x^2}$$
$$= \frac{x - x^3}{1+x^2} = \frac{x(1-x^2)}{1+x^2}$$

Pour $x \in [0,1]$: $1 - x^2 \geqslant 0$, donc $g'(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire que g est croissante sur $[0,1]$.
Comme $g(0) = 0 - f(0) = 0$, on a bien :

$$\forall x \in [0,1], \ g(x) \geqslant g(0) = 0 \iff \forall x \in [0;1], \ x - \frac{1}{2}x^2 \geqslant f(x).$$

b) La suite (u_n) étant décroissante de premier terme $u_0 = 1$, et minorée par 0, on a bien :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ u_k \in [0,1]$$

et donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ f(u_k) \leqslant u_k - \frac{1}{2}.u_k^2 \iff \frac{1}{2}u_k^2 \leqslant u_k - u_{k+1} \iff u_k^2 \leqslant 2(u_k - u_{k+1})$$

pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

c) Dans la double inégalité : $\forall k \in \mathbb{N}, \ 0 \leqslant u_k^2 \leqslant 2(u_k - u_{k+1})$, on remarque que :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2(u_k - u_{k+1}) = 2.\left[\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_{k+1}\right] = 2.(u_0 - u_{n+1}) \quad \text{après télescopage.}$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2u_0$ (puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$), ce qui exprime que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} 2(u_k - u_{k+1})$ est convergente.

Le *théorème de comparaison des séries à termes positifs* permet alors de conclure que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k^2$ est, elle aussi, convergente (de somme totale inférieure à $2u_0$ donc).

Exercice 3

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée de l'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre $p, p \in]0;1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.

On note A l'événement : « C_3 termine en dernier son opération ».
Ainsi l'événement A est égal à l'événement : $(\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2))$.
On se propose de calculer la probabilité de A.

© Major-Prépa

1. On cite ici précisément le cours sur la loi géométrique de paramètre p :

$$X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \ P(X_1 = k) = q^{k-1}p, \qquad E(X_1) = \frac{1}{p}, \quad V(X_1) = \frac{q}{p^2}$$

On définit la variable aléatoire $\Delta = |X_1 - X_2|$.

2. La variable aléatoire Δ représente la *distance* entre les valeurs réelles prises par les variables aléatoires X_1 et X_2 pour une même issue.
Dire que cette distance est nulle, revient à dire que X_1 et X_2 prennent la même valeur, et puisque ces dernières ont le même univers-image :

$$[\Delta = 0] = [X_1 = X_2] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [X_1 = k] \cap [X_2 = k]$$

On a écrit une réunion d'événements deux à deux incompatibles, donc :

$$\begin{aligned} P(\Delta = 0) = P(X_1 = X_2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X_1 = k] \cap [X_2 = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k) \times P(X_2 = k) \qquad \text{par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2 \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-2}p^2 \overset{[j=k-1]}{=} p^2 \sum_{j=0}^{+\infty} q^{2j} \qquad \text{où : } q^{2j} = (q^2)^j \\ &= p^2 \times \frac{1}{1-q^2} = \frac{p^2}{(1-q)(1+q)} \qquad \text{série géométrique de raison } q^2 \in]0,1[\\ P(\Delta = 0) &= \frac{p}{1+q} \end{aligned}$$

3. Soit n un entier naturel non nul.

   a) La forme du résultat demandé incite à citer ici la *formule des probabilités totales*, avec le système complet d'événements $([X_2 = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$, de probabilités toutes non nulles, pour écrire :

$$\begin{aligned} P(X_1 - X_2 = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X_2 = k] \cap [X_1 - X_2 = n]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X_2 = k] \cap [X_1 = n + k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k) \times P(X_1 = n + k) \quad \text{par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2 \end{aligned}$$

   b) On remarque ici que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $[\Delta = n] = [|X_1 - X_2| = n] = [X_1 - X_2 = n] \cup [X_2 - X_1 = n]$, réunion de deux événements incompatibles (car $n > 0$), dont les probabilités sont d'ailleurs égales puisque X_1 et X_2 suivent la même loi ; donc :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \ P(\Delta = n) &= P(X_1 - X_2 = n) + P(X_2 - X_1 = n) = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k) \times P(X_1 = n + k) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}p \times q^{n+k-1}p = 2p^2q^n \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-2} \\ &= 2p^2q^n \sum_{j=0}^{+\infty} (q^2)^j = \frac{2p^2q^n}{(1-q^2)} = \frac{2p^2q^n}{(1-q)(1+q)} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ P(\Delta = n) &= \frac{2pq^n}{1+q} \end{aligned}$$

© Major-Prépa

4. a) La variable aléatoire Δ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} nP(\Delta = n)$ est absolument convergente. Comme c'est une série à termes positifs ($n \in \mathbb{N}$, et $P(\Delta = n)$ est une probabilité), cela revient à prouver la convergence simple ; or :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=\cancel{0}1}^{N} nP(\Delta = n) = \sum_{n=1}^{N} \frac{2npq^n}{1+q} = \frac{2pq}{1+q}\sum_{n=1}^{N} nq^{n-1}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée de raison $q \in]0,1[$, donc convergente : Δ admet bien une espérance qui vaut

$$E(\Delta) = \frac{2pq}{1+q}\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{2pq}{1+q} \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{2q}{p(1+q)}$$

b) On développe $(X_1 - X_2)^2 = X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2$ pour constater que ces trois termes admettent une espérance vu que X_1 et X_2 admettent une espérance et une variance, et sont indépendantes. Cette indépendance et la linéarité de l'espérance permet d'écrire :

$$E((X_1-X_2)^2) = E(X_1^2)-2E(X_1)E(X_2)+E(X_2^2) = V(X_1)+E(X_1)^2-2E(X_1)E(X_2)+V(X_2)+E(X_2)^2 = 2V(X_1)$$

puisque X_1 et X_2 suivent la même loi. On a utilisé ici la formule de Koenig-Huygens.

Comme : $\Delta^2 = |X_1 - X_2|^2 = (X_1 - X_2)^2$, le calcul précédent prouve que Δ admet un moment d'ordre 2, donc une variance, qui vaut, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(\Delta) = E(\Delta^2) - E(\Delta)^2 = \frac{2q}{p^2} - \frac{4q^2}{p^2(1+q)^2} = \frac{2q(1+q)^2 - 4q^2}{p^2(1+q)^2} = \frac{2q(1+q^2)}{p^2(1+q)^2}$$

5. Petite question de rédaction ici :

l'événement A est égal à $[\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2)] = [X_3 > \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)]$, or il est facile de voir que pour tous réels a et b :

$$\max(a,b) - \min(a,b) = \begin{cases} a-b & \text{si } a \geqslant b \iff a-b \geqslant 0 \\ b-a = -(a-b) & \text{si } a \leqslant b \iff a-b \leqslant 0 \end{cases}$$ soit : $\max(a,b) - \min(a,b) = |a-b|$,

ce qui prouve bien que : $A = [X_3 > \Delta]$.

6. a) La formule des probabilités totales intervient à nouveau ici, cette fois avec le système complet d'évéments $([\Delta = k])_{k\in\mathbb{N}}$ de probabilités toutes non nulles, pour écrire :

$$P(A) = P(X_3 > \Delta) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([\Delta = k] \cap [X_3 > \Delta]) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([\Delta = n] \cap [X_3 > k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\Delta = k) \times P(X_3 > k)$$

puisque les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 sont mutuellement indépendantes, ce qui implique que X_3 est indépendante de $\Delta = |X_1 - X_2|$.

b) On connaît déjà la loi de Δ, et le résultat classique sur la loi géométrique suivie par X_3 donne : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X_3 > k) = q^k$ (k essais n'ont pas été suffisants pour obtenir le premier succès, ils ont tous été des échecs). D'où, en prenant garde que $P(\Delta = 0)$ ne suit pas la formule générale des autres probabilités de la loi :

$$P(A) = P(\Delta = 0) \times P(X_3 > 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(\Delta = k) \times P(X_3 > k) = \frac{p}{1+q} \times 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2pq^k}{1+q} \times q^k$$

$$= \frac{p}{1+q} + \frac{2p}{1+q}\sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k} = \frac{p}{1+q}.\left[1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}(q^2)^k\right] = \frac{p}{1+q}.\left[1 + \frac{2q^2}{1-q^2}\right] = \frac{p.(1+q^2)}{(1+q)(1-q^2)}$$

$$P(A) = \frac{1+q^2}{(1+q)^2}$$

© Major-Prépa

Partie II

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0;1[$ et Y est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda \in]0;+\infty[$.
On note $q = 1-p$.

On suppose que X et Y sont indépendantes, c'est-à-dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0;+\infty[,\ P\left([X=k] \cap [Y \leqslant t]\right) = P(X=k) \times P(Y \leqslant t).$$

1. D'après le cours, une densité de la variable aléatoire Y de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \lambda.e^{-\lambda.x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2. On définit la variable aléatoire $Z = \dfrac{X}{Y}$.
(Remarque : comme $P(Y=0)=0$ puisque Y est à densité, Z est bien presque-sûrement définie.)

a) On utilise à nouveau la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $([X=k])_{k\in\mathbb{N}^*}$, de probabilités non nulles, pour écrire :

$$\forall t \in [0,+\infty[,\ P(Z \geqslant t) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X=k] \cap [Z \geqslant t]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X=k] \cap [\frac{Y}{X} \geqslant t]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X=k] \cap [Y \geqslant kt])$$

Or, selon la définition de l'indépendance des variables aléatoires X et Y :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0,+\infty[,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P([X=k] \cap [Y \geqslant kt]) &= P(X=k) - P([X=k] \cap [Y < kt]) \\ &= P(X=k) - P([X=k] \cap [Y \leqslant kt]) \end{aligned}$$

puisque Y est une variable à densité, soit :

$$\begin{aligned} P([X=k] \cap [Y \geqslant kt]) &= P(X=k) - P(X=k) \times P(Y \leqslant kt) = P(X=k)(1 - P(Y \leqslant kt)) \\ &= P(X=k) \times P(Y > kt) = P(X=k) \times P(Y \geqslant kt) \end{aligned}$$

ce qui donne bien la formule sommatoire voulue.

Remarque : les calculs peuvent ici sembler inutilement longs, mais si on veut vraiment respecter les définitions et règles de calcul, chaque étape est bien nécessaire !

b) On peut donc finir le calcul explicite :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0,+\infty[,\ P(Z \geqslant t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} p \times e^{-\lambda k t} && \text{d'après le cours sur la loi exponentielle} \\ &= \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{+\infty} (q \times e^{-\lambda t})^k = \frac{p}{q} \times \frac{q e^{-\lambda t}}{1 - q e^{-\lambda t}} && \text{série géométrique, où } 0 < q e^{-\lambda t} < 1 \end{aligned}$$

$$\forall t \in [0,+\infty[,\ P(Z \geqslant t) = \frac{p e^{-\lambda t}}{1 - q e^{-\lambda t}}$$

c) Il aurait été vraiment plus simple de calculer en fait, pour tout réel $t \in [0,+\infty[$, le réel $P(Z > t)$ qui par un raisonnement tout à fait analogue à ce qui précède, vaut :

$$P(Z > t) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) \times P(Y > kt) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) \times P(Y \geqslant kt) = P(Z \geqslant t)$$

© Major-Prépa

puisque Y est une variable à densité. On obtient ainsi :

$$\forall t \in [0,+\infty[,\ P(Z \leqslant t) = 1 - P(Z > t) = 1 - P(Z \geqslant t) = 1 - \frac{pe^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}}$$

Comme X et Y sont deux variables aléatoires positives, il est par ailleurs clair que $Z = \dfrac{X}{Y}$ l'est aussi, et : $\quad \forall t \in]-\infty, 0[,\ P(Z \leqslant t) = 0$. Ainsi :

- La fonction de répartition $F_Z :\ t \mapsto P(Z \leqslant t)$ est continue et même de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ comme fonction constante nulle, et sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions de classe C^1, avec :
  $\forall t \in]0,+\infty[,\ qe^{-\lambda t} < q < 1 \Longrightarrow 1 - qe^{-\lambda t} \neq 0.$
- $\displaystyle\lim_{t\to 0^-} F_Z(t) = \lim_{t\to 0^-} 0 = 0$, et $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} F_Z(t) = \lim_{t\to 0^+} 1 - \frac{pe^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}} = 1 - \frac{p}{1-q} = 1 - 1 = 0 = F_Z(0)$, donc F_Z est continue en 0, et finalement sur $\mathbb{R}$.

La fonction de répartition de la variable aléatoire Z est donc continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 : on en déduit que Z est une variable à densité. Une densité f_Z de Z est définie par :

$$\begin{cases} \forall t \in]-\infty, 0],\ f_Z(t) = 0 \\ \forall t \in]0,+\infty[,\ f_Z(t) = F_Z'(t) = 0 - \dfrac{-\lambda pe^{-\lambda t}(1 - qe^{-\lambda t}) - pe^{-\lambda t}\lambda qe^{-\lambda t}}{(1 - qe^{-\lambda t})^2} = \dfrac{\lambda pe^{-\lambda t}}{(1 - q^{-\lambda t})^2} \end{cases}$$

© Major-Prépa