MATHÉMATIQUES - EMLyon E 2006

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. a) La matrice A est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont donc ses éléments diagonaux, et : $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{0,1\}}$.

   b) On trouve sans peine un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres : $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $(A - I_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $(A - I_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour colonnes deux vecteurs propres de A pour des valeurs propres distinctes : c'est donc une matrice de passage entre la base canonique et une base de vecteurs propres de A, telle que : $A = PDP^{-1}$.

   On note E l'ensemble des matrices carrées M d'ordre 2 telles que : $\quad AM = MD$.

2. a)
   - L'ensemble E est non vide, puisque : $A0_2 = 0_2 = 0_2D$, donc $0_2 \in E$.
   - Soient M et N deux matrices de E, vérifiant donc : $AM = MD$ et $AN = ND$, et λ un réel quelconque.

     Alors : $A(\lambda.M + N) = \lambda.AM + AN = \lambda.MD + ND = (\lambda.M + N)D$, donc $\lambda.M + N \in E$.

   On en déduit que E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   b) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On procède par identification des coefficients dans la relation :

$$AM = MD \iff \begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix} \iff z = 0 \text{ et } y = t$$

   c) L'équivalence précédente permet d'écrire une description explicite de E :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} | (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ x.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}(U, A)$$

   La famille (U, A) est donc une famille génératrice de E. Comme il s'agit de deux matrices non proportionnelles, elles forment une famille libre, donc (U, A) est bien une base de E.

   d) Le produit matriciel donne : $UA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, matrice qui n'appartient pas à E puisqu'ici :

$$y = 1 \neq 0 = t.$$

3. On note $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application définie, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, par :

$$f(M) = AM - MD$$

a) Soient M et N deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda.M+N) &= A(\lambda.M+N)-(\lambda.M+N)D = \lambda.AM+AN-\lambda.MD-ND \\ &= \lambda.(AM-MD)+(AN-ND) = \lambda.f(M)+f(N) \end{aligned}$$

L'application f est bien linéaire, c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) $M \in \operatorname{Ker}(f) \iff f(M)=0 \iff AM-MD=0 \iff AM=MD$, donc tout simplement :

$$\operatorname{Ker}(f)=E, \text{ et } \dim \operatorname{Ker}(f)=2$$

c) Comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie, le *théorème du rang* s'applique, et donne :

$$\dim \Im(f) + \dim \operatorname{Ker}(f) = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \iff \dim \Im(f) = 4-2 = 2$$

d) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $f(M) = \begin{pmatrix} z & y-t \\ z & 0 \end{pmatrix}$, et :

$$f(M)=M \iff \begin{cases} x=z \\ t-y=y \\ z=z \\ t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ y=t=0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) |\ f(M)=M\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} |x \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

On en déduit que 1 est valeur propre de f, de sous-espace propre associé $E_1(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ qui est de dimension 1 (car engendré par un seul vecteur non nul).

De même : $f(M)=-M \iff \begin{cases} z=-x \\ t-y=-y \\ z=-z \\ t=0 \end{cases} \iff x=z=t=0$, donc :

$$\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) |\ f(M)=-M\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |y \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Ainsi -1 est aussi valeur propre de f, de sous-espace propre associé $E_{-1}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$, de dimension 1 également.

e) Le noyau de f n'étant pas réduit à la matrice nulle, on en déduit également que 0 est valeur propre de f, le sous-espace propre associé étant $E_0(f) = \operatorname{Ker}(f)$.
Comme $\dim E_0(f) + \dim E_{-1}(f) + \dim E_1(f) = 2+1+1 = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: f n'admet pas d'autre valeur propre, et f est bien diagonalisable.

f) Le résultat précédent a pour conséquence que la famille $\left(U, A, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de vecteurs propres de f, dans laquelle la matrice représentative de f est :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Comme c'est une matrice diagonale : $F^3 = \begin{pmatrix} 0^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^3 \end{pmatrix}$, donc :

$$F^3 = F \iff f \circ f \circ f = f$$

D'après les propriétés de la représentation matricielle des endomorphismes.

Exercice 2

On note $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$F(x, y) = (x-1)(y-2)(x+y-6).$$

1. a) La fonction F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynômiale des variables x et y, et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \partial_1(F)(x,y) = (y-2)[1.(x+y-6) + (x-1).1] = (y-2)(2x+y-7) \\ \partial_2(F)(x,y) = (x-1)[1.(x+y-6) + (y-2).1] = (x-1)(x+2y-8) \end{cases}$$

L'énoncé ne demande pas, en fait, de trouver tous les points critiques de F, mais de vérifier que : $\begin{cases} \partial_1(F)(4,2) = (2-2)(8+2-7) = 0 \\ \partial_2(F)(4,2) = 3(4+4-8) = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} \partial_1(F)(2,3) = 1(4+3-7) = 0 \\ \partial_2(F)(2,3) = 1(2+6-8) = 0 \end{cases}$, ce qui fait bien de $(4,2)$ et $(2,3)$ des points critiques de F.

b) On calcule ensuite les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction F :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial^2_{1,1}(F)(x,y) = 2(y-2), \quad \partial^2_{2,2}(F)(x,y) = 2(x-1), \ \partial^2_{1,2}(F)(x,y) = \partial^2_{2,1}(F)(x,y) = 2x+2y-9$$

Ce qui permet d'en déduire la Hessienne de F en chacun des deux points critiques précédents :

$$H_{(4,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il s'agit maintenant de calculer les valeurs propres de chacune des deux Hessiennes :

- Le réel λ est valeur propre de $H_{(4,2)}$ si et seulement si $H_{(4,2)} - \lambda.I_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & 6-\lambda \end{pmatrix}$ est non inversible, ce qui est le cas si et seulement si son déterminant est nul, soit : $-\lambda(6-\lambda) - 9 = 0 \iff \lambda^2 - 6\lambda - 9 = 0$, équation du second degré de discriminant : $\Delta = 36 + 36 = 72$.

Les deux valeurs propres de $H_{(4,2)}$ sont donc : $\lambda_1 = \dfrac{6-\sqrt{72}}{2} = 3 - 3\sqrt{2} < 0$ et $\lambda_2 = 3 + 3\sqrt{2} > 0$.

Comme ces dernières sont de signes opposés, on peut conclure que la fonction F n'admet pas d'extrémum au point critique $(4,2)$ (mais un point col).

- Le réel λ est valeur propre de $H_{(2,3)}$ si et seulement si $H_{(2,3)} - \lambda.I_2 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ est non-inversible, ce qui est le cas si et seulement si :

  $(2-\lambda)^2 - 1 = 0 \iff (2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = 0 \iff (1-\lambda)(3-\lambda) = 0.$

Les deux valeurs propres de $H_{(2,3)}$ sont donc 1 et 3, de même signe, strictement positives : on en déduit qu'au point critique $(2,3)$, la fonction F admet un minimum local.

2. On note $\varphi:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x\in\mathbb{R}$, par : $\quad \varphi(x)=x(x-2)(2x-5)$.

   a) Pour tout réel $x\in[4,+\infty[$: $\quad x-2\geqslant 2$ et $2x-5\geqslant 3$, donc par produit membre à membre d'inégalités entre réels strictement positifs :

$$\forall x\in[4;+\infty[,\quad (x-2)(2x-5)\geqslant 6>4.$$

   b) Il suffit alors de multiplier les deux membres de l'inégalité par $x\geqslant 4$ pour obtenir :

$$\forall x\in[4,+\infty[,\ x(x-2)(2x-5)\geqslant 4x\geqslant 16>4\quad\text{donc}\quad \forall x\in[4,+\infty[,\ \varphi(x)\geqslant 4x\quad\text{et}\quad \varphi(x)\in[4,+\infty[$$

3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=4$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=F(1+u_n,u_n)$$

   a) En reprenant l'expression de la fonction F :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=(1+u_n-1)(u_n-2)(1+u_n+u_n-6)=u_n(u_n-2)(2u_n-5)=\varphi(u_n)$$

   b) On montre que : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ \underbrace{u_n\geqslant 4^{n+1}}_{\mathcal{P}(n)}$ par récurrenc sur n.

$\boxed{\text{I.}}$ $u_0=4=4^{0+1}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n\in\mathbb{N}$, et sous cette hypothèse montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie, soit : $u_{n+1}\geqslant 4^{n+2}$.

On sait (H.R.) que : $\quad u_n\geqslant 4^{n+1}\geqslant 4$, donc d'après l'inégalité obtenue en 2.b) :
$u_{n+1}=\varphi(u_n)\geqslant 4u_n\geqslant 4\times 4^{n+1}$, ce qui donne bien : $u_{n+1}\geqslant 4^{n+2}$, et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

Ainsi : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geqslant 4^{n+1}\iff 0<\dfrac{1}{u_n}\leqslant\dfrac{1}{4^{n+1}}$.

Or : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{4^{n+1}}$ est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{4}\in]-1,1[$, donc elle converge. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs assure donc que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{u_n}$ est elle-même convergente.

   c) Remarquons que l'inégalité : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geqslant 4^{n+1}$ implique que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ par comparaison, ce qui donne sa légitimité à l'algorigthme demandé dans cette question :

```
n=0; u=4
while u < 1e10
    u = u*(u-2)*(2*u-5)
    n = n+1
end
disp(n)
```

À l'exécution, l'algorithme rend : $n=3$, ce qui exprime une divergence rapide de la suite vers $+\infty$ assez logique étant donné qu'en fait : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\geqslant 2u_n^3$.

4. On note $g:\ [4,+\infty[\to\mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x\in[4,+\infty[$, par : $\quad g(x)=\dfrac{10}{\varphi(x)}$.

a) La fonction g est continue sur $[4,+\infty[$ puisque, comme on l'a vu : $\forall x \in [4,+\infty[,\ \varphi(x) \geqslant 4$, et au voisinage de $+\infty$:

$$g(x) = \frac{10}{x(x-2)(2x-5)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{5}{x^3}$$

Or : $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{5}{x^3}\mathrm{d}x$ est convergente, comme intégrale de Riemann (à une constante près), d'exposant $\alpha = 3 > 1$.

Le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives assure donc que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_4^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ est elle-même convergente.

b) Soit $x \in [4,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{2x-5} &= \frac{a(x-2)(2x-5) + bx(2x-5) + cx(x-2)}{x(x-2)(2x-5)} \\
&= \frac{a(2x^2-9x+10) + b(2x^2-5x) + c(x^2-2x)}{\varphi(x)} \\
&= \frac{(2a+2b+c)x^2 + (-9a-5b-2c)x + 10a}{\varphi(x)}
\end{aligned}$$

Ainsi par identification des coefficients, cette expression est égale à : $g(x) = \dfrac{10}{\varphi(x)}$ sur $[4,+\infty[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} 2a+2b+c &= 0 \\ -9a-5b-2c &= 0 \\ \quad 10a &= 10 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ 2b+c = -2 \\ 5b+2c = -9 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ 2b+c = -2 \\ b = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -5 \\ c &= 8 \end{cases}$$

Donc : $\quad \forall x \in [4,+\infty[,\ g(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{5}{x-2} + \dfrac{8}{2x-5}$.

5. De la question précédente, on déduit le calcul, pour tout réel $A \in [4,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
\int_4^A g(x)\mathrm{d}x &= \int_4^A \frac{1}{x}\mathrm{d}x - 5\int_4^A \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x + 4\int_4^A \frac{2}{2x-5}\mathrm{d}x \\
&= [\ln(x)]_4^A - 5\,[\ln(x-2)]_4^A + 4\,[\ln(2x-5)]_4^A \\
&= \ln(A) - \ln(4) - 5\ln(A-2) + 5\ln(2) + 4\ln(2A-5) - 4\ln(3) \\
&= \ln\left(\frac{A}{A-2}\right) + 4\ln\left(\frac{2A-5}{A-2}\right) + 3\ln(2) - 4\ln(3) \\
&= -\ln\left(1 - \frac{2}{A}\right) + 4\ln\left(\frac{2-\frac{5}{A}}{1-\frac{2}{A}}\right) + 3\ln(2) - 4\ln(3)
\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty} -\ln\left(1-\frac{2}{A}\right) = -\ln(1) = 0$ et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \ln\left(\frac{2-\frac{5}{A}}{1-\frac{2}{A}}\right) = 4\ln(2)$, donc :

$$\int_4^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \int_4^A g(x)\mathrm{d}x = 7\ln(2) - 4\ln(3)$$

Exercice 3

Partie A

1. Soit U une variable à densité suivant une loi normale d'espérance $m = 0$ et de variance $\sigma^2 = \dfrac{1}{2}$.

   a) Une densité de U est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

   b) D'après le cours, U suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ admet une variance égale à son moment d'ordre 2 puisque $E(U) = 0$, et qui vaut $\sigma^2 = \dfrac{1}{2}$, obtenue comme valeur de l'intégrale absolument convergente :
   $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g(t)\mathrm{d}t$. La fonction $t \mapsto t^2 g(t)$ étant clairement paire, on en déduit la convergence de l'intégrale :
   $\displaystyle 2\int_0^{+\infty} t^2.\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \iff \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

   Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall x \leqslant 0, & F(x) = 0 \\ \forall x > 0, & F(x) = 1 - e^{-x^2} \end{cases}$.

2. Ici la fonction F n'est pas donnée a priori à partir d'un calcul de fonction de répartition, on doit donc vérifier toutes les propriétés :
   - ⋆ La fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$, constante nulle donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty; 0[$; sur $]0; +\infty[$ elle est également de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
   $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 - e^{-x^2} = 1 - e^0 = 0 = F(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$, donc F est continue sur tout $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.
   - ⋆ $\forall x > 0,\ F'(x) = 2xe^{-x^2} > 0$. La fonction F est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, étant continue sur $\mathbb{R}$ elle est finalement croissante sur $\mathbb{R}$.
   Remarque : $\lim\limits_{x\to 0^+} F'(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} F'(x)$, donc F est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $\mathbb{R}$.
   - ⋆ $\lim\limits_{x\to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} 0 = 0$, et $\lim\limits_{x\to +\infty} -x^2 = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to -\infty} 1 - e^{-x^2} = 1 - 0 = 1 = \lim\limits_{x\to +\infty} F(x)$.

   La fonction F vérifie bien toutes les conditions pour être la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, où cette dernière est définie par :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2xe^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

   a) La v.a.r. X admet une densité si et seulement si l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente.
   La fonction $t \mapsto tf(t)$ étant nulle sur $]-\infty; 0]$ et positive sur $[0; +\infty[$, il suffit donc de vérifier la convergence de l'intégrale généralisée : $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\mathrm{d}t$.
   La convergence ayant déjà été démontrée à la question 1.b), on en conclut que X admet une espérance qui vaut :

   $$E(X) = 2\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\mathrm{d}t = 2 \times \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

b) Pour tout réel négatif y, on conclut immédiatement que $P(X^2 \leqslant y) = 0$ comme probabilité d'un événement impossible, car X^2 ne prend que des valeurs réelles positives.
Pour tout réel $y > 0$:

$$\begin{aligned} P(X^2 \leqslant y) &= P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} < X \leqslant \sqrt{y}) \text{ car } X \text{ est à densité} \\ &= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) = 1 - e^{-(\sqrt{y})^2} - 0 \text{ car } -\sqrt{y} < 0 \\ P(X^2 \leqslant y) &= 1 - e^{-y} \end{aligned}$$

c) D'après la question précédente, la v.a.r. $Y = X^2$ a pour fonction de répartition
$F_Y : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ 1 - e^{-y} & \text{si } y > 0 \end{cases}$, ce qui caractérise la **loi exponentielle de paramètre 1**.
On sait en particulier que $Y = X^2$ admet une espérance, qui vaut : $E(Y) = 1$, ce qui revient à dire que X admet un moment d'ordre 2 de même valeur.
Mais alors, X admet une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Partie B

1. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.
D'après le cours : $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et $P(Z = k) = (1-p)^{k-1}p$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, tandis que $E(Z) = \dfrac{1}{p}$ et $V(Z) = \dfrac{1-p}{p^2}$.
2. Soient un entier n supérieur ou égal à 2, et n variables aléatoires indépendantes $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.
On considère la variable aléatoire $M_n = \dfrac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n)$.

a) Par linéarité de l'espérance, $E(M_n)$ existe et vaut :

$$m = E(M_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(Z_i) = \frac{1}{n} \times nE(Z_1) = \frac{1}{p}$$

puisque les Z_i suivent toutes la même loi.

L'indépendance mutuelle des v.a.r. Z_i permet aussi de conclure que M_n admet une variance, qui vaut :

$$V(Z_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(Z_k) = \frac{1}{n^2} \times nV(Z_1) = \frac{1-p}{np^2}$$

D'où l'écart-type de M_n : $\sigma_n = \sqrt{Mn} = \sqrt{\dfrac{1-p}{np^2}}$.

b) Citons proprement le théorème de la limite centrée : $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, admettant une espérance et une variance.
La variable $M_n = \dfrac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n)$ représente la moyenne empirique de l'échantillon, et a pour variable centrée réduite associée : $M_n^* = \dfrac{M_n - m}{\sigma_n}$.
D'après le théorème de la limite centrée : la suite $(M_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
Cela se traduit par la relation :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } a < b, \lim_{n\to+\infty} P(a \leqslant M_n^* \leqslant b) = \int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t$$

où $\varphi: \ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est la densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
Dans notre cas : $P(0 \leqslant M_n - m \leqslant \sigma_n) = P(0 \leqslant M_n^* \leqslant 1)$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} P(0 \leqslant M_n - m \leqslant \sigma_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$