MATHÉMATIQUES - EMLyon E 2004

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}}$$

1. Puisque : $\forall t \in \mathbb{R},\ 1+t^2 > 0$, la fonction $f :\ t \mapsto 2e^t \times (1+t^2)^{-\frac{1}{2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions dérivables, avec :

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2e^t(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} + 2e^t \times (-\frac{1}{2}) \times 2t \times (1+t^2)^{-\frac{1}{2}-1} \\ &= \frac{2e^t(1+t^2) - 2te^t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} \\ f'(t) &= \frac{2(t^2-t+1)e^t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} \end{aligned}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $e^t > 0$ et $\sqrt{1+t^2} > 0$; par ailleurs, le trinôme $t^2 - t + 1$ a pour discriminant $-3 < 0$, il est donc toujours du signe de son coefficient dominant (ici $a = 1 > 0$), soit strictement positif pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) > 0$, donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a) On considère ici la fonction $g : \mapsto 2e^t - t - t^2$, bien définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$, avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad g'(t) = 2e^t - 1 - 2t \quad \text{et} \quad g''(t) = 2e^t - 2 = 2(e^t - 1)$$

Ainsi : $g''(t) \geqslant 0 \iff e^t - 1 \geqslant 0 \iff e^t \geqslant 1 \iff t \geqslant 0$, donc la fonction g' est croissante sur $[0, +\infty[$.

On en déduit que g' admet un minimum en 0, qui vaut : $g'(0) = 2e^0 - 1 = 1$.

Par conséquent : $\forall t \in [0, +\infty[,\ g'(t) \geqslant g'(0) = 1 > 0$, et la fonction g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

On a donc aussi : $\forall t \in [0, +\infty[,\ g(t) \geqslant g(0) = 2e^0 - 0 = 2$, ce qui donne bien :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad 2e^t - t - t^2$$

Par ailleurs : pour tout réel $t \in [0, +\infty[,\ 1 + t = \sqrt{(1+t)^2} = \sqrt{1 + t^2 + 2t}$, où :

$$\forall t \in [0, +\infty[,\ 1 + t^2 + 2t \geqslant 1 + t^2 \iff 1 + t \geqslant \sqrt{1+t^2}$$

par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $[0, +\infty[$.

b) Des deux inégalités précédentes, on déduit :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad t + t^2 < 2e^t \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+t} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Par produit membre à membre d'inégalités de même sens entre réels positifs, dont l'une est stricte, on déduit :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \frac{t+t^2}{1+t} < \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}} \iff t < f(t)$$

3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Une récurrence immédiate montre que : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$. Ainsi, d'après ce qui précède :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) > u_n \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

Il faut donc montrer que la suite n'est pas majorée ; si c'était le cas : la suite (u_n) serait convergente, de limite ℓ vérifiant :

$$\ell \geqslant 0 \text{ et } f(\ell) = \ell \text{ puisque } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}$$

Or l'inégalité obtenue en 2.b) exprime notamment qu'une telle égalité est impossible sur $\mathbb{R}_+$.

On en conclut que la suite (u_n) est croissante, non majorée, et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

b)
```
u = 1; n = 0;
while u <= 1e6
    u = 2*exp(u)/sqrt(1+u^2)
    n = n+1
end
disp(n)
```

4. On considère l'application $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

a) La fonction G est bien définie sur $\mathbb{R}$ (car f est continue sur $\mathbb{R}$), et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(-x) = \int_{x}^{-x} f(t)\mathrm{d}t = -\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t = -G(x)$$

D'après une propriété élémentaire de l'intégrale. La fonction G est donc bien impaire.

b) Toujours par continuité de f sur $\mathbb{R}$: cette fonction admet des primitives sur $\mathbb{R}$, soit F l'une d'elles. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = F(x) - F(-x)$$

forme qui prouve que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, comme somme et produit de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G'(x) = F'(x) - (-1).F'(-x) = f(x) + f(-x) = \frac{2e^x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{2e^{-x}}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \frac{2(e^x + e^{-x})}{\sqrt{1+x^2}}$$

c) On exploite ici le fait que f est positive sur $\mathbb{R}$, et que : $\forall x \in [0, +\infty[,\ f(t) > t$, et :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ G(x) = \int_{-x}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

où : f étant continue sur $\mathbb{R}$, et puisque $-x \leqslant 0$ lorsque $x \in [0, +\infty[$:

$$\int_{-x}^{0} f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0 \quad \text{par positivité de l'intégrale}$$

et aussi :

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_0^x t\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}$$

On en déduit : $\forall x \in [0, +\infty[,\ G(x) \geqslant \dfrac{x^2}{2}$, et donc :

$$\lim_{x \to +\infty} G(x) = +\infty \quad \text{par comparaison de limites}$$

d) La dérivée obtenue à la question b) fait clairement apparaître que : $\forall x \in \mathbb{R},\ G'(x) > 0$, donc la fonction G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
L'imparité de G permet aussi d'en déduire directement : $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x) = -\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$G'(x)$		$+$		$+$	
G	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 2

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels, I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On considère, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$E_1(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R});\ AM = M\}$$

$$E_2(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R});\ A^2M = AM\}$$

Partie I

1. L'ensemble $E_1(A)$ est non-vide, puisque la matrice nulle vérifie toujours : $A \times 0 = 0$, donc $0 \in E_1(A)$.
Soient M et N deux matrices de $E_1(A)$, et λ un réel quelconque :
$A(M + N) = AM + AN = M + N$, donc $M + N$ appartient encore à $E_1(A)$.
$A(\lambda.M) = \lambda.(AM) = \lambda.M$, donc $\lambda.M$ appartient encore à $E_1(A)$.
L'ensemble $E_1(A)$ est donc stable par addition et multiplication externe : c'est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Une rédaction tout à fait semblable montrerait que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (ce que l'énoncé ne demandait pas de faire).
2. a) Soit M une matrice quelconque de $E_1(A)$: M vérifie donc $AM = M$, ce qui implique :
$A^2M = AM$ par une simple multiplication terme à terme à gauche par A, et donc que M appartient encore à $E_2(A)$, ce qui prouve l'inclusion $E_1(A) \subset E_2(A)$.
b) Supposons A inversible : alors toute matrice M de $E_2(A)$ vérifiant $A^2M = AM$, on peut multiplier les deux membres de l'égalité à gauche par A^{-1}, ce qui donne :
$A^{-1}A^2M = A^{-1}AM \iff AM = M$, et donc que M appartient encore à $E_1(A)$.
L'inversibilité de A implique donc l'inclusion réciproque : $E_2(A) \subset E_1(A)$, et donc l'égalité de sous-espaces vectoriels : $E_1(A) = E_2(A)$ par double inclusion dans ce cas.

3. a) Si la matrice $A-I$ est inversible, alors pour toute matrice M de $E_1(A)$:
$AM = M \iff AM - M = 0 \iff (A-I)M = 0$, ce qui implique $M = 0$ par inversibilité de $A-I$, donc :

$E_1(A) \subset \{0\}$, et même $E_1(A) = \{0\}$ puisque l'inclusion réciproque est toujours vraie.

b) Un exemple : soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

⋆ La matrice B est triangulaire supérieure, et tous ses éléments diagonaux sont non-nuls, donc B est inversible, et cela implique que $E_1(B) = E_2(B)$ d'après la question 2.b).

⋆ De plus, $B - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est encore une matrice triangulaire inversible, donc $E_1(B) = \{0\}$ d'après la question 3.a).

Dans cet exemple, on a donc : $E_1(B) = E_2(B) = \{0\}$.

Partie II

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Un réel λ est valeur propre de C si et seulement si la matrice $C - \lambda.I$ est non-inversible.

$$C-\lambda.I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -\lambda \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 3-\lambda & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow 2L_3 - (3-\lambda)L_1]{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -\lambda \\ 0 & 2-2\lambda & \lambda - 2 \\ 0 & 2-2\lambda & -2+\lambda(3-\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -\lambda \\ 0 & 2-2\lambda & \lambda-2 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda \end{pmatrix}.$$

$C - \lambda.I$ est non-inversible si et seulement si sa réduite de Gauss l'est, ce qui est le cas si et seulement si l'un au moins de ses coefficients diagonaux l'est, soit :

$$\begin{cases} 2-2\lambda = 0 \\ \text{ou} \\ -\lambda^2 + 2\lambda = 0 \end{cases} \iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 2.$$

On en conclut que les valeurs propres de C sont 0, 1 et 2.

On calcule ensuite les sous-espaces propres en résolvant successivement :

- $CX = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases}$

  $\iff \begin{cases} x = y = z \\ y = z \end{cases}$, donc le sous-espace propre associé est :

  $$S_0(C) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \middle| \; z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

- $(C-I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - 2y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$, donc le sous-espace propre associé est : $S_1(C)=\left\{\begin{pmatrix}y\\y\\0\end{pmatrix}\middle|\ y\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

- $(C-2I)X=0 \iff \begin{pmatrix}2&-2&-2\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}2x-2y-2z&=0\\-2y&=0\end{cases} \iff \begin{cases}x&=z\\y&=0\end{cases}$,

  donc le sous-espace propre associé est : $S_2(C)=\left\{\begin{pmatrix}z\\0\\z\end{pmatrix}\middle|\ z\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

2. Les résultats obtenus à la question précédente permettent d'affirmer que :
   - La matrice C est diagonalisable puisqu'elle possède trois valeurs propres distinctes alors qu'elle appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   - $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ est une matrice de passage dont les colonnes sont formées de vecteurs propres pour C associés à chacune de ses valeurs propres, telle que : $C=PDP^{-1}$, où $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,

     relation qui peut aussi s'écrire : $\quad D=P^{-1}CP$.
3. Soit $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $N=P^{-1}M$, alors : $PN=M$, et

$$M\in E_1(C)\iff CM=M\iff CPN=PN\iff P^{-1}CPN=P^{-1}PN\iff DN=N\iff N\in E_1(D)$$

4. Une matrice $N=\begin{pmatrix}x&y&z\\a&b&c\\u&v&w\end{pmatrix}$ appartient à $E_1(D)$ si et seulement si :

$$DN=N\iff\begin{pmatrix}0&0&0\\a&b&c\\2u&2v&2w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y&z\\a&b&c\\u&v&w\end{pmatrix}.$$

   Par identification des coefficients, on obtient bien les conditions :

   $x=y=z=0$, et $2u=u\Longrightarrow u=0$, de même $2v=v\Longrightarrow v=0$ et $2w=w\Longrightarrow w=0$, tandis qu'il n'apparaît aucune contrainte sur les coefficients a,b,c.

   On conclut donc que N appartient à $E_1(D)$ si et seulement si il existe trois réels a,b,c tels que $N=\begin{pmatrix}0&0&0\\a&b&c\\0&0&0\end{pmatrix}$.
5. Comme on l'a vu à la question 3. de cette partie, on dispose de l'équivalence suivante :

   $M\in E_1(C)\iff N=P^{-1}M\in E_1(D)$, ce qui est maintenant équivalent à :

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3;\ P^{-1}M=\begin{pmatrix}0&0&0\\a&b&c\\0&0&0\end{pmatrix}\iff\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3;\ M=P\begin{pmatrix}0&0&0\\a&b&c\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\a&b&c\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

   Ainsi :
$$E_1(C)=\left\{a.\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+c.\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\middle|\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$$
$$=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right).$$

   Il n'est alors pas difficile de voir que :

$a.\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+c.\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=0 \iff a=b=c=0$, c'est-à-dire que la famille génératrice obtenue du sous-espace vectoriel $E_1(C)$, est aussi libre, donc est une base de $E_1(C)$.

On en déduit notamment que $\dim E_1(C)=3$.

6. On emploie une méthode similaire pour déterminer $E_2(C)$:

$$M\in E_2(C) \iff C^2M=CM \iff C^2PN=CPN \iff P^{-1}C^2PN=P^{-1}CPN$$
$$\iff D^2N=DN \iff N=P^{-1}M\in E_2(D)$$

Or :

$$N=\begin{pmatrix}x&y&z\\a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}\in E_2(D) \iff D^2N=DN \iff \begin{pmatrix}0&0&0\\a&b&c\\4d&4e&4f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\a&b&c\\2d&2e&2f\end{pmatrix} \iff d=e=f=0$$

Les équations obtenues par identification des coefficients ne font pas apparaître de conditions sur les autres coefficients.

On en conclut que les matrices de $E_2(C)$ sont de la forme : $M=P\begin{pmatrix}x&y&z\\a&b&c\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+a&y+b&z+c\\x+a&y+b&z+c\\x&y&z\end{pmatrix}$

où x,y,z,a,b,c sont des réels quelconques, soit :

$$E_2(C)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right)$$

On vérifie facilement à nouveau que la famille génératrice de $E_2(C)$ obtenue est aussi libre, donc est une base de $E_2(C)$.

Par conséquent, $\dim E_2(C)=6$, et on a donc évidemment $E_1(C)\neq E_2(C)$ puisque ces deux sous-espaces vectoriels n'ont pas la même dimension.

Exercice 3

Partie I

1. Pour observer un premier changement de couleur, il faut faire au moins deux tirages. On peut aussi tirer la même couleur un nombre indéterminé de fois, donc :

$$X(\Omega)=[\![2;+\infty[\![.$$

2. Pour tout entier $k\geqslant 2$:

$$[X=k]=\left(B_1\cap\ldots\cap\ldots B_{n-1}\cap\overline{B_n}\right)\cup\left(R_1\cap\ldots\cap\ldots R_{n-1}\cap\overline{R_n}\right)\cup\left(V_1\cap\ldots\cap\ldots V_{n-1}\cap\overline{V_n}\right)$$

Il s'agit d'une union disjointe de trois événements, donc pour tout entier $k\geqslant 2$

$$\begin{aligned}P(X=k)=&P(B_1)\times P_{B_1}(B_2)\times\ldots\times P_{B_1\cap\ldots\cap B_{n-2}}(B_{n-1})\times P_{B_1\cap\ldots\cap B_{n-1}}(\overline{B_n})\\&+P(R_1)\times P_{R_1}(R_2)\times\ldots\times P_{R_1\cap\ldots\cap R_{n-2}}(R_{n-1})\times P_{R_1\cap\ldots\cap R_{n-1}}(\overline{R_n})\\&+P(V_1)\times P_{V_1}(V_2)\times\ldots\times P_{V_1\cap\ldots\cap V_{n-2}}(V_{n-1})\times P_{V_1\cap\ldots\cap V_{n-1}}(\overline{V_n})\end{aligned}$$

$$P(X=k)=(1-b).b^{k-1}+(1-r).r^{k-1}+(1-v).v^{k-1}$$

3. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 2} kP(X=k)$ est absolument convergente. Comme il s'agit d'une série à termes positifs ($k \geqslant 2$ et $P(X=k) \geqslant 0$ comme probabilité), la convergence simple suffit :

$$\sum_{k=2}^{n} kP(X=k) = (1-b)\sum_{k=2}^{n} k.b^{k-1} + (1-r)\sum_{k=2}^{n} k.r^{k-1} + (1-v)\sum_{k=2}^{n} k.v^{k-1}$$

On reconnaît trois séries géométriques dérivées de raisons respectives appartenant toutes les trois à $]0;1[$, donc la série converge ; ainsi, X admet une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned} E(X) &= (1-b).\Big(\frac{1}{(1-b)^2}-1\Big) + (1-r).\Big(\frac{1}{(1-r)^2}-1\Big) + (1-v).\Big(\frac{1}{(1-v)^2}-1\Big) \\ &= \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} + 3 - (b+r+v) = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2 \end{aligned}$$

puisque $b+r+v=1$.

Partie II

On considère la fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1[\times]0,1[$ définie par :

$$\forall (x,y) \in]0,1[\times]0,1[, \quad f(x,y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}$$

1. Pour tout (x,y) de $]0,1[\times]0,1[$, domaine où f est de classe $\mathcal{C}^2$:

$$\partial_1(f)(x,y) = -\frac{-1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(x+y)^2} = \frac{(x+y)^2-(1-x)^2}{(1-x)^2(x+y)^2} = \frac{(1+y)(2x+y-1)}{(1-x)^2(x+y)^2}$$

$$\partial_1(f)(x,y) = -\frac{-1}{(1-y)^2} - \frac{1}{(x+y)^2} = \frac{(x+y)^2-(1-y)^2}{(1-y)^2(x+y)^2} = \frac{(1+x)(x+2y-1)}{(1-y)^2(x+y)^2}$$

2. Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$, les points critiques sont les seuls en lesquels f est susceptible de posséder un minimum local, et ce sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (1+y)(2x+y-1) = 0 \\ (1+x)(x+2y-1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x+y=1 \\ 3y=1 \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} y=1/3 \\ 2x = 1-1/3 \iff x = 1/3 \end{cases}$$

Puisque $1+x>0$ et $1+y>0$ sur le domaine. La fonction admet donc l'unique point critique $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

3. On étudie la Hessienne de f en l'unique point critique, en commençant par calculer les dérivées partielles d'ordre 2 ; pour tout (x,y) de $]0,1[\times]0,1[$:

$$\partial_1(f)(x,y) = (1-x)^{-2} - (x+y)^{-2} \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x,y) = (1-y)^{-2} - (x+y)^{-2}$$

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = -2.(-1).(1-x)^{-3} + 2.(x+y)^{-3} = \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{2}{(x+y)^3}$$

$$\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = -2.(-1).(1-y)^{-3} + 2.(x+y)^{-3} = \frac{2}{(1-y)^3} + \frac{2}{(x+y)^3}$$

$$\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = -(-2).(x+y)^{-3} = \frac{2}{(x+y)^3} = \partial^2_{2,1}(f)(x,y)$$

Au point $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, les dérivées partielles d'ordre 2 valent donc :

$$\partial_{1,1}(f)\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = 2\times\frac{27}{8}\times 2 = \frac{27}{2} = \partial_{2,2}(f)\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\quad \partial^2_{1,2}(f)\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = 2\times\frac{27}{8} = \frac{27}{4}$$

La Hessienne correspondante est donc : $\quad H = \begin{pmatrix} 27/2 & 27/4 \\ 27/4 & 27/2 \end{pmatrix}$.

Ses valeurs propres λ sont les solutions de l'équation :

$$\det\left(H-\lambda.I_2\right) = 0 \iff \left(\frac{27}{2}-\lambda\right)^2 - \left(\frac{27}{4}\right)^2 = 0 \iff \left(\frac{27}{2}+\frac{27}{4}-\lambda\right).\left(\frac{27}{2}-\frac{27}{4}-\lambda\right) = 0$$

La Hessienne H admet donc deux valeurs propres $\lambda_1 = \frac{81}{4}$ et $\lambda_2 = \frac{27}{4}$.

Comme elles sont toutes deux strictement positives, on en déduit que f admet au point critique $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, un minimum local.

4. a) Comme $b+r+v=1 \iff 1-v=b+r$, on peut écrire :

$$E(X) = \frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-r}+\frac{1}{b+r}-2 = f(b,r)-2$$

b) D'après ce qui précède : $\quad E(X) = f(b,r)-2$ est minimale lorsque $b=r=\frac{1}{3}$, donc $v=\frac{1}{3}$ aussi.
C'est lorsque les trois couleurs sont en proportions égales dans l'urne, que le premier changement de couleur arrive en moyenne le plus tôt : $\quad E(X) = \frac{3}{2}\times 3 - 2 = \frac{5}{2}$.

Partie III

1. Soit A un réel supérieur à 2 :

$$\int_2^A \frac{1}{3^t}\mathrm{d}t = \int_2^A e^{-t\ln(3)}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\ln(3)}.e^{-t\ln(3)}\right]_2^A = -\frac{e^{-A\ln(3)}}{\ln(3)}+\frac{e^{-2\ln(3)}}{\ln(3)} = \frac{1}{\ln(3)}.\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3^A}\right)$$

$\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{1}{3^A} = 0$ car $3>1$, donc $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{1}{3^t}\mathrm{d}t = \frac{1}{9\ln(3)}$, donc l'intégrale impropre $\int_2^{+\infty}\frac{1}{3^t}\mathrm{d}t$ converge, et vaut $\frac{1}{9\ln(3)}$.

On note α ce réel, et on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(t) = 0 & \text{si } t\in]-\infty;2[\\ g(t) = \dfrac{1}{\alpha 3^t} & \text{si } t\in[2;+\infty[\end{cases}$$

2. Montrons que g est une densité de probabilité :

- La fonction g est positive car nulle sur $]-\infty;2[$, et positive sur $[2;+\infty[$ car $\alpha>0$ et une exponentielle est toujours strictement positive.

- La fonction g est continue sur $]-\infty;2[$ comme fonction nulle ; $g :\ t\mapsto\frac{e^{-t\ln(3)}}{\alpha}$ est continue sur $]2;+\infty[$ comme composée de fonctions continues, donc g est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 2.

- Enfin : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{2} 0 \,\mathrm{d}t + \frac{1}{\alpha}\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{3^t}\mathrm{d}t = 0 + \frac{\alpha}{\alpha} = 1.$

La fonction g est bien une densité de probabilité.

On note Y une variable aléatoire admettant g comme densité.

3. La variable aléatoire g admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Comme la fonction $t \mapsto tg(t)$ est nulle sur $]-\infty;2[$, et positive sur $[2;+\infty[$, il suffit de prouver la convergence simple de $\displaystyle\frac{1}{\alpha}\int_{2}^{+\infty} t.e^{-t\ln(3)}\mathrm{d}t$.

On réalise, pour $A > 2$, une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_{2}^{A} t.e^{-t\ln(3)}\mathrm{d}t$, en posant :

$$u(t) = t \qquad \longrightarrow \quad u'(t) = 1$$

$$v'(t) = e^{-t\ln(3)} \quad \longrightarrow \quad v(t) = -\frac{1}{\ln(3)}.e^{-t\ln(3)}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2;+\infty[$, donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{2}^{A} t.e^{-t\ln(3)}\mathrm{d}t &= \Big[-\frac{1}{\ln(3)}.t.e^{-t\ln(3)}\Big]_2^A + \frac{1}{\ln(3)}\int_{2}^{A} e^{-t\ln(3)}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{A}{\ln(3).3^A} + \frac{2}{\ln(3).9} - \frac{1}{\big(\ln(3)\big)^2}.\Big[e^{-t\ln(3)}\Big]_2^A \\ &= -\frac{A}{\ln(3).3^A} + \frac{2}{\ln(3).9} - \frac{1}{\big(\ln(3)\big)^2.3^A} + \frac{1}{\big(\ln(3)\big)^2.9}\end{aligned}$$

Lorsque A tend vers $+\infty$: $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{3^A} = 0$ et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{A}{3^A} = 0$ par croissances comparées.

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} t.g(t)\mathrm{d}t$ converge, donc Y admet une espérance qui vaut :

$$E(Y) = \frac{1}{\alpha}\int_{2}^{+\infty} t.3^{-t}\mathrm{d}t = 9\ln(3).\Big(\frac{2}{9\ln(3)} + \frac{1}{9\big(\ln(3)\big)^2}\Big) = 2 + \frac{1}{\ln(3)}$$

4. On note Z la variable aléatoire égale à la partie entière de Y.

a) Puisque Y est à valeurs dans $[2;+\infty[$, alors la variable aléatoire Z est discrète, à valeurs dans $[\![2;+\infty[\![$.

Pour tout entier $k \geqslant 2$: $[Z=k] = [k \leqslant Z < k+1]$, donc :

$$P(Z=k) = \int_{k}^{k+1} g(t)\mathrm{d}t = \Big[-\frac{1}{\alpha.\ln(3)}.e^{-t\ln(3)}\Big]_k^{k+1} = -\frac{9}{3^{k+1}} + \frac{9}{3^k} = \frac{18}{3^{k+1}} = \frac{2}{3^{k-1}}$$

b) Lorsque $b = r = v = \dfrac{1}{3}$, la loi de probabilité de X est donnée par :

$$\forall k \in [\![2;+\infty[\![, \quad P(X=k) = \frac{2}{3}.\Big(\frac{1}{3}\Big)^{k-1} \times 3 = \frac{2}{3^{k-1}}$$

Donc lorsque les trois couleurs sont en proportions équilibrées, les variables aléatoires X et Z suivent la même loi.