MATHÉMATIQUES - Edhec E 2014

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On note I la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. a) Un réel λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda.I$ est non-inversible ; on échelonne donc la matrice $A - \lambda.I$:

$$A - \lambda.I = \begin{pmatrix} 7-\lambda & 5 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 6 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_3]{} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 7-\lambda & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1]{L_3 \leftarrow 6L_3 - (7-\lambda)L_1} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 23+\lambda & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_3 + L_2]{} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 21 & -16+11\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 23+\lambda & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow 21L_3 - (23+\lambda)L_2]{} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 21 & -16+11\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix}$$

où : $\quad Q(\lambda) = -315 + 210\lambda - 21\lambda^2 + 368 + 16\lambda - 252\lambda - 11\lambda^2 + 23\lambda^2 + \lambda^3 = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53.$
La matrice $A - \lambda.I$ est bien non-inversible, et donc λ est valeur propre de A, si et seulement si

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0.$$

b) La fonction $f : x \mapsto x^3 - 9x^2 - 27x + 53$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynômiale, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 - 18x - 27 = 3(x^2 - 6x - 9)$$

On calcule les racines du trinôme $x^2 - 6x - 9$: $\quad \Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 36 + 36 = 72 > 0$, il y a donc deux racines distinctes :

$$r_1 = \frac{6 - \sqrt{72}}{2} = \frac{6 - 6\sqrt{2}}{2} = 3(1 - \sqrt{2}) \quad \text{et} \quad \text{et} \quad r_2 = 3(1 + \sqrt{2})$$

Comme $3 > 0$, $f'(x)$ a le même signe que $x^2 - 6x - 9$, et f a pour tableau de variations :

x	$-\infty$		$3(1-\sqrt{2})$		$3(1+\sqrt{2})$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction polynômiale f sont celles de son terme de plus haut degré :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

c) $f(0) = 53 > 0$ et $f(3) = 27 - 81 - 81 + 53 = -82 < 0$. Or puisque $1 < 2 < 4$, alors $1 < \sqrt{2} < 2$, donc $3(1-\sqrt{2}) < 0$ et $3 < 3(1+\sqrt{2})$.
Par décroissance stricte de f sur $[3(1-\sqrt{2}), 3(1+\sqrt{2})]$, on en déduit que :

$$f(3(1-\sqrt{2})) > f(0) > 0 > f(3) > f(3(1+\sqrt{2})) \Longrightarrow M > 0 > m$$

d) Au vu du tableau de variations de f, on comprend qu'on doit utiliser trois fois de suite le théorème de la bijection :

- Sur $]-\infty, 3(1-\sqrt{2})]$, la fonction f est continue, strictement croissante, à valeurs dans $]-\infty; M]$ qui contient 0 puisque $M > 0$.
  D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution λ_1 sur $]-\infty, 3(1-\sqrt{2})]$.

- Sur $]3(1-\sqrt{2}), 3(1+\sqrt{2})]$, la fonction f est continue, strictement décroissante, à valeurs dans $[m, M[$ qui contient 0 puisque $M > 0$ et $m < 0$.
  D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution λ_2 sur $]3(1-\sqrt{2}); 3(1+\sqrt{2})]$.

- Sur $]3(1+\sqrt{2}), +\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante, à valeurs dans $]m; +\infty[$ qui contient 0 puisque $m < 0$.
  D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution λ_3 sur $]3(1+\sqrt{2}), +\infty[$.

Finalement, l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, qui sont les trois valeurs propres de la matrice A.

e) La matrice A, carrée d'ordre 3, admet donc trois valeurs propres distinctes : d'après le critère suffisant, A est donc diagonalisable, semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ via une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$.

2. L'objectif de cette question est de déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire qui vérifient $AM = MA$.

a) On cherche ici les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telles que :

$$DM = MD \iff \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_1 & c\lambda_1 \\ d\lambda_2 & e\lambda_2 & f\lambda_2 \\ g\lambda_3 & h\lambda_3 & i\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_2 & c\lambda_3 \\ d\lambda_1 & e\lambda_2 & f\lambda_3 \\ g\lambda_1 & h\lambda_2 & i\lambda_3 \end{pmatrix}$$

On obtient, par identification des coefficients, un système de neuf équations dont trois sont toujours vraies : $a\lambda_1 = a\lambda_1,\ e\lambda_2 = e\lambda_2,\ i\lambda_3 = i\lambda_3$.
L'équation suivante est : $b\lambda_1 = b\lambda_2 \iff b(\lambda_1 - \lambda_2) = 0 \iff b = 0$ car $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ puisque les trois valeurs propres sont distinctes. Le même principe s'applique aux cinq dernières équations, qui donnent :

$$DM = MD \iff b = c = d = f = g = h = 0 \iff \exists (a, e, i) \in \mathbb{R}^3; \quad D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Les matrices qui commutent avec D sont bien les matrices diagonales.

b) On montre l'équivalence demandée grâce à la formule de changement de base $A = PDP^{-1}$:

$$M \in E \iff AM = MA \iff PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \iff DP^{-1}MP = P^{-1}MPD$$
$$\iff P^{-1}MP \text{ commute avec } D$$

c) La combinaison des résultats des questions a) et b) permet d'écrire :

$$M \in E \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3;\ P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ M = P\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}P^{-1}$$

soit :

$$E = \left\{ P\left(a.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)P^{-1} \,\middle|\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \left\{ a.\underbrace{P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}}_{=U_1} + b.\underbrace{P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}}_{=U_2} + c.\underbrace{P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}}_{=U_3} \,\middle|\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

D'où le résultat voulu, puisque cela signifie que $E = \text{Vect}(U_1, U_2, U_3)$.

d) L'ensemble E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, en tant que sous-espace engendré par trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On étudie si cette famille génératrice (U_1, U_2, U_3) est libre en posant une combinaison linéaire nulle : soient a, b, c trois réels tels que

$$a.U_1 + b.U_2 + c.U_3 = 0_3 \iff P\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}P^{-1} = 0_3 \iff \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = P^{-1}0_3P = 0_3 \iff a = b = c = 0$$

La famille (U_1, U_2, U_3) est donc libre : c'est bien une base de E, et $\dim E = 3$.

e) On sait que la matrice A possède trois valeurs propres distinctes : tout polynôme annulateur de A doit donc admettre au moins les trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ pour racines distinctes. D'après les propriétés des polynômes, il faut bien qu'un tel polynôme annulateur soit de degré supérieur ou égal à 3. Il n'existe donc aucun polynôme annulateur de A de degré inférieur ou égal à 2.

Mais alors toute combinaison linéaire nulle de I, A, A^2, de la forme : $\alpha.I + \beta.A + \gamma.A^2 = 0_3$ peut se traduire par le fait que $\alpha + \beta X + \gamma X^2$ est un polynôme annulateur de A. D'après ce qui précède, un tel polynôme non nul ne peut pas exister car il serait de degré inférieur ou égal à 2 ; la seule solution est donc qu'il s'agisse du polynôme nul, donc : $\alpha.I + \beta.A + \gamma.A^2 = 0_3$ implique $\alpha = \beta = \gamma = 0$, et la famille (I, A, A^2) est libre.

Il faut aussi (très important !) justifier qu'il s'agit de trois matrices de E : I commute évidemment avec A ($IA = AI = A$), de même que A elle-même, et A^2 aussi ($AA^2 = A^3 = A^2A$). On dispose donc d'une famille libre de 3 vecteurs de E, qui est de dimension 3 : c'est bien une base de E.

Exercice 2

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, comme inverse et composée de fonctions qui le sont, sachant que : $\forall t \in \mathbb{R},\ t^2+1 \geqslant 1 > 0$. L'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t$ est donc bien définie pour tout réel x, on la note $f(x)$, ce qui définit une fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout réel x : $\quad f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t$, dans laquelle on pose le changement de variable affine : $u=-t$.
   $\star$ $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$, et $\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\sqrt{(-u)^2+1}}(-\mathrm{d}u) = -\dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}}\mathrm{d}u$.
   $\star$ quand $t=-x,\ u=x$ et quand $t=-2x,\ u=2x$. Ainsi, par changement de variable :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = -\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\mathrm{d}u = -f(x)$$
   La fonction f est donc bien impaire.

3. a) La continuité de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$, assure que cette fonction possède des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit G l'une d'elles : en tant que telle, G est alors de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   Et comme : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \Big[G(t)\Big]_x^{2x} = G(2x) - G(x)$, qui rend f elle-même de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme composée et différence de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   b) L'écriture précédente permet de calculer la dérivée de f :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = \frac{2}{\sqrt{(2x)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} - \frac{2}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} - \frac{2}{\sqrt{4x^2+4}}$$
   Avec cette écriture :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ 4x^2+1 < 4x^2+4 \iff \sqrt{4x^2+1} < \sqrt{4x^2+4} \iff \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} > \frac{2}{\sqrt{4x^2+4}} \iff f'(x) > 0$$
   on a ici utilisé la stricte croissance de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}^+$ et la stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.
   La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. a) La double inégalité évidente : $\quad \forall t \in \mathbb{R}^+,\ t^2 \leqslant t^2+1 \leqslant t^2+2t+1$ donne, toujours par stricte croissance de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}^+$, puis par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:
   $$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \sqrt{t^2} \leqslant \sqrt{t^2+1} \leqslant \sqrt{t^2+2t+1} \iff t \leqslant \sqrt{t^2+1} \leqslant t+1 \iff \frac{1}{t} \geqslant \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \geqslant \frac{1}{t+1}$$
   Les fonctions concernées par cette dernière double inégalité sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, et $x < 2x$ lorsque $x > 0$, donc par croissance de l'intégrale :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \int_x^{2x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t \iff \Big[\ln(t)\Big]_x^{2x} \geqslant f(x) \geqslant \Big[\ln(t+1)\Big]_x^{2x}$$
   $$\iff \ln(2x) - \ln(x) \geqslant f(x) \geqslant \ln(2x+1) - \ln(x+1) \iff \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)$$
   b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln(2x+1) - \ln(x+1) = \ln\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right) = \ln\left(\dfrac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)$.
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 2$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) = \ln(2)$ par continuité de $\ln$ en 2.
   Ainsi, l'encadrement obtenu en 4.a) et le théorème du même nom assurent que :
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(2)$$

c) L'imparité de f donne pour finir : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\ln(2)$. On a aussi $f(0) = 0$, d'où le tableau de variation complet de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$-\ln(2)$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $\ln(2)$

d) On a déjà vu que : $f(0) = 0$; la stricte croissance de f sur $\mathbb{R}$ assure alors que $x = 0$ est la seule solution de l'équation $f(x) = 0$.

5. a) Remarquons d'emblée qu'il est évident que : pour tout $x \geqslant 0$, $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ puisque $x \geqslant 0$ et $\sqrt{x^2+1} \geqslant 1 > 0$.

Pour tout $x < 0$:

$x^2 + 1 > x^2$ donc $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} \iff \sqrt{x^2+1} > |x| \iff \sqrt{x^2+1} > -x \iff x + \sqrt{x^2+1} > 0$, et cette inégalité est bien vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Au vu du résultat précédent, la fonction $h : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$; elle est également dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = \frac{1 + \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

c) La fonction h est ainsi une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$, et on en déduit une expression explicite de $f(x)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \Big[\ln(t + \sqrt{t^2+1})\Big]_x^{2x} = \ln(2x + \sqrt{4x^2+1}) - \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

6. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.

a) Pour tout réel x strictement positif :

$$x - f(x) = \int_x^{2x} 1 \mathrm{d}t - \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \mathrm{d}t = \int_x^{2x} \frac{\sqrt{t^2+1}-1}{\sqrt{t^2+1}} \mathrm{d}t$$

$$= \int_x^{2x} \frac{\sqrt{t^2+1}-1}{\sqrt{t^2+1}} \times \frac{\sqrt{t^2+1}+1}{\sqrt{t^2+1}+1} \mathrm{d}t \qquad \text{(quantité conjuguée)}$$

$$= \int_x^{2x} \frac{t^2+1-1}{\sqrt{t^2+1}(1+\sqrt{t^2+1})} \mathrm{d}t = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(1+\sqrt{t^2+1})} \mathrm{d}t$$

b) Pour tout réel $x > 0$, et pour tout $t \in [x; 2x]$: $\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(1+\sqrt{t^2+1})} \geqslant 0$;

par ailleurs, $\sqrt{t^2+1} \geqslant 1$ et $1 + \sqrt{t^2+1} \geqslant 2$ donc $\sqrt{t^2+1}(1+\sqrt{t^2+1}) \geqslant 2$,

donc $0 \leqslant \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(1+\sqrt{t^2+1})} \leqslant \dfrac{t^2}{2}$.

Les fonctions concernées par cette double inégalité sont continues sur $]0; +\infty[$, et $x < 2x$ lorsque $x > 0$, donc par positivité et croissance de l'intégrale :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leqslant \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(1+\sqrt{t^2+1})} \mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{t^2}{2} \mathrm{d}t \iff 0 \leqslant x - f(x) \leqslant \left[\frac{t^3}{6}\right]_x^{2x} \iff 0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{7}{6} x^3$$

c) De l'encadrement précédent, on déduit :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad 0 \geqslant f(x) - x \geqslant -\frac{7}{6}x^3 \iff x \geqslant f(x) \geqslant x - \frac{7}{6}x^3 \iff 1 \geqslant \frac{f(x)}{x} \geqslant 1 - \frac{7}{6}x^2$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 - \frac{7}{6}x^2 = 1 = \lim\limits_{x\to 0^+} 1$, alors d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{soit :} \quad f(x) \underset{0^+}{\sim} x$$

d) On utilise ici une dernière fois l'imparité de la fonction f sur $\mathbb{R}$: lorsque x tend vers 0^-, $-x$ tend vers 0^+ et :

$$f(-x) \underset{0^-}{\sim} -x \iff -f(x) \underset{0^-}{\sim} -x \iff f(x) \underset{0^-}{\sim} x$$

Exercice 3

1. Puisque $\theta > 0$, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, et $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ est une série géométrique de raison $\frac{\theta}{1+\theta} \in]0,1[$ puisque $0 < \theta < 1+\theta$. Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{1}{1+\theta}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k = \frac{1}{1+\theta} \times \frac{1}{1-\frac{\theta}{1+\theta}} = \frac{1}{1+\theta} \times (1+\theta) = 1$$

ce qui achève de prouver que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit bien une loi de probabilité.

On considère alors une variable X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = u_k$.

2. a) Soit $Y = X + 1$, alors : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y = k) = P(X + 1 = k) = P(X = k-1) = u_{k-1} = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{k-1}$$

Comme $\frac{1}{1+\theta} = 1 - \frac{\theta}{1+\theta}$, on reconnaît la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{1+\theta}$, que suit donc Y.

D'après le cours, on a donc : $E(Y) = 1+\theta$ et $V(Y) = \frac{\theta}{1+\theta} \times (1+\theta)^2 = \theta(1+\theta)$.

Mais comme $X = Y - 1$, alors par linéarité de l'espérance et propriété de la variance :

$$E(X) = E(Y) - 1 = \theta \quad \text{et} \quad V(X) = V(Y) = \theta(1+\theta).$$

b) Il s'agit dans un premier temps de simuler la loi géométrique suivie par Y en programmant le temps d'attente d'un premier succès de probabilité $\frac{1}{1+\theta}$, et de rendre $X = Y - 1$.

```
function r = X(theta)
    Y=1
    while (rand()> 1/(1+theta))
        Y = Y+1
    end
r = Y-1
endfunction
```

3. Dans cette question, on souhaite estimer le paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance.
Pour ce faire, on considère un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et on introduit la fonction L, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*, \quad L(\theta) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k)$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ désignent des entiers naturels éléments de $X(\Omega)$.

a) D'après les propriétés du logarithme, et étant donné que les X_k suivent tous la même loi que X :

$$\begin{aligned}\ln(L(\theta)) &= \sum_{k=1}^{n} \ln(P(X_k = x_k)) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} -\ln(1+\theta) + x_k.[\ln(\theta) - \ln(1+\theta)] \\ &= -n\ln(1+\theta) + S_n.[\ln(\theta) - \ln(1+\theta)]\end{aligned}$$

b) On considère la fonction φ, définie par :

$$\forall \theta \in]0, +\infty[, \quad \varphi(\theta) = S_n. \ln(\theta) - (S_n + n). \ln(1+\theta)$$

On aura reconnu bien sûr que : $\forall \theta \in]0, +\infty[,\ \varphi(\theta) = \ln(L(\theta))$.
La fonction φ de la variable θ, est bien de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ comme somme de telles fonctions, et :

$$\forall \theta \in]0, +\infty[, \quad \varphi'(\theta) = \frac{S_n}{\theta} - \frac{S_n + n}{1+\theta} = \frac{S_n(1+\theta) - (S_n + n)\theta}{\theta(1+\theta)} = \frac{S_n - n\theta}{\theta(1+\theta}$$

Puisque $\theta > 0$, $\varphi'(\theta)$ est du signe du numérateur, or : $S_n - n\theta > 0 \iff \theta < \dfrac{S_n}{n}$.

On en déduit, en posant $\widehat{\theta_n}$, que la fonction φ est strictement croissante sur $]0, \widehat{\theta_n}]$, puis strictement décroissante sur $[\widehat{\theta_n}, +\infty[$: elle admet donc bien un maximum en $\widehat{\theta_n} = \dfrac{S_n}{n}$.

Ainsi :

$$\forall \theta \in]0, +\infty[,\ \varphi(\theta) \leqslant \varphi(\widehat{\theta_n}) \iff \forall \theta \in]0, +\infty[,\ \ln(L(\theta)) \leqslant \ln(L(\widehat{\theta_n})) \iff \forall \theta \in]0, +\infty[,\ L(\theta) \leqslant L(\widehat{\theta_n})$$

par stricte croissance de ln sur $]0, +\infty[$. On en déduit que $\widehat{\theta_n} = \dfrac{S_n}{n}$ est aussi le maximum de L sur $]0, +\infty[$.

On pose dorénavant : $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. La variable T_n est appelée **estimateur du maximum de vraisemblance** pour θ.

c) La moyenne empirique de l'échantillon, ici appelée T_n, est toujours un estimateur sans biais de l'espérance théorique ; par linéarité de l'espérance :

$$E(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X) = \theta$$

Donc T_n est bien un estimateur sans biais de θ.

d) Puisque T_n est un estimateur sans biais de θ, alors son risque quadratique est égal à sa variance :

$$\begin{aligned} r_{T_n}(\theta) = V(T_n) &= \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n V(X_k) \quad \text{par indépendance des } X_k \\ &= \frac{1}{n^2} \times nV(X) \quad \text{car les } X_k \text{ ont même loi que } X \\ &= \frac{\theta(1+\theta)}{n} \end{aligned}$$

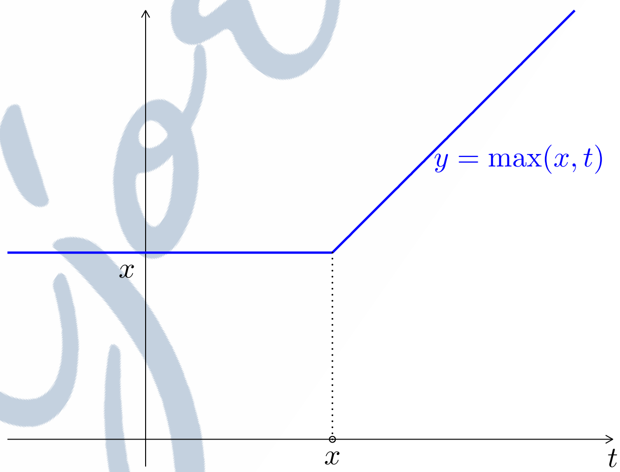
Il est alors évident que : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_{T_n}(\theta) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\theta(1+\theta)}{n} = 0$: l'estimateur T_n est convergent.

Problème

1. Soit x un réel quelconque.

a) Par définition du maximum de deux réels : $\forall t \in \mathbb{R},\ \max(x,t) = \begin{cases} x & \text{si } t < x \\ t & \text{si } t \geqslant x \end{cases}.$

Cette fonction est continue comme constante sur $]-\infty, x[$, et continue comme fonction affine sur $[x, +\infty[$.
$\lim\limits_{t\to x^-} \max(x,t) = \lim\limits_{t\to x^-} x = x$, et $\lim\limits_{t\to x^+} \max(x,t) = \lim\limits_{t\to x^+} t = x = \max(x,x)$, donc la fonction est également continue en $t = x$: finalement, cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$.
Il est ici très utile d'observer la représentation graphique de cette fonction, qui montre bien qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$:



On considère maintenant l'intégrale $y = \int_0^1 \max(x,t)\mathrm{d}t$.

b) On calcule les valeurs possibles de y dans les trois cas suggérés par l'énoncé :

- Si $x \leqslant 0$: pour tout réel t de $[0,1]$, $\max(x,t) = t$, donc $\int_0^1 \max(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^1 t\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.
- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, d'après la relation de Chasles :

$$y = \int_0^x x\mathrm{d}t + \int_x^1 t\mathrm{d}t = x \times (x-0) + \left[\frac{t^2}{2}\right]_x^1 = x^2 + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2+1}{2}$$

- Si $x > 1$: pour tout $t \in [0,1]$, $\max(x,t) = x$, donc $y = \displaystyle\int_0^1 x \, \mathrm{d}t = x$.

Dans la suite de ce problème, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On admet que l'on définit une variable aléatoire Y, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, en posant $Y = \displaystyle\int_0^1 \max(X,t)\mathrm{d}t$, ce qui signifie que, pour tout ω de Ω, on a :

$$Y(\omega) = \int_0^1 \max\big(X(\omega), t\big)\mathrm{d}t$$

On note F_Y la fonction de répartition de Y, et on se propose dans la suite de déterminer la loi de Y connaissant celle de X.

2. On suppose dans cette question que X suit la loi géométrique : dans ce cas $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, ce qui signifie que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geqslant 1$, et alors : pour tout $t \in [0,1]$, $\max\big(X(\omega), t\big) = X(\omega)$, donc $Y(\omega) = X(\omega)$ d'après 1.b), c'est-à-dire que les variables aléatoires X et Y sont identiques dans ce cas.

3. On suppose, dans cette question, que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et que l'on a :

$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}$$

   a) Puisque $\big([X = -1], [X = 0], [X = 1]\big)$ forment un système complet d'événements, on a évidemment :

$$P(X = 0) = 1 - P(X = -1) - P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

   b) D'après 1.b) :

   - Pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = -1$ ou $X(\omega) = 0$, alors $Y(\omega) = \dfrac{1}{2}$.
   - Pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = 1$, alors $Y(\omega) = \dfrac{X(\omega)^2 + 1}{2} = 1$.

   On a donc bien $Y(\Omega) = \left\{\dfrac{1}{2}, 1\right\}$, et :

$$P(Y = \frac{1}{2}) = P(X = -1) + P(X = 0) = \frac{3}{4}, \quad P(Y = 1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}.$$

   c) La fonction **Scilab** suivante simule la variable aléatoire Y :

```
function y = simul()
    u = grand(1,1,'uin',1,4)
    if u == 4 then
        y = 1
    else
        y = 1/2
    end
endfunction
```

   En effet, u reçoit une valeur entière choisie parmi $\{1, 2, 3, 4\}$ avec équiprobabilité, donc vaut 4 avec la probabilité $\dfrac{1}{4} = P(Y = 1)$, auquel cas on peut considérer que $[Y = 1]$ est réalisé ; sinon, c'est l'événement contraire $[Y = \frac{1}{2}]$ qui l'est.

4. On suppose, dans cette question, que x suit la loi uniforme sur $[0, 1[$, avec $X(\Omega) = [0, 1[$.

a) D'après la première question : pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \in]0,1[$, on a $Y(\omega) = \dfrac{X(\omega)^2+1}{2}$.

Pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = 0$, $Y(\omega) = \dfrac{1}{2} = \dfrac{X(\omega)^2+1}{2}$, donc on a bien l'égalité de variables aléatoires $Y = \dfrac{X^2+1}{2}$.

b) Pour tout $\omega \in \Omega$, $0 \leqslant X(\omega) < 1 \iff \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{X(\omega)^2+1}{2} < 1 \iff \dfrac{1}{2} \leqslant Y(\omega) < 1$, et on a bien $Y(\Omega) = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

c) Pour tout réel x de $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$:

$$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P\Big(\frac{X^2+1}{2} \leqslant x\Big) = P(X^2 \leqslant 2x-1) = P(X \leqslant \sqrt{2x-1})$$

par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, et puisque X est à valeurs positives. Comme pour tout x de $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$, $0 \leqslant 2x-1 < 1$, la loi uniforme suivie par X donne bien :

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[, \quad F_Y(x) = \sqrt{2x-1}$$

d) On a par ailleurs, vu l'univers-image de Y : $F_Y(x) = 0$ pour tout $x < \dfrac{1}{2}$, et $F_Y(x) = 1$ pour tout $x \geqslant 1$.
La fonction F_Y est ainsi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$ et $]1, +\infty[$ comme fonction constante.
Elle est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\frac{1}{2}, 1[$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, sachant que : $\frac{1}{2} < x < 1 \iff 0 < 2x-1 < 1$. La fonction F_Y est donc continue sur chacun des intervalles.
Par ailleurs : $\displaystyle\lim_{x\to 1/2^+} F_Y(x) = \sqrt{2 \times \tfrac{1}{2} - 1} = 0 = \lim_{x\to 1/2^-} F_Y(x) = F_Y(\tfrac{1}{2})$,

et $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} F_Y(x) = \sqrt{2\times 1 - 1} = 1 = F_Y(1) = \lim_{x\to 1^+} F_Y(x)$, donc F_y est aussi continue en $\dfrac{1}{2}$ et 1.

Finalement, F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en $\dfrac{1}{2}$ et 1 : Y est bien une variable à densité.

e) La variable aléatoire $Y = \dfrac{X^2+1}{2}$ admet une espérance parce que X admet un moment d'ordre 2 ; d'après le cours sur la loi uniforme, et par linéarité de l'espérance :

$$E(Y) = \frac{E(X^2)+1}{2} = \frac{V(X)+E(X)^2+1}{2} = \frac{\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1+3+12}{12} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

f) La fonction `Scilab` suivante simule la variable aléatoire Y :

```
function y = simul2()
    u = rand()
    y = sqrt(2*u-1)
endfunction
```

5. On suppose, dans cette question, que X suit la loi normale centrée réduite. On rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et on note Φ la fonction de répartition de X.

a) Pour tout ω tel que $X(\omega) \leqslant 0$, $Y(\omega) = \dfrac{1}{2}$. Pour tout ω tel que $0 < X(\omega) \leqslant 1$, $Y(\omega) = \dfrac{X(\omega)^2+1}{2}$ appartient à $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$. Enfin, pour tout ω de Ω tel que $X(\omega) \geqslant 1$, $Y(\omega) = X(\omega) \in [1, +\infty[$.

La variable aléatoire Y a bien pour univers-image $Y(\Omega) = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

b) Comme on vient de le voir : $[Y = \frac{1}{2}] = [X \leqslant 0]$, donc $P\Big(Y = \frac{1}{2}\Big) = P(X \leqslant 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$ d'après les propriétés de la loi normale centrée réduite.

c) Soit x un réel quelconque ; d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $\big([X \leqslant 0], [0 < X \leqslant 1], [X > 1]\big)$:

$$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P\big([X \leqslant 0] \cap [Y \leqslant x]\big) + P\big([0 < X \leqslant 1] \cap [Y \leqslant x]\big) + P\big([X > 1] \cap [Y \leqslant x]\big)$$

On distingue alors les trois cas suggérés par l'énoncé :

- Si $x < \frac{1}{2}$: on sait que $Y(\Omega) = \Big[\frac{1}{2}, +\infty\Big[$, donc sans calcul, $F_Y(x) = 0$.
- Si $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$:
  $P\big([X \leqslant 0] \cap [Y \leqslant x]\big) = P\big([Y = \frac{1}{2}] \cap [Y \leqslant x]\big) = P(Y = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

  $$\begin{aligned} P\big([0 < X \leqslant 1] \cap [Y \leqslant x]\big) &= P\Big([0 < X \leqslant 1] \cap \big[\frac{X^2+1}{2} \leqslant x\big]\Big) = P\big([0 < X \leqslant 1] \cap [X \leqslant \sqrt{2x-1}]\big) \\ &= P(0 < X \leqslant \sqrt{2x-1}) = \Phi(\sqrt{2x-1}) - \Phi(0) = \Phi(\sqrt{2x-1}) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  $P\big([X > 1] \cap [Y \leqslant x]\big) = P\big([X > 1] \cap [X \leqslant x]\big) = P(\varnothing) = 0$, donc :

  $$\text{Si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \quad F_Y(x) = \frac{1}{2} + \Phi(\sqrt{2x-1}) - \frac{1}{2} = \Phi(\sqrt{2x-1})$$

- Si $x > 1$:
  $P\big([X \leqslant 0] \cap [Y \leqslant x]\big) = P\big([Y = \frac{1}{2}] \cap [Y \leqslant x]\big) = P(Y = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

  $$\begin{aligned} P\big([0 < X \leqslant 1] \cap [Y \leqslant x]\big) &= P\big([0 < X \leqslant 1] \cap [X \leqslant \sqrt{2x-1}]\big) \\ &= P(0 < X \leqslant 1) = \Phi(1) - \Phi(0) = \Phi(1) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  $P\big([X > 1] \cap [Y \leqslant x]\big) = P\big([Y > 1] \cap [Y \leqslant x]\big) = P(1 < X \leqslant x) = \Phi(x) - \Phi(1)$, donc :

  $$F_Y(x) = \frac{1}{2} + \Phi(1) - \frac{1}{2} + \Phi(x) - \Phi(1) = \Phi(x)$$

On a bien démontré que pour tout réel x : $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \Phi(\sqrt{2x-1}) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \\ \Phi(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

d) La variable aléatoire Y n'est certainement pas discrète, puisque son univers-image $\Big[\frac{1}{2}, +\infty\Big[$ est un intervalle.

Par ailleurs : le simple fait que $P(Y = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \neq 0$ assure que Y n'est pas non plus une variable à densité (on devrait alors avoir $P(Y = \frac{1}{2}) = 0$).