MATHÉMATIQUES - EML S 2020

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

PROBLÈME 1

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n la fonction polynômiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!}.$$

PARTIE A : Étude de la suite des racines des polynômes de P_n

1. a) Les limites de la fonction polynômiale P_n en $+\infty$ et $-\infty$ sont les mêmes que celles de son terme dominant, qui est $\dfrac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

   L'exposant $2n+1$ étant impair : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2n+1} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = +\infty = \lim\limits_{x\to-\infty} P_n(x)$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} P_n(x)$.

   b) En tant que fonction polynôme, P_n est continue sur $\mathbb{R}$. Les limites de P_n obtenues prouvent que cette fonction change de signe : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on peut en déduire que l'équation $P_n(x) = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que le polynôme P_n admet au moins une racine réelle.

2. a) La fonction polynômiale P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et comme la dérivée d'une somme est la somme des dérivées, en tenant compte du fait que le terme pour $k = 0$ est constant, donc de dérivée nulle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n'(x) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{-k(-x)^{k-1}}{k!} = -\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-x)^{k-1}}{(k-1)!} = -\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} = -\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!} + \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$= -P_n(x) - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

   b) On sait d'après le cours, qu'un réel α est racine multiple (au moins double) de P_n si et seulement si α est racine commune à P_n et P_n'.
   Or, d'après la relation précédente :

$$P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = 0 \Longrightarrow -\frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \Longrightarrow \alpha^{2n+1} = 0 \Longrightarrow \alpha = 0,$$

   ce qui signifie que $\alpha = 0$ est la seule racine multiple possible de P_n. Mais P_n a pour terme constant $\dfrac{(-x)^0}{0!} = 1$, donc $P_n(0) = 1$: le réel 0 n'est même pas racine de P_n, et on en conclut que P_n n'admet aucune racine multiple, c'est-à-dire que toutes ses racines sont simples.

3. a) Le polynôme P_n possède un nombre pair de termes, qu'on peut regrouper deux à deux :

$$P_n(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

les termes de degrés pairs ont un coefficient positif, il est négatif pour ceux de degrés impair

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x^{2k}}{(2k)!} - \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \cdot \left(1 - \frac{x}{2k+1} \right) \quad \text{car} \quad \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x^{2k} \times x}{(2k)! \times (2k+1)}$$

b) De la relation précédente, on déduit :

$P_n(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} \cdot \left(1 - \frac{1}{2k+1} \right) > 0$ puisque $\dfrac{1}{(2k)!} > 0$ et $1 - \dfrac{1}{2k+1} \geqslant 0$ pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, le terme est même strictement positif dès que $k \geqslant 1$.
On a donc additionné des termes tous positifs comme produits de facteurs qui le sont.

Plus généralement d'ailleurs, pour tout $x < 1$: $\dfrac{x^{2k}}{(2k)!} \leqslant 0$ (inégalité stricte dès que $x \neq 0$) et $1 - \dfrac{x}{2k+1} > 0$, donc $P_n(x) > 0$.

D'autre part : $\quad P_n(2n+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+1)^{2k}}{(2k)!} \cdot \left(1 - \frac{2n+1}{2k+1} \right) < 0$ car cette fois $\dfrac{(2n+1)^{2k}}{(2k)!} > 0$,

et $2k+1 \leqslant 2n+1 \iff \dfrac{2n+1}{2k+1} \geqslant 1 \iff 1 - \dfrac{2n+1}{2k+1} \leqslant 0$ pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, l'inégalité étant même stricte tant que $k < n$.
On a donc additionné des termes tous négatifs comme produits de facteurs de signes opposés.
De même et plus généralement, pour tout $x > 2n+1$, $P_n(x) < 0$.

On en déduit que la fonction P_n ne s'annule ni sur $]-\infty\,;1]$, ni sur $[2n+1\,;+\infty[$ puisqu'elle garde un signe constant sur chacun de ces deux intervalle. Les racines réelles de P_n appartiennent donc nécessairement à l'intervalle $[1\,;2n+1]$.

4. a) En reprenant le même principe de calcul qu'à la question 2.a), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad P'_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{2(n+1)+1} \frac{-k(-x)^{k-1}}{k!} = -\sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-x)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= -\sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-x)^k}{k!} = -\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!} - \frac{(-x)^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$= -P_n(x) - \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

En dérivant une deuxième fois, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad P''_{n+1}(x) = -P'_n(x) - \frac{(2n+2)x^{2n+1}}{(2n+2)!} = P_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = P_n(x).$$

b) Montrons alors par récurrence sur n que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_0(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \frac{(-x)^k}{k!} = 1 - x$ est bien une fonction affine strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, qui s'annule une seule fois en $u_0 = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

Vue l'hypothèse de récurrence : P_n strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et s'annulant en u_n, est donc positive sur $]-\infty\,;u_n]$ et négative sur $[u_n\,;+\infty[$. Comme cette fonction est aussi P''_{n+1}, on en déduit que P'_{n+1} est strictement croissante sur $]-\infty\,;u_n]$ et strictement décroissante sur $[u_n\,;+\infty[$.

La fonction admet donc un maximum en $x = u_n$, qui vaut : $P'_{n+1}(u_n) = -\underbrace{P_n(u_n)}_{=0} - \dfrac{(u_n)^{2n+2}}{(2n+2)!} < 0.$

On en déduit que la fonction P_{n+1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. On sait aussi que cette fonction s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$: cette racine est unique, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

5. a) La fonction `Scilab` suivante calcule la somme définissant $P_n(x)$: on propose deux versions, l'une avec une boucle `for`, et l'autre par opérations termes à termes sur les vecteurs.

```
function y = P(n,x)
    y = 0
    for k = 0:(2*n+1)
        y = y + (-x)^k/factorial(k)
    end
endfunction
```

Deuxième version :

```
function y = P(n,x)
    K = [0:(2*n+1)]
    V = (-x).^K ./ factorial(K)
    y = sum(V)
endfunction
```

b) La fonction suivante prend en argument un entier n de $\mathbb{N}$, et renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près par dichotomie.

```
function u = suite(n)
    a = 1
    b = 2*n+1
    c = (a+b)/2
    while b-a > 1e-3
        if P(n,c) > 0 then
            a = c
        else
            b = c
        end
        c = (a+b)/2
    end
    u = c
endfunction
```

c) On utilise la fonction précédente pour représenter les premiers termes de la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Au vu du graphique, il semble que $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite proche de $0,6$ donc on conjecture l'équivalence : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\cdot n$, avec $\alpha \approx 0,6$.

6. a) La relation de récurrence déjà constatée : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} - \dfrac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$ donne, quand on l'évalue en $x = u_n$:

$$P_{n+1}(u_n) = \underbrace{P_n(u_n)}_{=0} + \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} - \frac{u_n^{2n+3}}{(2n+3)!} = \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \left(1 - \frac{u_n}{2n+3}\right).$$

b) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant 2n+1$ doncx $\dfrac{u_n}{2n+3} < 1 \iff 1 - \dfrac{u_n}{2n+3}$, donc $P_{n+1}(u_n) > 0$. Comme par ailleurs, $P_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ et puisque P_{n+1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1}(u_n) > P_{n+1}(u_{n+1}) \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1},$$

ce qui démontre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante.

7. On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite ℓ.

a) On cherche à appliquer ici l'inégalité des accroissements finis. Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction P_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |P_n'(x)| = \left| -\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} \right| \leqslant \sum_{k=0}^{2n} \frac{|x|^k}{k!} \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire.}$$

Comme la suite (u_n) converge en croissant vers ℓ, alors $1 \leqslant u_n \leqslant \ell$ et pour tout $x \in [u_n\,;\ell]$:

$$|P_n'(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{2n} \frac{\ell^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\ell^k}{k!} = e^{\ell}.$$

L'inégalité des accroissements finis donne donc, en effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |P_n(u_n) - P_n(\ell)| \leqslant e^{\ell}|u_n - \ell|.$$

b) Comme le montre déjà un peu ce qui précède : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n(\ell) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-\ell)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\ell)^k}{k!} = e^{-\ell}$.

L'inégalité précédente se réécrit : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(\ell) - e^{\ell}|u_n - \ell| \leqslant P_n(u_n) \leqslant P_n(\ell) + e^{\ell}|u_n - \ell|$, où :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n(\ell) - e^{\ell}|u_n - \ell| = e^{-\ell} = \lim_{n\to+\infty} P_n(\ell) + e^{\ell}|u_n - \ell|$, donc par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n(u_n) = e^{-\ell}$.

c) Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(u_n) = 0$, donc cette suite constante nulle ne peut pas converger vers $e^{-\ell} > 0$! On en déduit qu'il est absurde de supposer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

8. Comme la suite est croissante, le théorème de limite monotone assure alors que :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge et } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

PARTIE B : Quelques résultats intermédiaires

9. On note f la fonction définie sur $]0\,;1]$ par : $\forall t \in]0\,;1],\ f(t) = -\ln(t)$.

a) Soit $\varepsilon \in]0\,;1[$: $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1} f(t)\mathrm{d}t = \Big[-t\ln(t) + t \Big]_{\varepsilon}^{1} = -0 + 1 + \varepsilon\ln(\varepsilon) - \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1$ par croissances comparées. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout k de $[\![1\,;n-1]\!]$, la fonction ln est strictement croissante sur $\left[\frac{k}{n}\,;\frac{k+1}{n}\right]$, donc f est strictement décroissante, et par ailleurs continue, sur cet intervalle de longueur $\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}=\frac{1}{n}$.

L'inégalité de la moyenne donne donc : $\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k+1}{n}\right)\leqslant\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\mathrm{d}t\leqslant\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

Par sommation de la double inégalité pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\iff\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}f(1)$$

d'après la relation de Chasles pour les intégrales et par compensation du terme manquant dans la somme à droite. Comme $f(1)=0$ et $\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{1}{n}\right)=-\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{\ln(n)}{n}$, on obtient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{\ln(n)}{n}\leqslant\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\iff\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(t)\mathrm{d}t+\frac{\ln(n)}{n}.$$

c) Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n}=0$ par croissances comparées, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}f(t)\mathrm{d}t=1$, donc par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=1\iff\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)=-1.$$

d) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}=\exp\left(\frac{1}{n}\ln(n!)-\ln(n)\right)=\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(\ln(k)-\ln(n)\big)\right)=\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right),$$

donc d'après le résultat précédent et la continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}=e^{-1}.$$

10. On note g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $\quad\forall t\in]0\,;+\infty[,\ g(t)=t+\ln(t)+1$.
La fonction g est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont, donc d'après le théorème éponyme, elle réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$ dans son intervalle image $]\displaystyle\lim_{t\to0^+}g(t)\,;\lim_{t\to+\infty}g(t)[=]-\infty\,;+\infty[$. :
L'équation $g(t)=0$ admet donc une unique solution réelle α.
De plus : $g(e^{-2})=e^{-2}-2+1=e^{-2}+1<0$, tandis que $g(e^{-1}=e^{-1}-1+1=e^{-1}>0$, donc la stricte croissance de g sur $\mathbb{R}_+^*$ permet d'écrire :

$$g(e^{-2})<g(\alpha)<g(e^{-1})\iff e^{-2}<\alpha<e^{-1}.$$

PARTIE C : Équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

11. a) On applique ici la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégrale ; la fonction $h: x \mapsto e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et : $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ h^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$.
La formule de Taylor-Lagrange avec reste intégrale au rang $2n$ et au point $x_0 = 0$ donne alors :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) &= \sum_{k=0}^{2n} h^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} h^{(2n+1)}(t)\mathrm{d}t \\ \iff e^{-x} &= \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\underbrace{(-1)^{2n+1}}_{=-1} e^{-t}\mathrm{d}t \\ \iff e^{-x} &= \sum_{k=0}^{2n}\frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}e^{-t}\mathrm{d}t, \quad \text{CQFD.}\end{aligned}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\forall t \in [0\,;x],\ -t \leqslant 0 \Longrightarrow 0 < e^{-t} \leqslant 1$ et $0 \leqslant x - t \leqslant x$, donc $0 \leqslant \dfrac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}e^{-t} \leqslant \dfrac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}$. Les fonctions concernées sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et $0 \leqslant x$, donc par croissance et positivité de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}e^{-t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]_0^x = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

c) D'après ce qui précède : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} & 0 \geqslant -\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}e^{-t}\mathrm{d}t \geqslant -\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \iff & \sum_{k=0}^{2n}\frac{(-x)^k}{k!} \geqslant \sum_{k=0}^{2n}\frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}e^{-t}\mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=0}^{2n}\frac{(-x)^k}{k!} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \iff & P_n(x) - \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \geqslant e^{-x} \geqslant \sum_{k=0}^{2n}\frac{(-x)^k}{k!} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-x)^k}{k!} \\ \iff & P_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \geqslant e^{-x} \geqslant P_n(x).\end{aligned}$$

12. Soit n un entier de $\mathbb{N}$.

a) Si on évalue l'inégalité de droite obtenue à la question précédente en $x = u_n$ qui est bien un réel positif, et sachant que $P_n(u_n) = 0$, on obtient bien : $e^{-u_n} \leqslant \dfrac{(u_n)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
L'inégalité de gauche obtenue à la question précédente est vraie pour tout entier naturel, donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ P_{n+1}(x) \leqslant e^{-x}$, et à nouveau en évaluant en $x = u_n \in \mathbb{R}_+$, on a : $P_{n+1}(u_n) \leqslant e^{-u_n}$, d'où la double inégalité demandée.

b) D'après 3.b), $1 \leqslant u_n \leqslant 2n+1$ donc $(u_n)^{2n+1} \leqslant (2n+1)\cdot(u_n)^{2n} \Longrightarrow \dfrac{(u_n)^{2n+1}}{(2n+1)!} \leqslant \dfrac{(2n+1)\cdot(u_n)^{2n}}{(2n+1)!}$, soit $\dfrac{(u_n)^{2n+1}}{(2n+1)!} \leqslant \dfrac{(u_n)^{2n}}{(2n)!}$. Par transitivité de l'inégalité, on a bien montré que $e^{-u_n} \leqslant \dfrac{(u_n)^{2n}}{(2n)!}$.
Ensuite, d'après 6.a) : $P_{n+1}(u_n) = \dfrac{(u_n)^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\left(1 - \dfrac{u_n}{2n+3}\right) = \dfrac{(u_n)^{2n}}{(2n+3)!}\cdot(u_n)^2\cdot(2n+3-u_n)$, où : $2n+1 \geqslant u_n \geqslant 1 \Longrightarrow (u_n)^2 \geqslant 1$ et $2n+3-u_n \geqslant 2$, donc $(u_n)^2\cdot(2n+3-u_n) \geqslant 2$,

et donc $P_{n+1}(u_n) \geqslant \dfrac{2(u_n)^2}{(2n+3)!}$. On dispose donc de l'encadrement :

$$\frac{2(u_n)^{2n}}{(2n+3)!} \leqslant e^{-u_n} \leqslant \frac{(u_n)^{2n}}{(2n)!} \Longrightarrow \frac{(2n+3)!}{2(u_n)^{2n}} \geqslant e^{u_n} \geqslant \frac{(2n)!}{(u_n)^{2n}} \quad \text{par décroissance de l'inverse sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\Longrightarrow \frac{(2n+3)!}{2} \geqslant (u_n)^{2n} e^{u_n} \geqslant (2n)! \quad \text{puisque } (u_n)^{2n} > 0, \quad \text{CQFD.}$$

13. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad w_n = \dfrac{u_n}{2n}$.

a) En divisant chaque membre de la double inégalité précédente par $(2n)^{2n} > 0$, on obtient :

$$\frac{(2n)!}{(2n)^{2n}} \leqslant \left(\frac{u_n}{2n}\right)^{2n} e^{u_n} \leqslant \frac{(2n+3)!}{2} = \frac{(2n)! \cdot (2n+1)(2n+2)(2n+3)}{2} \leqslant \frac{(2n+3)^3}{2} \cdot (2n)!$$

Par transitivité de l'inégalité, et par croissance de la fonction puissance $x \mapsto x^{\frac{1}{2n}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$\frac{\left((2n)!\right)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \leqslant \frac{u_n}{2n}\left(e^{u_n}\right)^{\frac{1}{2n}} = w_n e^{\frac{u_n}{2n}} = w_n e^{w_n} \leqslant \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \frac{\left((2n)!\right)^{\frac{1}{2n}}}{2n}.$$

b) D'après 9.d) : $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\left((2n)!\right)^{\frac{1}{2n}}}{2n} = e^{-1}$.

Ensuite : $\displaystyle \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} = \exp\left(\frac{1}{2n} \cdot \left(3\ln(2n+3) - \ln(2)\right)\right) = \exp\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\ln(2n+3)}{n} - \frac{\ln(2)}{2n}\right)$,

où : $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2n+3)}{n} = 0$ par croissances comparées, et $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{2n} = 0$,

donc $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\ln(2n+3)}{n} - \frac{\ln(2)}{2n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} = 1$.

Le théorème d'encadrement s'applique donc avec le résultat de la question précédente, et donne :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n e^{w_n} = e^{-1} \iff \lim_{n\to+\infty} \ln(w_n) + w_n = -1 \iff \lim_{n\to+\infty} w_n + \ln(w_n) + 1 = \lim_{n\to+\infty} g(w_n) = 0,$$

par continuité de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a vu à la question 10. que g est bijective : sa réciproque g^{-1} est aussi continue (car g l'est), et on peut alors écrire pour conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} g(w_n) = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} w_n = g^{-1}(0) \iff \lim_{n\to+\infty} w_n = \alpha.$$

14. On vient donc de prouver que : $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{2n} = \alpha \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{2n\alpha} = 1$, ce qui donne l'équivalent suivant de u_n :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\alpha.$$

PROBLÈME 2

PARTIE A : Étude d'un produit scalaire

1. On commence par une question très classique en ECS, qu'il faut soigneusement rédiger (il y a plusieurs possibilités). Soit P un polynôme quelconque non nul de $\mathbb{R}[X]$: il possède un terme dominant $a_r X^r$, où a_r est un réel non nul et $r \in \mathbb{N}$ est le degré de P.
On sait qu'au voisinage de $+\infty$: $\quad P(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} a_r t^r \Longrightarrow t^2|P(t)|e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\sim} |a_r|t^{r+2}e^{-t}$.

Par croissances comparées : $\lim\limits_{t\to+\infty} |a_r|t^{r+2}e^{-t} = 0$, donc $|a_r|t^r e^{-t} = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, et $|P(t)|e^{-t} = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Toute fonction polynômiale est continue sur $\mathbb{R}$, et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge puisque $2 > 1$: d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} |P(t)|e^{-t}\mathrm{d}t$ converge.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc converge et par continuité de $t \mapsto P(t)e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^1 P(t)e^{-t}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ converge pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$.

2. Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t$.

   a) Soit $A > 0$; on réalise une intégration par parties dans $\displaystyle\int_0^A t^{k+1}e^{-t}\mathrm{d}t$, en posant :

$$u(t) = t^{k+1} \longrightarrow u'(t) = (k+1)t^k$$
$$v(t) = e^{-t} \longrightarrow v(t) = -e^{-t}$$

   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$, donc par intégration par parties :

$$\int_0^A t^{k+1}e^{-t}\mathrm{d}t = \Big[-t^{k+1}e^{-t}\Big]_0^A + (k+1)\int_0^A t^k e^{-t}\mathrm{d}t = -A^{k+1}e^{-A} + (k+1)\int_0^A t^k e^{-t}\mathrm{d}t.$$

   Les intégrales I_k et I_{k+1} d'après 1., et $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{k+1}e^{-A} = 0$ par croissances comparées, donc par passage à la limite dans l'égalité qu'on vient d'obtenir, lorsque A tend vers $+\infty$ on obtient :

$$I_{k+1} = (k+1)I_k.$$

   b) La rédaction la plus rigoureuse ici est la récurrence ; pour $k \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(k)$: "$I_k = k!$".

   $\boxed{\text{I.}}$ Pour $k = 0$: $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^0 e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty}\Big[-e^{-t}\Big]_0^A = \lim_{A\to+\infty} -e^{-A} + 1 = 1 = 0!$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   $\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(k+1)$ est encore vraie.

   On a supposé (H.R.) que $I_k = k!$, donc d'après la relation précédemment obtenue :

$$I_{k+1} = (k+1)I_k = (k+1)\times k! = (k+1)! \quad \text{donc } \mathcal{P}(k+1) \text{ est vraie si } \mathcal{P}(k) \text{ l'est.}$$

   $\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

3. D'après 1., on sait que pour tout couple (P,Q) de $\mathbb{R}[X]^2$, $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ est bien définie puisque PQ est un polynôme.
   - Le produit réel est commutatif, donc pour tout $(P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2$:

   $$\langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \langle Q,P\rangle.$$

   On a démontré la symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
   - Pour tout $(P,Q,R)\in\mathbb{R}[X]^3$ et pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$:

   $$\begin{aligned}\langle \lambda P+Q,R\rangle &= \int_0^{+\infty}\big(\lambda P(t)+Q(t)\big)R(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\big(\lambda P(t)R(t)e^{-t}+Q(t)R(t)e^{-t}\big)\mathrm{d}t\\ &= \lambda\int_0^{+\infty}P(t)R(t)e^{-t}\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty}Q(t)R(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \lambda\langle P,R\rangle+\langle Q,R\rangle\end{aligned}$$

   par linéarité de l'intégrale, toutes les intégrales impropres étant convergentes. On a démontré la linéarité à gauche de $\langle\cdot,\cdot\rangle$: grâce à la symétrique, cette forme est bilinéaire.
   - Enfin, pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$: $\langle P,P\rangle = \int_0^{+\infty}\big(P(t)\big)^2e^{-t}\mathrm{d}t$ est l'intégrale d'une fonction continue, positive sur $[0\,;+\infty[$.
   Par conséquent : $\langle P,P\rangle = 0 \Longrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ \big(P(t)\big)^2e^{-t}=0 \Longrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ P(t)=0 \Longrightarrow P=0_{\mathbb{R}[X]}$ (puisque $e^{-t}>0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$).

   On a bien démontré les trois points qui font de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

4. Pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$: $\langle X^i,X^j\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{i+j}e^{-t}\mathrm{d}t = I_{i+j} = (i+j)!$, et $||X^i|| = \sqrt{\langle X^i,X^i\rangle} = \sqrt{(2i)!}$.

L'énoncé admettait qu'il existe une unique suite de polynômes $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :
- pour tout k de $\mathbb{N}$, le polynôme Q_k est de degré k et de coefficient dominant strictement positif,
- pour tout k de $\mathbb{N}$, la famille $(Q_0,Q_1,\ldots,Q_k)$ est une famille orthonormale.

5. a) Le polynôme Q_0 est de degré 0 donc constant, de la forme $Q_0=a_0$ avec $a_0>0$ et il doit être de norme 1 : $||a_0|| = a_0||X^0|| = a_0$, donc $Q_0=1$.

   Le polynôme Q_1 est de degré 1, de la forme : $Q_1 = aX+b$, avec $a>0$. On veut que Q_1 soit orthogonal à Q_0 et de norme 1, donc :

   $$\langle Q_1,Q_0\rangle = 0 \iff a\langle X^1,X^0\rangle + b\langle X^0,X^0\rangle = 0 \iff a+b=0 \iff b=-a$$

   $$\text{et } \langle Q_1,Q_1\rangle = 1 \iff a^2\langle X^1,X^1\rangle + 2ab\langle X^1,X^0\rangle + b^2\langle X^0,X^0\rangle = 1 \iff 2a^2-2a^2+a^2=1$$

   $$\text{donc } a^2=1 \iff a=1 \text{ puisque } a>0,\ \text{et } b=-1,\ \text{soit } Q_1 = X-1$$

   De la même façon, on cherche enfin Q_2, de degré 2 donc de la forme $Q_2 = aX^2+bX+c$, avec $a>0$, tel que :

   $$\langle Q_2,Q_0\rangle = 0 \iff a\langle X^2,X^0\rangle + b\langle X^1,X^0\rangle + c\langle X^0,X^0\rangle = 0 \iff 2a+b+c=0,$$

   $$\begin{aligned}\text{puis } \langle Q_2,Q_1\rangle = 0 &\iff a\langle X^2,X^1\rangle - a\langle X^2,X^0\rangle + b\langle X^1,X^1\rangle - b\langle X^1,X^0\rangle + c\langle X^0,X^1\rangle - c\langle X^0,X^0\rangle = 0\\ &\iff 6a-2a+2b-b+c-c=0 \iff 4a+b=0\end{aligned}$$

   $$\begin{aligned}\text{et enfin } ||Q_2||=1 &\iff a^2\langle X^2,X^2\rangle + b^2\langle X^1,X^1\rangle + c^2\langle X^0,X^0\rangle +\\ &\qquad 2ab\langle X^2,X^1\rangle + 2ac\langle X^2,X^0\rangle + 2bc\langle X^1,X^0\rangle = 0\\ &\iff 24a^2+2b^2+c^2+12ab+4ac+2bc=0\end{aligned}$$

La deuxième équation donne $b=-4a$, et la première équation devient donc $-2a+c=0$, soit $c=2a$, donc la troisième équation se réécrit :

$$24a^2+32a^2+4a^2-48a^2+8a^2-16a^2=1 \iff 4a^2=1 \iff a=\frac{1}{2} \text{ puisque } a>0$$

On a donc $a=\dfrac{1}{2}$, donc $b=-4a=-2$ et $c=2a=1$, ce qui donne bien : $\quad Q_2=\dfrac{1}{2}X^2-2X+1.$

b) Soit $k\in\mathbb{N}$ quelconque : la famille $\mathcal{C}_k=(Q_0,\dots,Q_k)$ est par définition orthonormale, donc libre d'après le cours. Comme il s'agit d'une famille de $(k+1)$ vecteurs de $\mathbb{R}_k[X]$ qui est un espace vectoriel de dimension $(k+1)$, alors $\mathcal{C}_k$ est en fait bien une base de cet espace.

On définit la matrice $H_n=(h_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (i,j)\in[\![1\,;n+1]\!],\quad h_{i,j}=\langle X^{i-1},X^{j-1}\rangle.$$

On note également A_n la matrice de la famille $\mathcal{B}_n=(1,X,\dots,X^n)$ dans la base $\mathcal{C}_n$.

6. **Étude du cas $n=2$:**

a) Par définition : $\quad H_2=\begin{pmatrix}\langle X^0,X^0\rangle & \langle X^0,X^1\rangle & \langle X^0,X^2\rangle\\ \langle X^1,X^0\rangle & \langle X^1,X^1\rangle & \langle X^1,X^2\rangle\\ \langle X^2,X^0\rangle & \langle X^2,X^1\rangle & \langle X^2,X^2\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&6\\2&6&24\end{pmatrix}.$

L'énoncé donnant gracieusement l'inverse cherché, il suffit de vérifier que :

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&6\\2&6&24\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3&-3&\frac12\\-3&5&-1\\\frac12&-1&\frac14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-3+1 & -3+5-2 & \frac12-1+\frac12\\ 3-6+3 & -3+10-6 & \frac12-2+\frac32\\ 6-18+12 & -6+30-24 & 1-6+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

pour conclure que H_2 est effectivement inversible et a pour inverse $H_2^{-1}=\begin{pmatrix}3&-3&\frac12\\-3&5&-1\\\frac12&-1&\frac14\end{pmatrix}$.

b) La matrice A_2 est celle de la famille $\mathcal{B}_2=(X^0,X^1,X^2)$ dans la base $\mathcal{C}_2=(Q_0,Q_1,Q_2)$: on a déjà $X^0=Q_0$, puis $Q_1=X-1 \iff X=Q_1+1=Q_1+Q_0$, et enfin $Q_2=\dfrac{1}{2}X^2-2X+1$ donne $X^2=2Q_2+4X-2=2Q_2+4Q_1+2Q_0$, donc $A_2=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}X^0 & X^1 & X^2\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&4\\0&0&2\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\Q_0\\Q_1\\Q_2\end{array}$, et :

$${}^{\mathrm{t}}A_2A_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&4\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&6\\2&6&24\end{pmatrix};\quad \text{on remarque donc que } {}^{\mathrm{t}}A_2A_2=H_2.$$

7. On note, pour tout (i,j) de $[\![1\,;n+1]\!]^2$, $a_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de la matrice A_n.

a) La matrice A_n est celle de la base $\mathcal{B}_n$ dans l'autre base $\mathcal{C}_n$ de $\mathbb{R}_n[X]$: il s'agit donc d'une matrice de passage entre deux bases, et par conséquent A_n est inversible.

b) Par définition de la matrice A_n toujours : pour tout $j\in[\![1\,;n+1]\!]$, les coefficients $a_{k,j}$ de la j-ième colonne de A_n, sont les coordonnées de X^{j-1} dans la base $\mathcal{C}_n=(Q_0,Q_1,\dots,Q_n)$: on a donc en effet $X^{j-1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}a_{k,j}Q_{k-1}$, en tenant compte du décalage d'indice du fait que les lignes et colonnes de A_n sont numérotées à partir de l'indice 1.

Par conséquent, de part la bilinéarité du produit scalaire et vu que $\mathcal{C}_n$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$, alors pour tout $(i,j)\in[\![1\,;n+1]\!]^2$:

$$\langle X^{i-1},X^{j-1}\rangle=\langle\sum_{k=1}^{n+1}a_{k,i}Q_{k-1},\sum_{\ell=1}^{n+1}a_{\ell,j}Q_{\ell-1}\rangle=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{\ell=1}^{n+1}a_{k,i}a_{\ell,j}\langle Q_{k-1},Q_{\ell-1}\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} a_{k,i}a_{k,j}\langle Q_{k-1}, Q_{k-1}\rangle = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k,i}a_{k,j} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \langle Q_{i-1}, Q_{j-1}\rangle = 0 & \text{si } i \neq j \\ \langle Q_{k-1}, Q_{k-1}\rangle = 1 \end{cases}$$

c) Pour tout couple (i, j) de $[\![1\,;n+1]\!]^2$, le coefficient de la matrice H_n est par définition, égal à $\langle X^{i-1}, X^{j-1}\rangle$.

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_{k,i}a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n+1} ({}^{\mathrm{t}}A_n)_{i,k}a_{k,j}$ est, par définition du produit matriciel, le coefficient d'indices (i, j) du produit matriciel ${}^{\mathrm{t}}A_nA_n$.

L'égalité de ces coefficients prouve bien l'égalité de matrices $H_n = {}^{\mathrm{t}}A_nA_n$.

8. a) Comme A_n est inversible, sa transposée ${}^{\mathrm{t}}A_n$ l'est aussi, et par conséquent le produit ${}^{\mathrm{t}}A_nA_n = H_n$ est inversible.

b) Grâce aux propriétés de la transposée : ${}^{\mathrm{t}}H_n = {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}A_nA_n) = {}^{\mathrm{t}}A_n\,{}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}A_n) = {}^{\mathrm{t}}A_nA_n = H_n$, donc H_n est une matrice symétrique réelle. Le critère suffisant du cours permet d'affirmer sans calcul supplémentaire, que H_n est diagonalisable (et que ses valeurs propres sont toutes réelles).

c) Pour tout vecteur propre Y de composantes $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$, associé à une valeur propre réelle λ :

$${}^{\mathrm{t}}YH_nY = {}^{\mathrm{t}}Y(\lambda\cdot Y) = \lambda\cdot{}^{\mathrm{t}}YY = \lambda\sum_{i=0}^{n} y_i^2 \text{ et par ailleurs, } {}^{\mathrm{t}}Y\,{}^{\mathrm{t}}A_nA_nY = {}^{\mathrm{t}}(A_nY)A_nY = \sum_{i=0}^{n}(A_nY)_i^2,$$

donc puisque Y est non nul, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} y_i^2 > 0$ (l'un de ces carrés au moins est strictement positif),

et puisque A_n est inversible, A_nY est non nul et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(A_nY)_i^2 > 0$, donc $\lambda = \dfrac{\sum_{i=0}^{n}(A_nY)_i^2}{\sum_{i=0}^{n} y_i^2} > 0$,

donc les valeurs propres de H_n sont toutes strictement positives.

PARTIE B : Étude d'une projection

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On définit la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} \langle P, 1\rangle \\ \langle P, X\rangle \\ \vdots \\ \langle P, X^n\rangle \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

9. Soit R un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. On note $V = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées de R dans la base $\mathcal{B}_n$.

a) Par définition, on a donc $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\alpha_kX^k$, donc pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$, $\langle R, X^i\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\langle X^k, X^i\rangle$ par linéarité à gauche du produit scalaire.

b) Par définition du projeté orthogonal : R est le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $P - R$ est orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$, ce qui est le cas si et seulement si $P - R$ est orthogonal à tous les vecteurs d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En choisissant la base $\mathcal{B}_n$, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} R \text{ est le projeté orthogonal de } P \text{ sur } \mathbb{R}_n[X] &\iff \forall i \in [\![0\,;n]\!],\ \langle P - R, X^i\rangle = 0 \\ &\iff \forall i \in [\![0\,;n]\!],\ \langle P, X^i\rangle - \langle R, X^i\rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\iff \forall i \in [\![0\,;n]\!],\ \langle P, X^i\rangle = \langle R, X^i\rangle.$$

La relation obtenue en 9.a) s'écrit aussi : $\forall i \in [\![0\,;n]\!],\ \langle R, X^i\rangle = (H_nV)_i$, donc pour tout $i \in [\![0\,;n]\!],\ \langle P, X^i\rangle = (H_nV)_i \iff U_i = (H_nV)_i$.

On a donc, par égalité de tous leurs coefficients, l'égalité matricielle :

$$U = H_nV \iff V = H_n^{-1}U \quad \text{puisque } H_n \text{ est inversible.}$$

10. Retour au cas $n = 2$: avec $P = X^3$, $U = \begin{pmatrix}\langle X^3, 1\rangle \\ \langle X^3, X^1\rangle \\ \langle X^3, X^2\rangle\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\24\\120\end{pmatrix}$, donc grâce à la matrce H_2^{-1} obtenue en 6.a) :

$$V = H_2^{-1}U = \begin{pmatrix}3 & -3 & \frac{1}{2}\\ -3 & 5 & -1\\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\24\\120\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18-72+60\\ -18+120-120\\ 3-24+30\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-18\\9\end{pmatrix},$$

donc le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ est $R = 9X^2 - 18X + 6$.

11. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^3$ par : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\quad f(a,b,c) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (a + bt + ct^2 - t^3)^2 e^{-t}\mathrm{d}t$.

a) En développant le corps de l'intégrale, par linéarité de l'intégrale et grâce aux intégrales I_k qui convergent selon l'étude faite à la question 2. : pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= \int_0^{+\infty} (a^2 + b^2t^2 + c^2t^4 + t^6 + 2abt + 2act^2 - 2at^3 + 2bct^3 - 2bt^4 - 2ct^5)e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= a^2I_0 + b^2I_2 + c^2I_4 + I_6 + 2abI_1 + 2acI_2 - 2aI_3 + 2bcI_3 - 2bI_4 - 2cI_5 \\ &= a^2 + 2b^2 + 24c^2 + 2ab + 4ac + 12bc - 12a - 48b - 240c + 720. \end{aligned}$$

b) La fonction f est polynômiale en ses trois variables a, b, c donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. Tout point critique de f est solution du système :

$$\begin{cases}\partial_1(f)(a,b,c) &= 0\\ \partial_2(f)(a,b,c) &= 0\\ \partial_3(f)(a,b,c) &= 0\end{cases} \iff \begin{cases}2a + 2b + 4c - 12 &= 0\\ 4b + 2a + 12c - 48 &= 0\\ 48c + 4a + 12b - 240 &= 0\end{cases} \iff \begin{cases}a + b + 2c = 6\\ a + 2b + 6c = 24\\ a + 3b + 12c = 60\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}a + b + 2c = 6 & \\ b + 4c = 18 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\ 2b + 10c = 54 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1\end{cases} \iff \begin{cases}a + b + 2c = 6 & \\ b + 4c = 18 & \\ 2c = 18 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}c = 9\\ b = 18 - 4c = -18\\ a = 6 - b - 2c = 6\end{cases}.$$

La fonction f admet donc un unique point critique $(a_0, b_0, c_0) = (6, -18, 9)$, qui vérifie aussi :

$$H_2\begin{pmatrix}6\\-18\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6-18+18\\ 6-36+54\\ 12-108+216\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\24\\120\end{pmatrix}, \quad \text{CQFD.}$$

c) La Hessienne de f au point (a_0, b_0, c_0) est constituée des dérivées partielles d'ordre 2 en ce point :

$$\mathrm{Hess}_{(a_0,b_0,c_0)}(f) = \begin{pmatrix}\partial^2_{1,1}(f)(a_0,b_0,c_0) & \partial^2_{1,2}(f)(a_0,b_0,c_0) & \partial^2_{1,3}(f)(a_0,b_0,c_0)\\ \partial^2_{2,1}(f)(a_0,b_0,c_0) & \partial^2_{2,2}(f)(a_0,b_0,c_0) & \partial^2_{2,3}(f)(a_0,b_0,c_0)\\ \partial^2_{3,1}(f)(a_0,b_0,c_0) & \partial^2_{3,2}(f)(a_0,b_0,c_0) & \partial^2_{3,3}(f)(a_0,b_0,c_0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 12\\ 4 & 12 & 48\end{pmatrix},$$

qui est effectivement égale à $2H_2$.

d) On a vu en 8.c) que les valeurs propres de H_2 sont toutes strictement positives : comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$, on en déduit qu'au point critique (a_0, b_0, c_0), cette fonction admet un minimum local.

e) En reprenant l'expression initiale de f, on réalise que :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad f(a,b,c) = \int_0^{+\infty} (a + bt + ct^2 - t^3) e^{-t} \mathrm{d}t = ||a + bX + cX^2 - X^3||,$$

donc effectivement, $\inf\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} f(a,b,c) = \inf\limits_{R\in\mathbb{R}_2[X]} ||X^3 - R||^2$.

Or on sait que dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\inf\limits_{R\in\mathbb{R}_2[X]} ||X^3 - R||^2$ est atteint ($\mathbb{R}_2[X]$ étant un sous-espace vectoriel de dimension finie) en un unique polynôme R de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$. Il existe donc un unique triplet (a_1, b_1, c_1) de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$||X^3 - (a_1 + b_1 X + c_1 X^2)||^2 = \min_{R\in\mathbb{R}_2[X]} ||X^3 - R||^2 \iff f(a_1, b_1, c_1) = \min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} f(a,b,c).$$

On vient donc de prouver que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^3$. C'est donc aussi un minimum local, et comme il n'en existe qu'un seul, on en déduit que $(a_1, b_1, c_1) = (a_0, b_0, c_0)$ est l'unique point en lequel f atteint son minimum.

f) D'après ce qu'on vient de voir, le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$, qui minimise $||X^3 - R||^2$ pour $R \in \mathbb{R}_2[X]$, est $R(X) = a_0 + b_0 X + c_0 X^2 = 9X^2 - 18X + 6$, et on retrouve bien le résultat de la question 10.

★ ★ ★ FIN DU SUJET ★ ★ ★