MATHS II 2021 : Corrigé proposé par G. BIGNON

Partie I :

1_ a) Si $m = \max \{ k \mid \lambda_k \neq 0 \}$ (existe car non vide par hypothèse)

$\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_n P_n = \lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_m P_m$

Comme $\deg(P_m) > \deg(P_i)$, $i < m$

alors par identification, en notant q_m le coef dominant de P_m,
$\lambda_m . q_m = 0$ ie $\lambda_m = 0$ (car $P_m \neq 0$)

Ce qui est absurde donc la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre.

1_ b) $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de F_n ssi $d_n = n$

* En effet, si $d_n \neq n$, alors ou bien $d_n > n$, ce qui est impossible car $P_n \in F_n$

ou bien $d_n < n$, ce qui est impossible car dans ce cas, comme $\deg P_i \leq d_n$, on aurait $X^n \notin F_n$.

* Réciproquement, si $d_n = n$, alors $\forall i \in [\![0, n]\!]$ $\deg P_i \leq d_n \leq n$
donc $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille libre de F_n, qui

comporte $n+1$ éléments, et $n+1 = \dim F_n$.

2) a) $\boxed{\text{Racines}(V_n) = [\![0, n-1]\!]}$ pour $n \geq 1$; $\boxed{\text{Racines } V_0 = \emptyset}$

b) $\deg(V_i) = i$, donc d'après 1_b) $(V_0, \ldots, V_n)$ est une base de F_n.

c) $x^{\underline{n}} = \prod_{k=0}^{n-1} (x-k) = x^{n-1} - \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) x^{n-2} + Q(x)$

où $Q(x) \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. En effet, on développe ce produit, et le coefficient devant x^{n-2} est moins la somme des racines.

donc $\boxed{x^{\underline{n}} = x^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} + o(x^{n-2})}$.

3_a) $U_n \in F_n = \text{Vect}(V_0, \ldots, V_n)$ c'est une base donc

$\exists ! \, (\sigma(n,k))_{0 \leq k \leq n}$ / $V_n = \sum_{k=0}^{n} \sigma(n,k) V_k$

b) On évalue successivement en :

– en 0 : $U_n(0) = \sum_{k=0}^{n} \sigma(n,k) V_k(0)$, car 0 racine de V_k pour $k \geq 1$ et $V_0 = 1$

$U_n = X^n$

$n \geq 1$ ie $\boxed{0 = \sigma(n,0)}$

– en 1 : $V_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \sigma(n,k) V_k(1)$

ie $1 = \sigma(n,0) + \sigma(n,1)\, V_1(1)$
$= \sigma(n,1)$

car $V_k(1) = 0$ si $k \geq 2$. (2.a)
et $V_1(1) = \underline{1}$.

– Pour $\sigma(n,n)$, on identifie les coefficients dominants :
Coef dominant de $U_n = \underline{1}$
Coef dominant de $\sum \sigma(n,k) V_k$ } car $\deg V_k < n$ pour $k<n$
= coef dominant de $\sigma(n,n) V_n = \sigma(n,n)$.
Donc $\sigma(n,n) = 1$.

– On a vu que $U_n = x^{\underline{n}} = x^n - \dfrac{n(n-1)}{2} x^{n-1} + Q(x)$

où $\deg Q < n$ donc : $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sigma(n,k) V_k$

donc $x^{\underline{n}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \sigma(n,k) x^{\underline{k}} + \sigma(n,n-1)\, x^{\underline{n-1}} + x^{\underline{n}}$

donc, comme on a aussi $x^{\underline{n-1}} = x^{n-1} - K(x)$ où $\deg K < n-1$

Alors on obtient :
$$0 = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \sigma(n,k) x^{\underline{k}} - K(x) + Q(x)}_{\text{de degré } < n-1} + x^{n-1}\left(\sigma(n,n-1) - \frac{n(n-1)}{2}\right)$$

Donc $\sigma(n, n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ par identification.

– Pour $\sigma(n,2)$, on évalue en en 2 :

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \sigma(n,k)\, V_k(2)$$

ie $2^n = 1 \times V_1(2) + \sigma(n,2)\, V_2(2)$

ie $2^n = 2 + \sigma(n,2) \times 2$

ie $\sigma(n,2) = 2^{n-1} - 1$.

3 – c) $X \cdot X^n = \sum_{k=0}^{n} \sigma(n,k)\, X\, X^{\underline{k}}$ $X = X - k + k$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sigma(n,k)\, X(X-1)\dots(X-k+1)(X-k+k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sigma(n,k)\left[X(X-1)\dots(X-k+1)(X-k) + k X \dots (X-k+1)\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sigma(n,k)\left(X^{\underline{k+1}} + k X^{\underline{k}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \sigma(n,k+1)\, X^{\underline{k}} + \sum_{k=0}^{n} k\, \sigma(n,k)\, X^{\underline{k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\sigma(n,k+1) + k\,\sigma(n,k)\right) X^{\underline{k}} - n\,\sigma(n,n)\, X^{\underline{n}}$$

De plus $X^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \sigma(n+1, k) X^{\underline{k}}$

donc comme $(X^{\underline{0}}, \ldots, X^{\underline{n+1}})$ est une base, l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n+1} \sigma(n+1, k) X^{\underline{k}} = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\sigma(n, k-1) + k\sigma(n,k)\right) X^{\underline{k}} - n X^{\underline{1}}$$

entraîne par identification des coordonnées dans la base que $\forall k \in [\![1, n]\!]$:

$$\sigma(n+1, k) = \sigma(n, k-1) + k\,\sigma(n, k).$$

3_ d) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$H_n =$ " $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\sigma(n, k) \in \mathbb{Z}$ "

$n = 1$. $\sigma(1, 1) = 1 \in \mathbb{Z}$ $\sigma(1, 0) = 0 \in \mathbb{Z}$.
donc H_1 est vraie.

Hérédité : Supposons H_n vérifiée pour $n \geq 1$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$ $\sigma(n+1, k) = \underbrace{\sigma(n, k-1)}_{\in \mathbb{Z}} + k \underbrace{\sigma(n, k)}_{\in \mathbb{Z}}$

d'après H_n.

et $\sigma(n+1, n+1) = 1 \in \mathbb{Z}$, et $\sigma(n+1, 0) = 0 \in \mathbb{Z}$.

donc H_{n+1} est vraie.

Donc par récurrence H_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

3- e) S = ones(5, 5) // $S = (\sigma(n,k))_{\substack{1 \le n \le 5 \\ 1 \le k \le 5}}$

```
for n = 1 : 4
    for k = 2 : n    // (car σ(n,n) = 1)
        S(n+1,k) = S(n,k-1) + k*S(n,k)
    end
end

for n = 2 : 5
    Disp( S ( [n], [1,n] ) )
end
```

affiche pour chaque ligne n : $\sigma(n, 1), \ldots, \sigma(n,n)$

4-a) $X^{\underline{n}} \in F_n = \mathrm{Vect}(X^0, \dots, X^n)$ base donc

$\exists! \, (s(n,k))_{0 \le k \le n} \in \mathbb{R}^{n+1} \,/\, X^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n+1} s(n,k) X^k$.

4-b) On a $X^{\underline{n+1}} = \sum_{k=0}^{n+1} s(n+1,k) X^k$

et $X^{\underline{n+1}} = (X-n) X^{\underline{n}}$

$$= (X-n) \sum_{k=0}^{n} s(n,k) X^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} s(n,k-1) X^k - \sum_{k=0}^{n} s(n,k) . n X^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} [s(n,k-1) - n . s(n,k)] X^k + n s(n,n+1) X^{n+1}$$

donc par identifications des coordonées dans la base $(X^0, \dots, X^{n+1})$, on a

$\forall k \in [\![1,n]\!]$ $s(n+1,k) = s(n,k-1) - n . s(n,k)$.

Ainsi pour $n \geq 2$ $s(n,1) = s(n-1,0) - (n-1) s(n-1,1)$

On a besoin de $s(n,0)$, obtenu en évaluant 4-a) en $x=0$:

$0^{\underline{n}} = s(n,0)$ donc $s(n,0) = 0$ pour $n \geq 1$

Ainsi $s(n,1) = -(n-1) s(n-1,1)$

donc $\dfrac{f(n,1)}{f(n-1,1)} = -(n-1)$

donc par télescopage : $f(n,1) = \prod_{k=2}^{n} -(k-1) \cdot f(1,1)$

ie $f(n,1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

$\left(f(1,1) = 1 \text{ car } X^{\underline{1}} = X = 0 \cdot X^0 + 1 \cdot X^1 \right)$

4- c) On pose $\forall n \geq 1$ "$H_n = \forall k \in [\![1,n]\!] \quad |f(n,k)| = (-1)^{n+k} f(n,k)$"

$\underline{n = 1}$ $\quad f(1,1) = 1 = (-1)^{1+1} \times 1$.

<u>Hérédité</u> : On suppose H_n vraie pour $n \geq 1$.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$ $\quad f(n+1,k) = f(n,k-1) - n f(n,k)$

d'après H_n $\quad = (-1)^{n+k-1}|f(n,k-1)| - n(-1)^{n+k}|f(n,k)|$

$= (-1)^{n+k+1}\left[\underbrace{|f(n,k-1)| + n|f(n,k)|}_{\geq 0} \right]$

donc $f(n+1,k) = (-1)^{n+k+1}|f(n+1,k)|$

et $f(n+1,n+1) = 1 = (-1)^{n+1+n+1} = ((-1)^2)^{n+1} = 1$.

(en effet $\forall n$ $s(n,n)=1$ car X^n et X^n sont de coef dominant égaux à 1 donc $s(n,n) = 1$).

Donc H_{n+1} est vraie donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ H_n vraie

4. d) $\sigma(n,n)\, s(n,n) = 1 \times 1 = 1$.

et on écrit $x^n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\, x^k$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{k} s(n,k)\, \sigma(k,\ell)\, x^{\ell}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n} \left(\sum_{k=\ell}^{n} s(n,k) . \sigma(k,\ell) \right) x^{\ell}$$

donc par identification des coordonnées dans $(X^0, \ldots, X^n)$

$\forall \ell \in [\![0, n-1]\!]$ $\sum_{k=\ell}^{n} s(n,k) . \sigma(k,\ell) = 0.$

4_e) $s(n,n) = 1$ et pour $\ell = n-1$ $\sum_{k=n-1}^{n} s(n,k)\, \sigma(k,n-1) = 0$

ie $s(n,n-1)\, \sigma(n-1,n-1) + s(n,n)\, \sigma(n,n-1) = 0$

i.e. $\quad f(n,n-1)\times 1 + 1\times \frac{n(n-1)}{2} = 0$

Donc $\quad f(n,n-1) = \frac{-n(n-1)}{2}$.

5 a) $E(X) = \theta$ $\qquad V(X) = \theta$

$E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \theta + \theta^2$ Par Koenig.

b) - $X = X^{\underline{1}}$

- $X^{\underline{2}} = X(X-1) = X^2 - X = X^2 - X^{\underline{1}}$

donc $X^2 = X^{\underline{2}} + X^{\underline{1}}$

- $X^{\underline{3}} = X(X-1)(X-2) = X(X^2-3X+2) = X^3 - 3X^2 + 2X$

donc $X^3 = X^{\underline{3}} + 3(X^{\underline{2}} + X^{\underline{1}}) - 2X^{\underline{1}}$

$= X^{\underline{3}} + 3X^{\underline{2}} + X^{\underline{1}}$

- $X^{\underline{4}} = X(X-1)(X-2)(X-3) = (X^3 - 3X^2 + 2X)(X-3)$

$= X^4 - 3X^3 - 3X^3 + 9X^2 + 2X^2 - 6X$

$= X^4 - 6X^3 + 11X^2 - 6X$

donc

- $X^4 = X^{\underline{4}} + 6(X^{\underline{3}} + 3X^{\underline{2}} + X^{\underline{1}}) - 11(X^{\underline{2}} + X^{\underline{1}}) + 6X^{\underline{1}}$

$= X^{\underline{4}} + 6X^{\underline{3}} + 7X^{\underline{2}} - 11X^{\underline{1}}$.

5 - c) Soit $p \in \mathbb{N}$ $\quad E(X^p)$ existe ssi $\sum_{k \geq 0} k^p e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^k}{k!}$ CVA

or $\quad k^2 k^p \frac{\theta^k}{k!} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{k^{p+2}\,\theta^k}{k^{p+2} \times (k-(p+2))!} \underset{+\infty}{\sim} \theta^{p+2} \cdot \frac{\theta^{k-(p+2)}}{(k-(p+2))!}$

or $\dfrac{\theta^{k-(p+2)}}{(k-(p+2))!} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ (terme général d'une série exp)

donc $k^p \dfrac{\theta^k}{k!} = o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$

Donc par critère de Riemann $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k^p e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}$ CV

ie $E(X^p)$ existe, et ce $\forall p \in \mathbb{N}$.

6_ a) Soit $p \in \mathbb{N}$ $(X^{\underline{n}})^p = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} s(n,k) X^k\right)^p$

$$= \sum_{i=0}^{np} \lambda_i X^i \quad \text{où les } (\lambda_i)_{0\le i\le np} \in \mathbb{R}^{np}$$

donc d'après 5. c) et par linéarité de E,

$(X^{\underline{n}})^p$ admet une espérance, et ce $\forall p \in \mathbb{N}$.

6. b) Par transfert $E(X^{\underline{n}}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\theta} k^{\underline{n}} \frac{\theta^k}{k!}$

or $k^{\underline{n}} = \dfrac{k!}{(k-n)!}$ car $k \in \mathbb{N}$.

donc $E(X^{\underline{n}}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\theta} \frac{\theta^k}{(k-n)!} \underset{k-n=l}{=} \theta^n \sum_{l=0}^{+\infty} e^{-\theta} \frac{\theta^l}{l!}$

donc $E(X^{\underline{n}}) = \theta^n$.

6_c) $E(X^3) = E(X^{\underline{3}} + 3X^{\underline{2}} + X^{\underline{1}})$ linéarité de E

$= \theta^3 + 3\theta^2 + \theta$

de même :

$E(X^4) = \theta^4 + 6\theta^3 + 7\theta^2 - 11\theta$ d'après 5.b).

7_a) $\partial_1 g(\theta, k) = \dfrac{\partial_1 f(\theta, k)}{f(\theta, k)} = \dfrac{(k\theta^{k-1}e^{-\theta} - \theta^k e^{-\theta})/k!}{\theta^k e^{-\theta}/k!}$

$= \dfrac{k-\theta}{\theta} = \dfrac{k}{\theta} - 1$.

$\partial_1 g(\theta, X) = \dfrac{X}{\theta} - 1$.

7_ b) $XX^{\underline{n}} = X.X(X-1)\dots(X-n+1)$, $X = X-n+n$

$= X(X-1)\dots(X-n+1)(X-n+n)$, développe

$= X^{\underline{n+1}} + nX^{\underline{n}}$

$Cov(X, X^{\underline{n}}) = E(XX^{\underline{n}}) - E(X).E(X^{\underline{n}})$ par Koenig

$= E(X^{\underline{n+1}} + nX^{\underline{n}}) - \theta.\theta^n$

$= \theta^{n+1} + n\theta^n - \theta^{n+1} = n\theta^n$.

7_c) $Cov(\partial_1 g(\theta, X), X^{\underline{n}}) = Cov\left(\dfrac{X}{\theta} - 1, X^{\underline{n}}\right)$

$$= \frac{1}{\theta} \operatorname{Cov}(X, X^{n}) = n\theta^{n-1} \text{. d'après 2.b)}$$

On sait que $\operatorname{Cov}(f_{1g}(\theta, X), X^{n})^2 \leq V(f_{1g}(\theta, X)) \cdot V(X^{n})$

d'après Cauchy-Schwarz.

Donc $V(X^{n}) \geq (n\theta^{n-1})^2 / V\left(\frac{X}{\theta} - 1\right)$

car $V\left(\frac{X}{\theta} - 1\right) = \frac{1}{\theta^2} V(X) = \frac{\theta}{\theta^2} = \frac{1}{\theta}$.

ie $V(X^{n}) \geq n^2 \theta^{2n-1}$

8 – a) $f(\theta, k) = \dfrac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}$

donc $\forall k \in \mathbb{N}$ $\quad \theta \longmapsto f(\theta, k)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$
et à valeurs dans $]0, +\infty[$

donc $F : \theta \longmapsto \prod_{i=1}^{m} f(\theta, k_i)$ est aussi dérivable sur $]0, +\infty[$
et à valeurs dans $]0, +\infty[$

donc par composée, comme ln est dérivable sur $]0, +\infty[$

alors G est dérivable sur $]0, +\infty[$.

– $F(\theta, k_1, \dots, k_n) = e^{-m\theta} \dfrac{\theta^{\sum_{i=1}^{m} k_i}}{k_1! \dots k_n!}$

donc $\partial_1 F = \dfrac{e^{-m\theta}}{k_1! \dots k_n!} \theta^{\sum_{i=1}^{m} k_i - 1} \left(\sum_{i=1}^{m} k_i - m\theta \right)$

– $G(\theta, k_1, \dots, k_n) = -m\theta + \left(\sum_{i=1}^{m} k_i \right) \ln \theta - \ln(k_1! \dots k_n!)$

donc $\partial_1 G = -m + \sum_{i=1}^{m} k_i \cdot \dfrac{1}{\theta}$.

8 – b) $E(Z_0) = E\left(-m + \dfrac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{m} X_i \right) = -m + \dfrac{m\theta}{m} = 0$

donc Z_θ est centrée

et $V(Z_\theta) = V\left(-n + \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{\theta^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$= \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{n}{\theta}$ par indépendance des $(X_i)_{1\leq i\leq n}$.

donc $I(\theta) = \frac{n}{\theta} > 0$.

9_ a) Oui car T est un estimateur et que $E(T) = \varphi(\theta)$.

b) Car $\partial_1\left(\sum F(\theta)\right) \neq \left(\sum \partial_1 F(\theta)\right)$ en général.

10_ a) $E(T \times Z_\theta) = \sum t(k_1, \dots, k_n) \times \partial_1 G(\theta, k_1, \dots, k_n) \times F(\theta, k_1, \dots, k_n)$ par transfert.

or $\partial_1 G(\theta, k_1, \dots, k_n) = \frac{\partial_1 F(\theta, k_1, \dots, k_n)}{F(\theta, k_1, \dots, k_n)}$ (car $G = \ln F$)

donc on a bien $E(T \times Z_\theta) = \sum t(k_1, \dots, k_n)\, \partial_1 F(\theta, k_1, \dots, k_n)$

$= \varphi'(\theta)$ car T est régulier.

et $Cov(T, Z_\theta) = E(TZ_\theta) - E(T).E(Z_\theta) = E(TZ_\theta)$ car Z_θ est centrée.

Donc $\varphi'(\theta) = E(T.Z_\theta) = Cov(T, Z_\theta)$.

10 – b) Par Cauchy-Schwarz :

$$\psi''(\theta)^2 = \mathrm{cov}(T, Z_\theta)^2 \leq V(T) \cdot V(Z_\theta)$$

or $V(Z_\theta) = I(\theta)$.

donc $V(T) \geq \dfrac{\psi'(\theta)^2}{I(\theta)}$

11 – On rappelle que $Z_\theta = \left(\sum_{i=1}^{m} X_i - m\theta\right) / \theta$

donc ech = sum(X, 'c')

car X contient dans chacune de ses N colonnes une réalisation du vecteur $(X_1, \dots, X_m)$.

11 b) $I(\theta) = \dfrac{m}{\theta}$ correspond à la variance de Z_θ,

donc à la dispersion des valeurs par rapport à la moyenne :

(10, 4) donc $V = 2{,}5$
(20, 4) donc $V = 5$
(40, 4) donc $V = 10$
(50, 5) donc $V = 10$

donc (10, 4) donne la + faible variance : Figure C
(20, 4) donne la 2ème + faible : Figure B

$(50,5)$ a plus de simulations donc la figure sera + régulière
donc : Figure A
$(40,4)$: reste la Figure D.

12- a) $S_m \hookrightarrow P(m\theta)$ par somme de Poisson indépendantes.

$E(S_m) = m\theta \quad V(S_m) = m\theta$.

b) $M_{n,m}$ est une fonction de $(X_1, \dots, X_m)$ indep de $\varphi(\theta)$ donc c'est un estimateur de $\varphi(\theta)$.

De plus $M_{n,m} = \dfrac{S_m^{\underline{n}}}{m^n}$

donc comme $S_m \hookrightarrow P(m\theta)$, d'après 6-b)

$E(M_{n,m}) = \dfrac{(m\theta)^n}{m^n} = \theta^n$ donc R_1 est vérifiée.

de plus d'après 6. a) $(S_m^{\underline{n}})^2$ existe donc

$M_{n,m}$ admet une Variance : R_2 est vérifiée.

Remarquons d'abord que $M_{n,m} = \dfrac{S_m^{\underline{n}}}{m^n} = \dfrac{(\sum x_i)^{\underline{n}}}{m^n}$

donc calculons $\displaystyle\sum_{(k_1,\dots,k_m)} \frac{(\sum k_i)^{\underline{n}}}{m^n} \cdot \partial_1 F(\theta, k_1, \dots, k_m)$

$$= \sum \frac{\left(\sum k_i\right)^{\underline{n}}}{m^n} \frac{e^{-m\theta}}{k_1!\dots k_m!}\, \theta^{\sum k_i - 1}\left(\sum k_i - m\theta\right)$$

$$= \sum \prod_{i=1}^{m}\left(e^{-\theta}\cdot\frac{\theta^{k_i}}{k_i!}\right) \frac{\left(\sum_{i=1} k_i\right)^{\underline{n}}}{m^n}\left(\frac{\sum k_i}{\theta} - m\right)$$

transfert.

$$= E\left(\frac{S_m^{\underline{n}}}{m^n}\times\left(\frac{S_m}{\theta} - m\right)\right)$$

or $S_m^{\underline{n}}\cdot S_m = S_m^{\underline{n+1}} + n\, S_m^{\underline{n}}$

donc $= \dfrac{1}{m^n\theta}\left[E\left(S_m^{\underline{n+1}}\right) + n\,E\left(S_m^{\underline{n}}\right)\right] - \dfrac{1}{m^{n-1}}E\left(S_m^{\underline{n}}\right)$

$$= \frac{1}{m^n\theta}\left((m\theta)^{n+1} + n\,(m\theta)^n\right) - \frac{(m\theta)^n}{m^{n-1}}$$

$$= \left(m\theta^n + n\theta^{n-1}\right) - m\theta^n = n\theta^{n-1}$$

or comme $\varphi : \theta \mapsto \theta^n$ $\quad \varphi'(\theta) = n\theta^{n-1}$

Donc R_3 est vérifiée.

$M_{m,n}$ est un estimateur régulier.

(L'énoncé nous a fait grâce de la preuve de la CV de la série, et heureusement).

On en déduit que d'après 10-b que :

$$V(M_{n,m}) \geq \frac{(\varphi'(\theta))^2}{I(\theta)} = \frac{n^2\theta^{2n-2}}{m/\theta} = \boxed{\frac{n^2\theta^{2n-1}}{m}}$$

12- c) $M_{2,m} = \frac{S_m(S_m-1)}{m^2}$

$$E(M_{2,m}^2) = \frac{1}{m^4}E(S_m^4 - 2S_m^3 + S_m^2)$$

or d'après 5.b) $S_m^4 = S_m^{\underline{4}} + 6S_m^{\underline{3}} + 7S_m^{\underline{2}} - 11S_m^{\underline{1}}$

$S_m^3 = S_m^{\underline{3}} + 3S_m^{\underline{2}} + S_m^{\underline{1}}$

$S_m^2 = S_m^{\underline{2}} + S_m^{\underline{1}}$

et comme $E(S_m^{\underline{k}}) = (m\theta)^k$

on obtient $E(M_{2,m}^2) = \theta^4 + \frac{4\theta^3}{m} + \frac{2\theta^2}{m^2} - \frac{12\theta}{m^3}$

donc $V(M_{2,m}) = \frac{4\theta^3}{m} + \frac{2\theta^2}{m^2} - \frac{12\theta}{m^3} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$

donc $M_{2,m}$ est un estimateur convergent de θ^2.

12- d) $M_{n,m}^2 = \frac{(S_m^{\underline{n}})^2}{m^{2n}} = \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\, S_m^{k}\right)^2}{m^{2n}}$

Remarquons que le polynôme $P = (X^{\underline{n}})^2$ est un polynôme de coefficient dominant 1 et de degré $2n$, ainsi

$$P = X^{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1} \lambda_{n,k} X^k \quad \text{où } (\lambda_{n,k})_{0\leq k\leq 2n-1} \in \mathbb{R}^{2n}$$

et $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \lambda_{n,k} X^k \in F_{2n-1} = \mathrm{Vect}(X^0, \dots, X^{2n-1})$

donc $P = X^{2n} + \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \alpha_{n,k} X^k$ où $(\alpha_{n,k}) \in \mathbb{R}^{2n}$

Ainsi $M_{n,m}^2 = \dfrac{1}{m^{2n}} P(S_m) = \dfrac{1}{m^{2n}}\left[S_m^{2n} + \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \alpha_{n,k} X^k\right]$

donc $E(M_{n,m}^2) = \dfrac{1}{m^{2n}}\left((m\theta)^{2n} + \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \alpha_{n,k} (m\theta)^k\right]$

$$= \theta^{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1} \alpha_{n,k} \theta^k m^{k-2n}$$

$\downarrow$ car $k - 2n < 0$

$$\longrightarrow \theta^{2n}$$

donc $V(M_{n,m}) = E(M_{n,m}^2) - E(M_{n,m})^2$

$= E(M_{n,m}^2) - \theta^{2n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $M_{n,m}$ est un estimateur convergent de θ^n.

<u>Remarque</u> : Je n'ai pas suivi l'indication qui conduisait à une preuve + longue

13.a) – $\mathbb{E}(\overline{X_n}) = \theta$ par linéarité de $\mathbb{E}$ — R_1 vérifiée

– $\mathbb{V}(\overline{X_n}) = \frac{\theta}{n} > 0$ par indép des (X_i) — R_2 vérifiée

– $$\sum \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)\frac{e^{-n\theta}}{k_1!\dots k_n!}\,\theta^{\sum k_i}\left(\frac{\sum k_i}{\theta}-n\right)$$

$$= \sum \frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\theta}}{k_i!}\theta^{k_i}\right)\sum_{i=1}^{n} k_i\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{\theta}-n\right)$$

$$= \sum\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i\left(\frac{\sum k_i}{\theta}-n\right)\right)\times F(\theta,k_1,\dots,k_n)$$

$$= \mathbb{E}\left(\overline{X_n}\left(\frac{n\overline{X_n}}{\theta}-n\right)\right)$$ par transfert.

$$= \frac{n}{\theta}\mathbb{E}(\overline{X_n}^2) - n\,\mathbb{E}(\overline{X_n})$$ par Koenig

$$= \frac{n}{\theta}\left(\frac{\theta}{n}+\theta^2\right) - n\theta = 1.$$

et On a bien $\varphi'(\theta) = 1$ car $\varphi : \theta \longmapsto \theta$.

Donc R_3 est vérifiée.

Donc $\overline{X_n}$ est régulier.

On pouvait aussi remarquer que $\overline{X_n} = M_{1,n}$.

13. b) Dans ce cas $\frac{\varphi'(\theta)^2}{I(\theta)} = \frac{1}{n/\theta} = \frac{\theta}{n} = \mathbb{V}(\overline{X_n})$

L'inégalité est alors une égalité.

14-a) - $E(\psi(\alpha)) = \theta + \alpha(\theta - \theta) = \theta$ car Y vérifie R_1.

- $\psi(\alpha)$ admet une variance car $\overline{X_n}$ et Y en ont une (car Y vérifie R_2).

- Ici : $\psi(\alpha) = \overline{X_n} + \alpha(Y - \overline{X_n})$

$$= \frac{1}{n}\sum X_i + \alpha\left(t(X_1, \dots, X_n) - \frac{1}{n}\sum X_i\right)$$

donc on calcule la série :

$$\sum\left[\frac{1}{n}\sum k_i + \alpha\left(t(k_1, \dots, k_n) - \frac{1}{n}\sum k_i\right)\right] \partial_1 F(\theta, k_1, \dots, k_n)$$

$$= \varphi'(\theta) + \alpha(\varphi'(\theta) - \varphi'(\theta)) = \varphi'(\theta)$$

car $\overline{X_n}$ et Y vérifie R_3

donc $\psi(\alpha)$ est régulier.

14-b) D'après 13.b) $V(\psi(\alpha)) \geq \frac{\theta}{n}$, or

$$V(\psi(\alpha)) = (1-\alpha)^2 V(\overline{X_n}) - 2\alpha(1-\alpha)\operatorname{cov}(\overline{X_n}, Y) + \alpha^2 V(Y)$$

, comme $V(\overline{X_n}) = \frac{\theta}{n}$, on obtient alors :

$$(1-\alpha)^2 \frac{\theta}{m} - 2\alpha(1-\alpha)\,\mathrm{Cov}(\overline{X_n}, Y) + \alpha^2 \mathbb{V}(Y) \geq \frac{\theta}{m}$$

i.e. $\alpha^2\left[-2\,\mathrm{Cov}(\overline{X_n}, Y) + \mathbb{V}(Y)\right] + \alpha\left[-\frac{2\theta}{m} + 2\,\mathrm{Cov}(\overline{X_n}, Y)\right] \geq 0$

or ceci est vrai $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Et un polynome en α de la forme $\alpha^2 a + \alpha b$ est ≥ 0 sur $\mathbb{R}$ ssi il n'a qu'une seule racine ssi $b = 0$. Ici on a donc :

$$\boxed{\frac{\theta}{m} = \mathrm{Cov}(\overline{X_m}, Y).}$$

14_c) $\mathbb{V}(Y - \overline{X_m}) = \mathbb{V}(Y) - 2\,\mathrm{Cov}(Y, \overline{X_n}) + \mathbb{V}(\overline{X_n})$

$= \mathbb{V}(Y) + \mathbb{V}(\overline{X_m}) - 2\frac{\theta}{m}$

$= \mathbb{V}(Y) - \frac{\theta}{m}.$

Donc si Y est efficace alors on a : $\mathbb{V}(Y) = \frac{\theta}{m}$, donc :

$$\mathbb{V}(Y - \overline{X_m}) = 0$$

donc $\exists c \in \mathbb{R} \mid \quad Y - \overline{X_m} = c$ presque sûrement

or $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\overline{X_m})$, donc $c = 0$

Donc $\boxed{Y = \overline{X_m} \text{ p.s.}}$

Donc si un estimateur de θ est efficace, il est p.s. égal à $\overline{X_n}$.

15 – $W_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X_n})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - 2X_i\overline{X_n} + \overline{X_n}^2)$

$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X_n} \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{X_n}^2\right]$

$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2n\overline{X_n}^2 + n\overline{X_n}^2\right]$

$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X_n}^2\right]$

15 – b) W_n est une fonction de $(X_1, \dots, X_n)$ indép de θ et

$\mathbb{E}(W_n) = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i^2) - n\,\mathbb{E}(\overline{X_n}^2)\right]$

$= \frac{1}{n-1}\left[n(\theta + \theta^2) - n\left(\frac{\theta}{n} + \theta^2\right)\right]$

$= \frac{1}{n-1}\left(\theta(n-1)\right) = \theta.$

Donc W_n est un estimateur sans biais de θ.

15 – c) X^2 admet une variance (car X a des moments de tous ordres)

$\overline{X_n}^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j\right)$

Comme X_iX_j admet un moment d'ordre 2, alors par linéarité, $\overline{X_n}^2$ admet un moment d'ordre 2 donc une variance.

donc par linéarité $\overline{X_n}^2$ a une variance.

15. d) $\overline{X_n}$ est convergent de θ d'après la loi des grands nombres.

- $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{P} E(X^2) = \theta^2+\theta$ d'après la loi des grands nombres.

$\overline{X_n}^2 \xrightarrow{P} \theta^2$. Donc d'après le lemme de l'énoncé (que l'on démontre après) : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X_n}^2 \xrightarrow{P} \theta$

or $\overline{W_n} = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X_n}^2\right) \xrightarrow{P} 1\times\theta$ (car $\frac{n}{n-1} \to 1$)

d'après le lemme.

donc $\overline{W_n}$ est convergent de θ.

<u>Démontrons le lemme</u> : Si $Y_n \xrightarrow{P} y$ et $Z_n \xrightarrow{P} z$

alors par Slutsky $Y_n - Z_n \xrightarrow{P} y - z$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$ $A_n = a_n$

Il est clair que $A_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$, en effet soit $\varepsilon > 0$

$\mathbb{P}(|A_n - a| \leq \varepsilon) = \mathbb{P}(|a_n - a| \leq \varepsilon)$

Comme $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$, alors $\exists N / \forall n \geq N \; |a_n - a| \leq \varepsilon$

donc $\forall n \geq N \; \mathbb{P}(|a_n - a| \leq \varepsilon) = 0$.

Donc à nouveau par Slutsky $A_n(Y_n - Z_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} a(y - z)$.

16 - On a vu que $\overline{X_n}$ est efficace donc il a la variance minimale donc :

$\overline{X_n}$ correspond à la figure G.

$\overline{W_n'}$ est legerement plus petit que $\overline{W_n}$ donc

$\overline{W_n'}$ correspond à la figure F

donc $\overline{W_n}$ correspond à la figure E.