

HEC Mathématiques II 2013

PARTIE I Polynômes factoriels ascendants et loi binomiale négative

Q1 a) $X^{(2)} - X^{(1)} = (X+1-1)(X+2-1) - (X+1-1) = X(X+1) - X = X^2 + X - X = X^2$.

$$X^{(3)} - 3X^{(2)} + X^{(1)} = (X+1-1)(X+2-1)(X+3-1) - 3(X+1-1)(X+2-1) + (X+1-1).$$

$$X^{(3)} - 3X^{(2)} + X^{(1)} = X(X+1)(X+2) - 3X(X+1) + X = X[(X+1)(X+2) - 3(X+1) + 1]$$

$$X^{(3)} - 3X^{(2)} + X^{(1)} = X[X^2 + 2X + X + 2 - 3X - 3 + 1] = XX^2 = X^3.$$

$$\underline{X^{(2)} - X^{(1)} = X^2 \quad \& \quad X^{(3)} - 3X^{(2)} + X^{(1)} = X^3.}$$

b)

V1 $X^{(4)} = X(X+1)(X+2)(X+3)$. le coefficient de X^3 dans $X^{(4)}$ est $1+2+3$ donc 6, non?

le coefficient de X^3 dans $X^{(3)}$ est 1 et c'est 0 dans $X^{(2)}$ et $X^{(1)}$.

calculons alors $X^{(4)} - 6X^{(3)}$.

$$X^{(4)} - 6X^{(3)} = X(X+1)(X+2)(X+3) - 6X(X+1)(X+2) = X(X+1)(X+2)(X+3-6).$$

$$X^{(4)} - 6X^{(3)} = X(X^2 + 3X + 2)(X-3) = (X^2 + 3X + 2)(X^2 - 3X) = (X^2 + 3X)(X^2 - 3X) + 2(X^2 - 3X).$$

$$X^{(4)} - 6X^{(3)} = X^4 - 9X^3 + 2X^2 - 6X = X^4 - 7X^3 - 6X = X^4 - 7X(X+1) + 7X - 6X = X^4 - 7X^{(2)} + X^{(1)}.$$

Donc $\underline{X^4 = X^{(4)} - 6X^{(3)} + 7X^{(2)} - X^{(1)}}.$

V2 $X^{(4)} = X(X+1)(X+2)(X+3) = (X^2 + X)(X^2 + 5X + 6) = X^4 + 5X^3 + 6X^2 + X^3 + 5X^2 + 6X.$

$$X^{(4)} = X^4 + 6X^3 + 11X^2 + 6X \stackrel{\text{oi}}{=} X^4 + 6(X^{(3)} - 3X^{(2)} + X^{(1)}) + 11(X^{(2)} - X^{(1)}) + 6X^{(1)}.$$

$$X^{(4)} = X^4 + 6X^{(3)} + (-18 + 11)X^{(2)} + (6 - 11 + 6)X^{(1)} = X^4 + 6X^{(3)} - 7X^{(2)} + X^{(1)}.$$

Donc $X^4 = X^{(4)} - 6X^{(3)} + 7X^{(2)} - X^{(1)}.$

voir la définition de $X^{(k)}$.

c) soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall k \in [0, n]$, $\deg X^{(k)} = k$. Alors $(X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(n)})$ est une famille d'éléments non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$ de degrés échelonnés.

$(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ est une famille libre d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ dont le cardinal $n+1$ coïncide avec la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi $(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Or x^n est combinaison linéaire de $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les polynômes x^n ($n \in \mathbb{N}$) de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ (!!!) sont tous des combinaisons linéaires de polynômes factoriels adjoints.

⚠ La notion de base d'un espace vectoriel est d'ailleurs dans le programme et sans aucun intérêt ici.

Q2 (r, 0) est un couple de réels $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$0) \quad r^{(n+1)} = \prod_{k=1}^{n+1} (r+k-1)$$

$$1^{\text{er}} \text{ cas } n \geq 1. \quad r^{(n+1)} = \left(\prod_{k=1}^n (r+k-1) \right) (r+n) = r^{(n)} (r+n).$$

$$2^{\text{e}} \text{ cas } n=0. \quad r^{(n+1)} = r+1-1 = r = 1 \times (r+0) = r^{(0)} (r+0) = r^{(n)} (r+n).$$

dans les deux cas $r^{(n+1)} = r^{(n)} (r+n) = (r+n) r^{(n)}$.

Remarque.. Notons que ceci donne $x^{(n+1)} = (x+n) x^{(n)}$.

b) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Q2 a)

$$r^{(k+1)} s^{(n-k)} + r^{(k)} s^{(n-k+1)} \stackrel{!}{=} (r+k) r^{(k)} s^{(n-k)} + r^{(k)} (s+n-k) s^{(n-k)}.$$

$$r^{(k+1)} s^{(n-k)} + r^{(k)} s^{(n-k+1)} = (r+k+s+n-k) r^{(k)} s^{(n-k)} = (r+s+n) r^{(k)} s^{(n-k)}.$$

Ainsi $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, (r+s+n) r^{(k)} s^{(n-k)} = r^{(k+1)} s^{(n-k)} + r^{(k)} s^{(n-k+1)}$.

$$c) \quad (r+s)^{(0)} = 1 \text{ et } \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} r^{(k)} s^{(0-k)} = \binom{0}{0} r^{(0)} s^{(0-0)} = 1 \times 1 \times 1 = 1.$$

$$\text{donc } (r+s)^{(0)} = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} r^{(k)} s^{(0-k)}.$$

La propriété est vraie pour $n=0$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$$(r+s)^{<n+1>} \stackrel{Q2a)}{=} (r+s+n)(r+s)^{<n>} \stackrel{\text{hypothèse de récurrence}}{=} (r+n+n) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^{<k>} s^{<n-k>}.$$

$$(r+s)^{<n+1>} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (r+n+n) r^{<k>} s^{<n-k>} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [r^{<k+1>} s^{<n-k>} + r^{<k>} s^{<n-k+1>}]$$

$$(r+s)^{<n+1>} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^{<k+1>} s^{<n-k>} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^{<k>} s^{<n-k+1>}.$$

$$(r+s)^{<n+1>} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} r^{<k>} s^{<n-(k-1)>} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^{<k>} s^{<n+1-k>}.$$

$$(r+s)^{<n+1>} \stackrel{③}{=} \binom{n}{n+1} r^{<n+1>} s^{<n-1>} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} r^{<k>} s^{<n+1-k>} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} r^{<k>} s^{<n+1-k>} + \binom{n}{0} r^{<0>} s^{<n+1-0>}.$$

$$(r+s)^{<n+1>} \stackrel{④}{=} r^{<n+1>} s^{<0>} + \sum_{k=1}^n [\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}] r^{<k>} s^{<n+1-k>} + r^{<0>} s^{<n+1>}.$$

$$(r+s)^{<n+1>} \stackrel{⑤}{=} \binom{n+1}{n+1} r^{<n+1>} s^{<n+1-(n+1)>} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} r^{<k>} s^{<n+1-k>} + \binom{n+1}{0} r^{<0>} s^{<n+1-0>}.$$

$$(r+s)^{<n+1>} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} r^{<k>} s^{<n+1-k>} \quad \text{ceci achève la récurrence.}$$

Remarque... ⑤ est vraie à un petit abus près... En toute rigueur il aurait fallu distinguer deux cas : $n=0$ et $n \geq 1$.

$$\forall (r,s) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (r+s)^{<n>} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^{<k>} s^{<n-k>}.$$

③ r est un réel strictement positif. x est un réel appartenant à $]0,1[$.

$$a) \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r^{<n+2>} x^{n+2}}{(n+1)! (1-x)^{n+1}} \times \frac{n! (1-x)^{n+1}}{r^{<n+1>} x^{n+1}} = \frac{r^{<n+2>}}{r^{<n+1>}} \times \frac{x}{n+1} = \frac{(r+n+1) r^{<n+1>}}{r^{<n+1>}} \times \frac{x}{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r+n+1}{n+1} x \quad ; \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{n} x = x$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x.$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x.$$

$$\text{Alors } \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - x \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1-x}{2} \in \mathbb{R}_+^* \text{ car } x \in]0,1[\text{ donc } \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - x \right| < \frac{1-x}{2}.$$

$$\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} - x \leq \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - x \right| < \frac{1-x}{2}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} < x + \frac{1-x}{2} = \frac{1+x}{2} \text{ et } u_n = \frac{r^{(n+1)} x^{n+1}}{n! (1-x)^{n+1}} > 0. \quad \begin{matrix} x \in]0,1[\text{ et } r > 0 \\ \downarrow \end{matrix}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, u_{n+1} < \frac{1+x}{2} u_n.$$

$$\text{notons par récurrence que } \forall n \in \mathbb{N}, u_{N+n} \leq u_N \left(\frac{1+x}{2} \right)^n.$$

$$\bullet \text{ la propriété est vraie pour } n=0 \text{ car } \left(\frac{1+x}{2} \right)^0 = 1.$$

$$\bullet \text{ Supposons la propriété vraie pour un élément } n \text{ de } \mathbb{N} \text{ et montrons la pour } n+1.$$

$$N+n \geq N \text{ donc } u_{N+n+1} \leq \frac{1+x}{2} u_{N+n} \text{ et } u_{N+n} \leq u_N \left(\frac{1+x}{2} \right)^n \text{ par hypothèse de récurrence.}$$

$$\text{comme } \frac{1+x}{2} \geq 0: u_{N+n+1} \leq \frac{1+x}{2} u_{N+n} \leq \frac{1+x}{2} u_N \left(\frac{1+x}{2} \right)^n = u_N \left(\frac{1+x}{2} \right)^{n+1}.$$

Ceci achève la récurrence. Finalement:

$$\underline{\underline{\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{N+n} \leq u_N \left(\frac{1+x}{2} \right)^n.}}$$

$$c) \forall n \in \mathbb{N}, u_{N+n} \leq u_N \left(\frac{1+x}{2} \right)^n.$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, u_n \leq u_N \left(\frac{1+x}{2} \right)^{n-N} \text{ puis}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, 0 \leq u_n \leq u_N \left(\frac{1+x}{2} \right)^{n-N} \text{ et } \left| \frac{1+x}{2} \right| < 1 \text{ car } x \in]0,1[.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_N \left(\frac{1+x}{2} \right)^{n-N} \right) = u_N \times 0 = 0. \text{ Ainsi par encadrement il vient: } \underline{\underline{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

d) $\forall$ Posons: $\forall z \in]-\infty, 1[$, $f_r(z) = (1-z)^{-r}$

montrons par récurrence que pour tout k dans $\mathbb{N}$ f_r est k fois dérivable sur

$]-\infty, 1[$ et que $\forall z \in]-\infty, 1[$, $f_r^{(k)}(z) = r^{(k)} (1-z)^{-r-k}$.

• La propriété est vraie pour $k=0$ car $r^{(0)} = 1 \dots$

• Supposons la propriété vraie pour un élément k de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

Par hypothèse f_r est k fois dérivable sur $]-\infty, 1[$ et $\forall z \in]-\infty, 1[$, $f_r^{(k)}(z) = r^{(k)} (1-z)^{-r-k}$.

$\forall z \in]-\infty, 1[$, $1-z > 0$ donc $z \mapsto (1-z)^{-r-k}$ est dérivable sur $]-\infty, 1[$.

Alors $f_r^{(k)}$ est dérivable sur $]-\infty, 1[$ donc f_r est $k+1$ fois dérivable sur $]-\infty, 1[$.

de plus $\forall z \in]-\infty, 1[$, $f_r^{(k+1)}(z) = (f_r^{(k)})'(z) = r^{(k)} (-r-k)(-1)(1-z)^{-r-k-1}$.

$\forall z \in]-\infty, 1[$, $f_r^{(k+1)}(z) = r^{(k)} (r+k) (1-z)^{-r-(k+1)} = r^{(k+1)} (1-z)^{-r-(k+1)}$
 $\uparrow$
 Q.E.D.

ceci achève la récurrence.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, f_r est k fois dérivable sur $]-\infty, 1[$ donc f_r est de classe

C^∞ sur $]-\infty, 1[$. Nous pouvons alors appliquer à f_r la formule de Taylor

avec cette intégrale, à l'ordre n sur $[0, x]$ ($x \in]0, 1[$).

$$\text{Alors } f_r(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f_r^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f_r^{(n+1)}(t) dt.$$

$$f_r(x) = \sum_{k=0}^n \frac{r^{(k)} (1-0)^{-r-k}}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} r^{(n+1)} (1-t)^{-r-(n+1)} dt.$$

$$f_r(x) = \sum_{k=0}^n \frac{r^{(k)}}{k!} x^k + \frac{r^{(n+1)}}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}} dt.$$

$$\text{Ainsi } (1-x)^{-r} = \sum_{k=0}^n \frac{r^{(k)}}{k!} x^k + \frac{r^{(n+1)}}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}} dt.$$

$$\text{donc } (1-x)^{-r} = \sum_{k=0}^n \frac{r^{(k)}}{k!} x^k + R_n \quad \text{et ceci pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}.$$

e) Soit $t \in [0, x]$. $x-t \geq 0$ et $\frac{1}{1-t} \geq 0$ donc $\frac{x-t}{1-t} \geq 0$.

$$x - \frac{x-t}{1-t} = \frac{x-x-t-k+t}{1-t} = \frac{t(1-x)}{1-t} \geq 0. \text{ donc } x - \frac{x-t}{1-t} \geq 0, \frac{x-t}{1-t} \leq x.$$

$\uparrow t \geq 0, 1-x \geq 0, \frac{1}{1-t} \geq 0$

$$\forall t \in [0, x], 0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0, x], 0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$ donc $\forall t \in [0, x], 0 \leq \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \leq x^n$.

$$\forall t \in [0, x], 1-t \geq 1-x > 0 \text{ et } r+1 > 0.$$

$$\forall t \in [0, x], (1-t)^{r+1} \geq (1-x)^{r+1} > 0. \forall t \in [0, x], 0 \leq \frac{1}{(1-t)^{r+1}} \leq \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

$$\text{Alors } \forall t \in [0, x], 0 \leq \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}} \leq \frac{x^n}{(1-x)^{r+1}} \text{ et } x \geq 0.$$

$$\text{donc } 0 \leq \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}} dt \leq \int_0^x \frac{x^n}{(1-x)^{r+1}} dt = \frac{x^n}{(1-x)^{r+1}} \underbrace{\int_0^x 1 dt}_x = \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{r+1}}.$$

$$\text{de plus } \frac{r(n+1)}{n!} \geq 0 \text{ car } r > 0.$$

$$\text{par conséquent } 0 \leq \frac{r(n+1)}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}} dt \leq \frac{r(n+1)}{n!} \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{r+1}}.$$

Alors $0 \leq R_n \leq u_n$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

f) $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq R_n \leq u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Mais par encadrement il s'agit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0.$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left((1-x)^{-r} - \sum_{k=0}^n \frac{r(k)}{k!} x^k \right) = 0; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{r(k)}{k!} x^k \right) = (1-x)^{-r}.$$

Alors la série de terme général $\frac{r(n)}{n!} x^n$ converge.

$$\text{et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r(n)}{n!} x^n = (1-x)^{-r} = \frac{1}{(1-x)^r} \text{ pour tout } r \in]0, +\infty[\text{ et pour } \text{tout } x \in]0, 1[.$$

Remarque. La formule précédente vaut encore pour $r \in \underline{[0, +\infty[}$ et $\alpha \in \underline{[0, 1[}$

Exercice. la démontrer.

(Q4) Soit r et p deux réels tels que $0 < p < 1$ et $r > 0$. $1-p \in]0, 1[$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r(k)}{k!} (1-p)^k = \frac{1}{(1-(1-p))^r} = \frac{1}{p^r}.$$

$$\text{d'où } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r(k)}{k!} p^r (1-p)^k = 1.$$

Remarque. Pour $\forall k \in \mathbb{N}$, $L_{r,p}(k) = \frac{r(k)}{k!} p^r (1-p)^k$.

• Inadmissible

• $\forall k \in \mathbb{N}$, $L_{r,p}(k) \geq 0$

• $\sum_{k=0}^{+\infty} L_{r,p}(k) = 1$.

Il suffit pour dire que $L_{r,p}$ est la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.

(Q5) 0] Pour $\forall t \in \mathbb{R}$, $P_n(t) = \prod_{i=1}^n (t - i + 1)$. $X_n = P_n \circ X$.

Le même schéma indique que pour montrer que X_n possède une espérance il suffit de montrer que la série de terme général $P_n(k) P(X=k)$ est absolument convergente. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$P_n(k) P(X=k) = \prod_{i=1}^n (k - i + 1) P(X=k). \quad \prod_{i=1}^n (k - i + 1) = k(k-1) \dots (k-n+1).$$

Si $k \in [0, n-1]$, $k(k-1) \dots (k-n+1) = 0$ car l'un des facteurs de ce produit est nul.

Supposons que $k \in [n, +\infty[$. $P_n(k) = k(k-1) \dots (k-n+1) = \frac{k!}{(k-n)!}$.

$$\text{d'où } P_n(k) P(X=k) = \frac{k!}{(k-n)!} \times \frac{r(k)}{k!} p^r (1-p)^k = \frac{r(k)}{(k-n)!} p^r (1-p)^k.$$

$$\text{Ainsi } \forall k \in \mathbb{N}, p_n(k) P(X=k) = \begin{cases} \frac{r^{(k)}}{(k-n)!} p^n (1-p)^k & \text{si } k \in [n, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Observons que $\forall k \in \mathbb{N}, p_n(k) P(X=k) \geq 0$. Alors pour montrer l'existence de l'espérance de X_n il ne reste plus qu'à montrer la convergence de la série de terme général $p_n(k) P(X=k)$.

$$\text{Soit } k \in [n, +\infty[, \quad r^{(k)} = \prod_{i=1}^k (r+i-1).$$

Supposons que $k \geq n+1$.

$$r^{(k)} = \left(\prod_{i=1}^n (r+i-1) \right) \left(\prod_{i=n+1}^k (r+i-1) \right) = r^{(n)} \prod_{j=1}^{k-n} (r+j+n-1).$$

$j = i - n$

$$r^{(k)} = r^{(n)} \prod_{j=1}^{k-n} (r+n+j-1) = r^{(n)} (r+n)^{(k-n)}.$$

$$\text{Si } k = n: r^{(k)} = r^{(n)} = r^{(n)} \cdot 1 = r^{(n)} (r+n)^{(0)} = r^{(n)} (r+n)^{(k-n)}.$$

$$\text{donc } \forall k \in [n, +\infty[, \quad r^{(k)} = r^{(n)} (r+n)^{(k-n)}.$$

$$\text{Alors } \forall k \in [n, +\infty[, \quad p_n(k) P(X=k) = \frac{r^{(n)} (r+n)^{(k-n)}}{(k-n)!} p^n (1-p)^k.$$

$$\forall k \in [n, +\infty[, \quad p_n(k) P(X=k) = r^{(n)} \left(\frac{1-p}{p} \right)^n \times \frac{(r+n)^{(k-n)}}{(k-n)!} p^{r+n} (1-p)^{k-n}.$$

$$r+n > 0 \text{ et } p \in]0, 1[\text{ donc la série de terme général } \frac{(r+n)^{(k-n)}}{(k-n)!} p^{r+n} (1-p)^{k-n}$$

$$\text{converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(r+n)^{(k-n)}}{(k-n)!} p^{r+n} (1-p)^{k-n} = 1 \quad (\text{Q4}).$$

$$\text{Alors la série de terme général } \frac{(r+n)^{(k-n)}}{(k-n)!} p^{r+n} (1-p)^{k-n} \text{ converge et}$$

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(r+n)^{(k-n)}}{(k-n)!} p^{r+n} (1-p)^{k-n} = 1.$$

Pour conclure la série de terme général $P_n(k) P(X=k)$ converge et $\sum_{k=n}^{+\infty} P_n(k) P(X=k) = r^{n+1} \left(\frac{1-p}{p}\right)^n$.

rien en core:

1) La série de terme général $P_n(k) P(X=k)$ converge absolument (car nous avons vu que

$$\forall k \in \mathbb{N}, P_n(k) P(X=k) \geq 0).$$

$$2) \sum_{k=0}^{+\infty} P_n(k) P(X=k) = \sum_{k=n}^{+\infty} P_n(k) P(X=k) = r^{n+1} \left(\frac{1-p}{p}\right)^n.$$

de l'énoncé de transfert nous avons que $X_n = P_n \circ X$ possède une espérance qui vaut

$$r^{n+1} \left(\frac{1-p}{p}\right)^n.$$

b) Prenons $P_0 = 1$ et reprenons $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, P_n(t) = \prod_{k=1}^n (t - k + 1)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille d'éléments non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$ de degrés échelonnés.

$(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est donc une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ dont le cardinal coïncide avec la

dimension de $\mathbb{R}_n[X]$. $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Alors $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall t \in \mathbb{R}, t^n = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k$.

$X^n = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k \circ X = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k X_k$. Pour tout k dans $[1, n]$, X_k possède une espérance

et la variable certaine égale à α_0 possède également une espérance. Ainsi X^n est combinaison

linéaire de $n+1$ variables aléatoires qui possèdent une espérance. Donc X^n possède

une espérance. Cela suffit pour dire que X possède un moment d'ordre n et ceci pour

tout n dans $\mathbb{N}^*$ et même pour tout n dans $\mathbb{N}$.

X a donc des moments de tous ordres.

Ainsi X possède une espérance et une variance.

$$X_1 = X \cdot 1 + 1 = X. \text{ Alors } E(X) = E(X_1) = r^{(1)} \left(\frac{1-p}{p}\right)^1. \quad \underline{\underline{E(X) = r \frac{1-p}{p}}}$$

$$X_2 = X(X-1). \text{ Alors } V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X(X-1) + X) - (E(X))^2 = E(X_2) + E(X) - (E(X))^2.$$

$$V(X) = r^{(2)} \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + r \frac{1-p}{p} - \left(r \frac{1-p}{p}\right)^2 = r(r+1) \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + r \frac{1-p}{p} - \left(r \frac{1-p}{p}\right)^2 = r \frac{1-p}{p} \left[(r+1) \frac{1-p}{p} + 1 - r \frac{1-p}{p} \right]$$

$$V(X) = r \frac{1-p}{p} \left[r \frac{1-p}{p} + \frac{1-p}{p} + 1 - r \frac{1-p}{p} \right] = r \frac{1-p}{p} \times \frac{1}{p} = r \frac{1-p}{p^2}. \quad V(X) = r \frac{1-p}{p^2}.$$

Q6) $Z(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. $(\{X=k\})_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. Soit $n \in \mathbb{N}$.

La formule des probabilités totales donne: $P(Z=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\{X+Y=n\} \cap \{X=k\})$.

$$P(Z=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\{X=k\} \cap \{Y=n-k\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) P(Y=n-k) = \sum_{k=0}^n P(X=k) P(Y=n-k).$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 X, Y sont indépendantes $Y(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$

$$P(Z=n) = \sum_{k=0}^n \left[\frac{r^k}{k!} p^r (1-p)^{n-k} \right] \left[\frac{s^{n-k}}{(n-k)!} p^s (1-p)^{n-k} \right] = p^{r+s} (1-p)^n \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} r^k s^{n-k}.$$

$$\uparrow$$

$$\begin{cases} X \sim \text{BN}(r, p) \\ Y \sim \text{BN}(s, p) \end{cases}$$

$$P(Z=n) = p^{r+s} (1-p)^n \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k s^{n-k}}_{(r+s)^n \text{ d'après § 2 c)}}$$

donc $Z(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Z=n) = \frac{(r+s)^n}{n!} p^{r+s} (1-p)^n$.

Ainsi Z suit la loi $\text{BN}(r+s, p)$.

PARTIE II Inégalités stochastiques

Q7 Soit $x \in \mathbb{R}$. $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \geq x \Rightarrow Y(\omega) \geq x$ car $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$.

donc $\{X \geq x\} \subset \{Y \geq x\}$. La croissances de P donne : $P(X \geq x) \leq P(Y \geq x)$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X \geq x) \leq P(Y \geq x)$. X est stochastiquement inférieure à Y .

Si $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$ (donc $X \leq Y$), X est stochastiquement inférieure à Y .

Q8 $X \hookrightarrow \mathcal{N}(-1, 1)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(1, 1)$, X et Y sont indépendantes.

Nous noterons F_X (resp. F_Y) la fonction de répartition de X (resp. Y).

a) Pour $\alpha = P(\{X \geq 0\} \cap \{Y < 0\})$.

Pour indépendance : $\alpha = P(X \geq 0) P(Y < 0) = (1 - P(X < 0)) P(Y < 0) = (1 - P(X \leq 0)) P(Y < 0)$.

$\alpha = \left(1 - P\left(\frac{X - (-1)}{1} \leq \frac{0 - (-1)}{1}\right)\right) P\left(\frac{Y - 1}{1} \leq \frac{0 - 1}{1}\right)$. Or $\frac{X - (-1)}{1}$ et $\frac{Y - 1}{1}$ suivent la loi

normale centrée réduite.

donc $\alpha = \left(1 - \Phi\left(\frac{0 - (-1)}{1}\right)\right) \Phi\left(\frac{0 - 1}{1}\right) = (1 - \Phi(1)) \Phi(-1) = (1 - \Phi(1)) (1 - \Phi(1))$.

Finalement $P(\{X \geq 0\} \cap \{Y < 0\}) = (1 - \Phi(1)) \Phi(-1) = (1 - \Phi(1))^2$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. $P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - P\left(\frac{X - (-1)}{1} \leq \frac{x - (-1)}{1}\right)$.

$P(X \geq x) = 1 - \Phi(x+1)$ car $\frac{X - (-1)}{1} \hookrightarrow \mathcal{P}(0, 1)$.

$P(Y \geq x) = 1 - P(Y < x) = 1 - P(Y \leq x) = 1 - P\left(\frac{Y - 1}{1} \leq \frac{x - 1}{1}\right) = 1 - \Phi(x-1)$ car $\frac{Y - 1}{1} \hookrightarrow \mathcal{P}(0, 1)$.

Φ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $x-1 \leq x+1$ donc $\Phi(x-1) \leq \Phi(x+1)$. $1 - \Phi(x-1) \geq 1 - \Phi(x+1)$.

Ainsi $P(Y \geq x) = 1 - \Phi(x-1) \geq 1 - \Phi(x+1) = P(X \geq x)$. $P(X \leq x) \leq P(Y \leq x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X \geq x) \leq P(Y \geq x)$. X est stochastiquement inférieure à Y .

c) V1 Supposons que $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$.

donc $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \geq 0 \Rightarrow Y(\omega) \geq 0$. $\{X \geq 0\} \subset \{Y \geq 0\}$.

Par conséquent $\{X \geq 0\} \cap \{Y < 0\} = \emptyset$ d'ac $P(\{X \geq 0\} \cap \{Y < 0\}) = 0$.

d'aprè $\subseteq (1 - \phi(1))^2 = 0$. $1 - \phi(1) = 0$. $\phi(1) = 1$. Ce $\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) \in]0, 1[\subseteq$

d'ac $\omega \in \mathbb{R}$ pas $\forall \omega \in \mathbb{R}, X(\omega) \leq Y(\omega)$.

V2 Supposons que $\forall \omega \in \mathbb{R}, X(\omega) \leq Y(\omega)$. Alors $\forall \omega \in \mathbb{R}, X(\omega) - Y(\omega) \leq 0$.

d'ac $P(X - Y \leq 0) = 1$.

$X \in \mathcal{N}(-1, 1^2)$, $Y \in \mathcal{N}(1, 1^2)$, X et Y sont indépendantes.

d'ac $X \in \mathcal{N}(-1, 1^2)$, $-Y \in \mathcal{N}(-1, 1^2)$, X et $-Y$ sont indépendantes. La réaction de stabilité sur les lois normales mène que $X + (-Y) \in \mathcal{N}(-1 + (-1), (\sqrt{1+1})^2)$.

$X - Y \in \mathcal{N}(-2, (\sqrt{2})^2)$. Alors $1 = P(X - Y \leq 0) = P\left(\frac{X - Y - (-2)}{\sqrt{2}} \leq \frac{0 - (-2)}{\sqrt{2}}\right)$.

Ce $\frac{X - Y - (-2)}{\sqrt{2}} \in \mathcal{N}(0, 1)$. d'ac $1 = \phi\left(\frac{0 - (-2)}{\sqrt{2}}\right) = \phi(\sqrt{2})$.

Ce $\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) \in]0, 1[\subseteq$. Par conséquent $\omega \in \mathbb{R}$ pas $\forall \omega \in \mathbb{R}, X(\omega) \leq Y(\omega)$

Q9 * Supposons que X est stochastiquement inférieure à Y .

$\forall x \in \mathbb{R}, P(X \geq x) \leq P(Y \geq x)$. X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$

Soit $k \in \mathbb{N}$. $P(X \leq k) = 1 - P(X > k) = 1 - P(X \geq k+1)$.

$P(X \leq k) = 1 - P(X \geq k+1)$ et de même $P(Y \leq k) = 1 - P(Y \geq k+1)$.

Ce $P(X \geq k+1) \leq P(Y \geq k+1)$ d'ac $P(X \leq k) = 1 - P(X \geq k+1) \geq 1 - P(Y \geq k+1) = P(Y \leq k)$.

$\forall k \in \mathbb{N}, P(X \leq k) \geq P(Y \leq k)$

* Réciproquement supposons que $\forall k \in \mathbb{N}, P(X \leq k) \geq P(Y \leq k)$ et montrons que

X est stochastiquement inférieure à Y . Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $P(X \geq x) \leq P(Y \geq x)$.

1er cas. $x \in]- \infty, 0]$. Comme X et Y prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}$:

$P(X \geq x) = P(Y \geq x) = 1$. Alors $P(X \geq x) \leq P(Y \geq x)$!

2^{ème} Cas... $x \in]0, +\infty[$ et x n'est pas entier. Posons $k_x = \text{Ent}(x) = \lfloor x \rfloor$.

$$P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \leq k_x). \text{ de même } P(Y \geq x) = 1 - P(Y \leq k_x).$$

$$\text{Or } k_x \in \mathbb{N} \text{ car } x > 0 \text{ donc } P(X \leq k_x) \geq P(Y \leq k_x).$$

$$\text{donc } P(X \geq x) = 1 - P(X \leq k_x) \leq 1 - P(Y \leq k_x) = P(Y \geq x). \quad P(X \geq x) \leq P(Y \geq x).$$

3^{ème} Cas... $x \in]0, +\infty[$ et x est entier. Alors $x \in \mathbb{N}^*$ donc $x-1 \in \mathbb{N}$.

$$P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \leq x-1). \text{ de même } P(Y \geq x) = 1 - P(Y \leq x-1).$$

$$\text{Or } x-1 \in \mathbb{N} \text{ donc } P(X \leq x-1) \geq P(Y \leq x-1). \text{ donc } P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x-1) \leq 1 - P(Y \leq x-1) = P(Y \geq x).$$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}, P(X \geq x) \leq P(Y \geq x)$. X est stochastiquement inférieure à Y .

Si X et Y sont discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$, X est stochastiquement inférieure à Y si et

seulement si $\forall k \in \mathbb{N}, P(X \leq k) \geq P(Y \leq k)$.

(Q10) a) • X et Z sont indépendantes.

• X suit la loi de Poisson de paramètre θ et Z suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda - \theta$.

Le théorème de stabilité du cours sur les lois de Poisson montre que $X+Z$ suit la loi de Poisson de paramètre $\theta + (\lambda - \theta)$.

Ainsi $X+Z$ suit la loi de Poisson de paramètre λ .

b) Notons que : $\forall x, y$ X et Y sont discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$

$\Leftrightarrow Y$ a même loi que $X+Z$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \{X+Z \leq k\} \subset \{X \leq k\} \text{ car } Z \text{ prend ses valeurs dans } \mathbb{N}.$$

$$\text{Par croissance de } P: \forall k \in \mathbb{N}, P(Y \leq k) = P(X+Z \leq k) \leq P(X \leq k).$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X \leq k) \geq P(Y \leq k). \quad \text{a) permet alors de dire que } \underline{\underline{X \text{ est stochastiquement inférieure à } Y.}}$$

(Q11) a) Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\forall j \in \mathbb{N}, u_j = \frac{e^t}{j!}$ et $\forall i \in \mathbb{N}, s_i = \sum_{j=0}^i \frac{e^t}{j!}$.

$$\text{Notons que: } u_0 = s_0 = 1. \quad \forall j \in \mathbb{N}^*, u_j = \frac{t}{j} u_{j-1}, \quad \forall j \in \mathbb{N}^*, s_j = s_{j-1} + u_j.$$

notons pour finir que $F(t, k) = S_k e^{-t}$. Il n'y a alors plus de difficulté pour écrire la fonction suite.

```

function suite (k: integer; t: real): real;
var j: integer; u, s: real;
begin
  u := 1; s := 1;
  for j := 1 to k do
    begin
      u := u * t / j; s := s + u;
    end;
  suite := s * exp(-t);
end;

```

b) soit $k \in \mathbb{N}$. Posons $\forall t \in]0, +\infty[$, $\psi_k(t) = \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} e^{-t}$.

$t \mapsto \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!}$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$. Alors par produit ψ_k est dérivable

sur $]0, +\infty[$.

$$\text{1^{er} cas... } k \geq 1. \forall t \in]0, +\infty[, \psi'_k(t) = \sum_{j=0}^k j \frac{t^{j-1}}{j!} e^{-t} + \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} (-e^{-t}). \quad \swarrow i=j+1$$

$$\forall t \in]0, +\infty[, \psi'_k(t) = \sum_{j=1}^k \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{-t} + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} (-e^{-t}) = -\frac{t^k}{k!} e^{-t}.$$

$$\text{2nd cas... } k=0 \quad \forall t \in]0, +\infty[, \psi_k(t) = e^{-t}, \quad \forall t \in]0, +\infty[, \psi'_k(t) = -e^{-t} = -\frac{t^0}{0!} e^{-t} = -\frac{t^k}{k!} e^{-t}.$$

dans les deux cas $\forall t \in]0, +\infty[, \psi'_k(t) = -\frac{t^k}{k!} e^{-t} < 0$. ψ_k est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

ψ_k est continue sur $]0, +\infty[$ car ψ_k est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \psi_k(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} e^{-t} \right) = 1 \text{ et, par croissance comparée } \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi_k(t) = 0.$$

le théorème de la bijection permet de dire que ψ_k est une bijection de $]0, +\infty[$ sur

$]0, 1[$.

Alors $\forall \beta \in]0, 1[$, $\exists ! \pi(\beta, \varepsilon) \in]0, +\infty[$, $\varphi_\varepsilon(\pi(\beta, \varepsilon)) = \beta$.

Pour tout ε dans $\mathbb{N}$ et pour tout réel β appartenant à $]0, 1[$, il existe un unique réel $\pi(\beta, \varepsilon)$ strictement positif tel que $F(\pi(\beta, \varepsilon), \varepsilon) = \beta$.

Q12 dans $a], b], c]$ il y a un réel vérifiant $0 < \alpha < 1$... sans mention du contraire.

a) Supposons que $\{k \in \mathbb{N} \mid G(k) \geq \alpha\}$ soit vide.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $G(k) < \alpha$. G est une fonction de répartition donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} G(k) = 1$.

Ainsi $\lim_{k \rightarrow +\infty} G(k) = 1$. Alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $G(k) \geq \alpha$; $\alpha > 1$!!

Par conséquent $\{k \in \mathbb{N} \mid G(k) \geq \alpha\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Or cette partie possède un minimum que nous notons L_α . $L_\alpha = \min \{k \in \mathbb{N} \mid G(k) \geq \alpha\}$ existe.

$L_\alpha \in \min \{k \in \mathbb{N} \mid G(k) \geq \alpha\}$ donc $G(L_\alpha) \geq \alpha$.

1^{er} cas. $L_\alpha \geq 1$. Alors $L_\alpha - 1 \in \mathbb{N}$, $L_\alpha - 1 < L_\alpha = \min \{k \in \mathbb{N} \mid G(k) \geq \alpha\}$.

Ainsi $G(L_\alpha - 1) < \alpha$.

2nd cas. $L_\alpha = 0$. G est la fonction de répartition de X qui prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

donc $G(L_\alpha - 1) = G(-1) = P(X \leq -1) = 0 < \alpha$. Or comme $G(L_\alpha - 1) < \alpha$.

Finalement $G(L_\alpha - 1) < \alpha \leq G(L_\alpha)$.

Certains

b) Remarque. $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \leq L_\alpha - 1 \Rightarrow G(k) \leq G(L_\alpha - 1) < \alpha$. (1)

$\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq L_\alpha \Rightarrow G(k) \geq G(L_\alpha) \geq \alpha$. (2)

• Soit $\omega \in \Omega$. $W(\omega) < \alpha \Leftrightarrow G(X(\omega)) < \alpha \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$, $X(\omega) = k$ et $G(k) < \alpha$.

$W(\omega) < \alpha \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$, $X(\omega) = k$ et $k \leq L_\alpha - 1 \leftarrow (1) \text{ et } (2)$

Si $L_\alpha = 0$ alors $L_\alpha - 1 = -1$ donc $\{\omega \in \Omega \mid W(\omega) < \alpha\} = \emptyset \in \mathcal{B}$.

Supposons $L_\alpha \geq 1$. $\forall \omega \in \Omega$, $W(\omega) < \alpha \Leftrightarrow \exists k \in [0, L_\alpha - 1]$, $X(\omega) = k$.

$$\{\omega \in \Omega \mid W(\omega) < \alpha\} = \bigcup_{k=0}^{L_\alpha-1} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\} = \bigcup_{k=0}^{L_\alpha-1} (X^{-1}(\{k\})).$$

X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ donc $\forall k \in \mathbb{N}, X^{-1}(\{k\}) \in \mathcal{F}$.

comme $\mathcal{F}$ est stable par réunion: $\{\omega \in \Omega \mid W(\omega) < \alpha\} \in \mathcal{F}$.

Sans les deux cas $\{\omega \in \Omega \mid W(\omega) < \alpha\} \in \mathcal{F}$. $\{W < \alpha\}$ est un événement.

Remarque. - Sans les deux cas $\{W < \alpha\} = \{X \leq L_{\alpha-1}\}$. ce résultat est à mémoriser.

• Soit $\omega \in \Omega$.

$$V(\omega) \geq \alpha \Leftrightarrow G(X(\omega)-1) \geq \alpha \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, X(\omega) = k \text{ et } G(k-1) \geq \alpha.$$

$$G(-1) = P(X \leq -1) = 0. \quad \text{H} \rightarrow \quad \begin{matrix} (1) \text{ et } (2) \\ \downarrow \\ \exists k \in \mathbb{N}^n, X(\omega) = k \text{ et } G(k-1) \geq \alpha \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^n, X(\omega) = k \text{ et } k-1 \geq L_{\alpha} \end{matrix}$$

$$V(\omega) \geq \alpha \Leftrightarrow \exists k \in [L_{\alpha}+1, +\infty[, X(\omega) = k \Leftrightarrow X(\omega) \geq L_{\alpha}+1.$$

$$\{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geq \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq L_{\alpha}+1\} = X^{-1}([L_{\alpha}+1, +\infty[) \in \mathcal{F}$$

$\uparrow$ X est une variable aléatoire.

$\{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geq \alpha\} \in \mathcal{F}$. $\{V \geq \alpha\}$ est un événement.

Nous venons de voir que: $\forall \alpha \in]0,1[, \{W < \alpha\} \in \mathcal{F}$ et $\{V \geq \alpha\} \in \mathcal{F}$. Examinons les cas $\alpha \leq 0$ et $\alpha \geq 1$.

▲ Soit $\alpha \in]-\infty, 0]$.

$$\{\omega \in \Omega \mid W(\omega) < \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)) < \alpha\} = \emptyset \text{ car } G(\mathbb{R}) \subset [0,1] \text{ et } \alpha \leq 0.$$

$$\{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geq \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)-1) \geq \alpha\} = \Omega \text{ car } G(\mathbb{R}) \subset [0,1] \text{ et } \alpha \leq 0.$$

donc $\{\omega \in \Omega \mid W(\omega) < \alpha\} \in \mathcal{F}$ et $\{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geq \alpha\} \in \mathcal{F}$. $\{W < \alpha\}$ et $\{V \geq \alpha\}$ sont donc des événements.

▲ Soit $\alpha \in [1, +\infty[$.

$$\{\omega \in \Omega \mid W(\omega) < \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)) < \alpha\} \text{ et } \{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geq \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)-1) \geq \alpha\}.$$

1^{er} cas. $\alpha > 1$.

$$\{\omega \in \Omega \mid W(\omega) < \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)) < \alpha\} \stackrel{G(\mathbb{R}) \subset [0,1]}{\downarrow} = \Omega \in \mathcal{F}. \quad \{W < \alpha\} \text{ est un événement.}$$

$$\{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geq \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)-1) \geq \alpha\} = \emptyset \in \mathcal{F}. \quad \{V \geq \alpha\} \text{ est un événement.}$$

$\uparrow G(\mathbb{R}) \subset [0,1]$

2nd cas. $\alpha = 1$.

$$\{\omega \in \Omega \mid W(\omega) < \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid W(\omega) < 1\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)) < 1\}.$$

$$\{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geq \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)-1) \geq \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)-1) \geq 1\}.$$

Envisageons aussi deux cas :

$$a) \forall x \in \mathbb{R}, G(x) \leq 1.$$

Alors $\{\omega \in \Omega \mid W(\omega) \leq x\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)) \leq 1\} = \Omega \in \mathcal{G}$. $\{W \leq x\}$ est un événement.

$\{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geq x\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega) - 1) \geq 1\} = \emptyset \in \mathcal{G}$. $\{V \geq x\}$ est un événement.

$$b) \exists x_0 \in \mathbb{R}, G(x_0) = 1. \quad x \text{ prend ses valeurs dans } \mathbb{N} \text{ donc } \forall x \in]-\infty, 0[, G(x) = P(X \leq x) = 0.$$

$$\text{Alors } x_0 \in [0, +\infty[. \text{ Posons } k_0 = \inf(x_0) + 1. \quad 1 = G(x_0) \leq G(k_0) \leq 1. \quad G(k_0) = 1.$$

Alors $\{k \in \mathbb{N} \mid G(k) = 1\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Elle possède un plus petit élément que nous notons k_1 . Nécessairement $G(k_1 - 1) < 1$.

Pour conclure de G : $\forall k \in [k_1, +\infty[, G(k) = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N} \cap]-\infty, k_1 - 1[, G(k) < 1$.

$$\{\omega \in \Omega \mid W(\omega) \leq x\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)) \leq x\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)) \leq 1\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq k_1 - 1\} \in \mathcal{G}.$$

$$\{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geq x\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega) - 1) \geq x\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega) - 1) \geq 1\}. \quad \leftarrow \{W \leq x\} \text{ est un événement.}$$

$$\{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geq x\} = \{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega) - 1) = 1\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) - 1 \geq k_1\}$$

$$\{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geq x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq k_1 + 1\} \in \mathcal{G}. \quad \{V \geq x\} \text{ est un événement.}$$

cela achève de montrer (précédemment) que $\forall x \in \mathbb{R}, \{\omega \in \Omega \mid W(\omega) \leq x\} \in \mathcal{G}$

et $\{\omega \in \Omega \mid V(\omega) \geq x\} \in \mathcal{G}$ ou que $\forall x \in \mathbb{R}, \{W \leq x\}$ et $\{V \geq x\}$ sont des événements.

Il va falloir accorder une pause pour retrouver la définition d'une variable aléatoire propre à notre cours... Posons $V' = -V$ et $W' = -W$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \{W' \leq x\} = \{-W \leq x\} = \{W \geq -x\} = \overline{\{W < -x\}} \in \mathcal{G} \quad (\{W < -x\} \in \mathcal{G} \text{ et } \mathcal{G} \text{ est stable par passage au complémentaire}).$$

$\mathcal{G}$ est stable par passage au complémentaire).

$\forall x \in \mathbb{R}, \{W' \leq x\} \in \mathcal{G}$. Alors W' est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ donc

$W = -W'$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{G}, P)$!

$\forall x \in \mathbb{R}, \{V' \leq x\} = \{-V \leq x\} = \{V \geq -x\} \in \mathcal{G}$. Donc V' est une variable aléatoire

sur $(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Alors $V = -V'$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{G}, P)$!

Finalement W et V sont deux variables aléatoires de $(\mathcal{E}, \mathcal{F}, P)$.

c) On repartici α dans $]0, 1[$. Nous avons vu plus haut que :

$$\bullet \text{ si } L_k > 1: \{W < \alpha\} = \bigcup_{\ell=0}^{L_k-1} \{X = \ell\} = \{X \leq L_k - 1\}.$$

$$\bullet \text{ si } L_k = 0 \quad \{W < \alpha\} = \emptyset = \{X \leq L_k - 1\} \text{ car } L_k - 1 = -1 \text{ et } X \text{ prend ses valeurs dans } \mathbb{N}.$$

$$\text{D'où dans les deux cas } P(W < \alpha) = P(X \leq L_k - 1) = G(L_k - 1).$$

$$\bullet \{W \in \mathcal{E} \mid V(W) \geq \alpha\} = \{W \in \mathcal{E} \mid X(W) \geq L_k + 1\}.$$

$$P(V \geq \alpha) = P(X \geq L_k + 1) = 1 - P(X < L_k + 1) = 1 - P(X \leq L_k) = 1 - G(L_k).$$

$\uparrow$
X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$

$$\forall \alpha \in]0, 1[, \quad P(W < \alpha) = G(L_k - 1) \text{ et } P(V \geq \alpha) = 1 - G(L_k).$$

d) Notons que a) et c) permettent d'écrire :

$$\bullet \forall \alpha \in]0, 1[, \quad \underline{P(W < \alpha) = G(L_k - 1) < \alpha} \text{ et } \underline{P(V \geq \alpha) = 1 - G(L_k) \leq 1 - \alpha}.$$

$G(L_k) \geq \alpha$
 $\downarrow$

$$\text{d'où } \forall \alpha \in]0, 1[, \quad P(W \geq \alpha) = 1 - P(W < \alpha) > 1 - \alpha = 1 - P(U \leq \alpha) = P(U > \alpha) = P(U \geq \alpha).$$

$$\forall \alpha \in]0, 1[, \quad P(V \geq \alpha) \leq 1 - \alpha = 1 - P(U \leq \alpha) = P(U > \alpha) = P(U \geq \alpha).$$

$$\forall \alpha \in]0, 1[, \quad \underline{P(V \geq \alpha) \leq P(U \geq \alpha) \leq P(W \geq \alpha)}.$$

Améliorer
pour 9.3.6

$$\bullet \underline{\alpha \in]-\infty, 0]}. \quad P(V \geq \alpha) = P(G(X-1) \geq \alpha) = 1. \quad P(U \geq \alpha) = 1.$$

$\uparrow G(\mathbb{N}) \subset [0, 1] \quad \uparrow U(\mathbb{N}) \subset [0, 1]$

$$P(W \geq \alpha) = P(G(X) \geq \alpha) = 1 \text{ car } G(\mathbb{N}) \subset [0, 1]$$

$$\text{Ainsi } P(V \geq \alpha) = P(U \geq \alpha) = P(W \geq \alpha) = 1; \quad \underline{P(V \geq \alpha) \leq P(U \geq \alpha) \leq P(W \geq \alpha)}.$$

$$\bullet \underline{\alpha \in]1, +\infty[}. \quad P(V \geq \alpha) = P(G(X-1) \geq \alpha) = 0 \text{ car } G(\mathbb{N}) \subset [0, 1].$$

$$P(U \geq \alpha) = 0 \text{ car } U(\mathbb{N}) \subset [0, 1]$$

$$P(W \geq \alpha) = P(G(X) \geq \alpha) = 0 \text{ car } G(\mathbb{N}) \subset [0, 1].$$

Alors $P(V \geq \alpha) = P(U \geq \alpha) = P(W \geq \alpha) = 0$. Donc $P(V \geq \alpha) \leq P(U \geq \alpha) \leq P(W \geq \alpha)$.

• Supposons que $\alpha = 1$.

$$P(U \geq 1) = P(U \geq 1) = 1 - P(U < 1) = 1 - P(U \leq 1) = 1 - 1 = 0.$$

Donc $P(U \geq \alpha) = 0$. On a donc $P(U \geq \alpha) = 0 \leq P(W \geq \alpha)$.

Ne reste plus qu'à montrer que $P(V \geq \alpha) \leq P(U \geq \alpha) = 0$. Cela revient donc à

montrer que $P(V \geq \alpha) = 0$ ou que $P(V \geq 1) = 0$.

$$P(V \geq 1) = P(G(X-1) \geq 1) = P(G(X-1) = 1) = P(\{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)-1) = 1\}).$$

↑
Gradus valeurs dans $[0, 1]$

$$\text{Posons } I = \{k \in \mathbb{N} \mid G(k-1) = 1\}.$$

Si $I = \emptyset$: $\{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)-1) = 1\} = \emptyset$ et $P(V \geq 1) = 0$. Généralisation

Supposons $I \neq \emptyset$. Soit $k \in I$. $G(k-1) = 1$. Alors $1 = G(k-1) \leq G(k) \leq 1$.

$$\text{Donc } G(k) = G(k-1) = 1. \quad P(X=k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = G(k) - G(k-1) = 0.$$

$$\text{Ainsi } \forall k \in I, P(X=k) = 0.$$

$$P(V \geq 1) = P(\{\omega \in \Omega \mid G(X(\omega)-1) = 1\}) = \sum_{k \in I} P(X=k) = 0.$$

Donc on a aussi $P(V \geq 1) = 0$.

$$\text{Alors } P(V \geq 1) = 0, P(U \geq 1) = 0 \text{ et } P(W \geq 1) \geq 0.$$

$$\text{Donc } P(V \geq 1) \leq P(U \geq 1) \leq P(W \geq 1).$$

Ceci achève de montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, P(V \geq \alpha) \leq P(U \geq \alpha) \leq P(W \geq \alpha)$.

Alors V est stochastiquement inférieure à U et U est stochastiquement inférieure à W .

Q13) $\forall Y \in \mathbb{N}^*$, $E(X_k)$ existe et vaut θ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, E(S_n) \text{ existe et vaut } \sum_{k=1}^n E(X_k) \text{ dès } n \geq \theta.$$

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}, E(\frac{1}{n} S_n) \text{ existe et vaut } \theta.$$

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\frac{1}{n} S_n$ est un estimateur sans biais de θ .

Remarque... La loi faible des grands nombres montre que $(\frac{1}{n} S_n)_{n \geq 1}$ est une suite convergente d'estimateurs sans biais de θ .

b) Rappelons d'abord un résultat important obtenu dans Q 12. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction de répartition G .

Prenons $\omega \in \mathbb{R}$, $V(\omega) = G(X(\omega)-1)$ et $W(\omega) = G(X(\omega))$.

Alors V et W sont des variables aléatoires sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$ et $\forall \alpha \in]0, 1[$, $P(W < \alpha) < \alpha$ et $P(V > \alpha) \leq 1 - \alpha$.

Fixons α dans $]0, 1[$ et soit n un élément de $]\mathbb{R}, +\infty[$.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et pour tout k dans $]\mathbb{R}, n[$, X_k suit la loi de Poisson de paramètre θ . Alors le cours indique que S_n suit la loi de Poisson de paramètre $n\theta$. Notons F_{S_n} la fonction de répartition. S_n est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Le rappel que nous venons de faire nous permet de dire que :

$$P(G_{S_n}(S_n) < \frac{\alpha}{2}) < \frac{\alpha}{2} \text{ et } P(G_{S_n}(S_n-1) > 1 - \frac{\alpha}{2}) \leq 1 - (1 - \frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2} \text{ car}$$

$$\frac{\alpha}{2} \in]0, 1[\text{ et } 1 - \frac{\alpha}{2} \in]0, 1[.$$

$$\text{Or } \forall \omega \in \mathbb{R}, G_{S_n}(S_n(\omega)) = \sum_{k=0}^{S_n(\omega)} P(S_n = k) = \sum_{k=0}^{S_n(\omega)} \frac{(n\theta)^k}{k!} e^{-n\theta} = F(n\theta, S_n(\omega)).$$

$$\text{D'où } G_{S_n}(S_n) = F(n\theta, S_n).$$

$$\text{Alors } P(F(n\theta, S_n) < \frac{\alpha}{2}) = P(G_{S_n}(S_n) < \frac{\alpha}{2}) < \frac{\alpha}{2}. \quad P(F(n\theta, S_n) < \frac{\alpha}{2}) < \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{ce qui donne également } \underline{\underline{P(F(n\theta, S_n) < \frac{\alpha}{2}) \leq \frac{\alpha}{2}}}.$$

Le second point est un peu plus problématique... Notons que si $\omega \in \mathbb{R}$ et si $S_n(\omega) = 0$: $F(n\theta, S_n(\omega)-1)$ n'a pas de sens car $F(t, k)$ n'a été défini que pour $t \in]0, +\infty[$ et k dans $\mathbb{N}$.

Pour obtenir le résultat demandé nous nous autoriserons à poser

$$\underline{\underline{\forall t \in]0, +\infty[, F(t, -1) = 0!}}$$

Soit $\omega \in \mathbb{R}$. 1^{er} cas... supposons que $S_n(\omega) \geq 1$.

$$G_{S_n}(S_n(\omega) - 1) = \sum_{k=0}^{S_n(\omega)-1} P(S_n = k) = \sum_{k=0}^{S_n(\omega)-1} \frac{(n\theta)^k}{k!} e^{-n\theta} = F(n\theta, S_n(\omega) - 1).$$

2^{de} cas... $S_n(\omega) = 0$.

S_n prend des valeurs dans $\mathbb{N}$

$$G_{S_n}(S_n(\omega) - 1) = G_{S_n}(-1) \stackrel{\downarrow}{=} 0 = F(n\theta, -1) = F(n\theta, S_n(\omega) - 1).$$

$\uparrow$ avec la convention proposée.

Donc $G_{S_n}(S_n - 1) = F(n\theta, S_n - 1)$.

Alors $P(F(n\theta, S_n - 1) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}) = P(G_{S_n}(S_n - 1) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}) \leq \frac{\alpha}{2}$.

$P(F(n\theta, S_n - 1) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}) \leq \frac{\alpha}{2}$... avec la convention proposée.

Remarque... Retenons que le résultat proposé peut s'énoncer sans ambiguïté de la manière suivante. Soit G_{S_n} la fonction de répartition de S_n .

$$P(G_{S_n}(S_n) < \frac{\alpha}{2}) \leq \frac{\alpha}{2} \text{ et } P(G_{S_n}(S_n - 1) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}) \leq \frac{\alpha}{2} \text{ ou}$$

$$P(G_{S_n} \circ S_n < \frac{\alpha}{2}) \leq \frac{\alpha}{2} \text{ et } P(G_{S_n} \circ (S_n - 1) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

cl Rappel. Soit $R \in \mathbb{N}$. Soit $\beta \in]0, 1[$. $t \mapsto F(t, R)$ est strictement décroissante sur

$$]0, +\infty[\text{ et } \exists ! \pi(\beta, R) \in]0, +\infty[, F(\pi(\beta, R), R) = \beta.$$

Alors $\forall t \in]0, +\infty[, t < \pi(\beta, R) \Leftrightarrow F(t, R) > F(\pi(\beta, R), R) = \beta$ et

$\forall t \in]0, +\infty[, t > \pi(\beta, R) \Leftrightarrow F(t, R) < F(\pi(\beta, R), R) = \beta.$

Il convient de noter que :

$$\forall \omega \in \Omega, I(\lambda_1(\omega), \lambda_2(\omega), \dots, \lambda_n(\omega)) \leq J(\lambda_1(\omega), \lambda_2(\omega), \dots, \lambda_n(\omega)).$$

$$\text{et } P(\theta \notin [I(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), J(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)]) \leq \alpha. \text{ ou que}$$

$$P(\theta < I(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)) + P(\theta > J(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)) \leq \alpha.$$

1°) soit $\omega \in \Omega$.

* Supposons $S_n(\omega) = 0$. Alors $J(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) = \frac{1}{n} \Pi(\frac{\alpha}{2}, S_n(\omega)) > 0$

et $I(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) = 0$.

Ainsi $I(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) \leq J(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$.

* Supposons $S_n(\omega) \in \mathbb{N}^*$.

$\downarrow \kappa \in \mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{Z}$

$$F(\Pi(\frac{\alpha}{2}, S_n(\omega)), S_n(\omega)) = \frac{\alpha}{2} < 1 - \frac{\alpha}{2} = F(\Pi(1 - \frac{\alpha}{2}, S_n(\omega) - 1), S_n(\omega) - 1).$$

$\uparrow$
par définition de $\Pi(\frac{\alpha}{2}, S_n(\omega))$

$\nwarrow$
par définition de $\Pi(1 - \frac{\alpha}{2}, S_n(\omega) - 1)$

$$\text{Or } F(\Pi(1 - \frac{\alpha}{2}, S_n(\omega) - 1), S_n(\omega) - 1) < F(\Pi(1 - \frac{\alpha}{2}, S_n(\omega) - 1), S_n(\omega))$$

$\uparrow$ suite de la définition de F

$$\text{Or } F(\Pi(\frac{\alpha}{2}, S_n(\omega)), S_n(\omega)) < F(\Pi(1 - \frac{\alpha}{2}, S_n(\omega) - 1), S_n(\omega))$$

la décroissance stricte donnée en 1. b. donne alors : $\Pi(\frac{\alpha}{2}, S_n(\omega)) > \Pi(1 - \frac{\alpha}{2}, S_n(\omega) - 1)$.

En multipliant par $\frac{1}{n}$ il vient $J(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) > I(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$.

Finalement pour tout ω dans Ω , $I(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) \leq J(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$.

$$\text{donc } \underline{I(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq J(X_1, X_2, \dots, X_n)}.$$

2°) notons que $P(\Theta \notin [J(X_1, X_2, \dots, X_n), J(X_1, X_2, \dots, X_1)]) \leq \alpha$ ou que :

$$P(\Theta < J(X_1, X_2, \dots, X_n)) + P(\Theta > J(X_1, X_2, \dots, X_n)) \leq \alpha$$

en fait nous allons montrer que :

$$\rightarrow P(\Theta < J(X_1, X_2, \dots, X_n)) \leq \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{et } \rightarrow P(\Theta > J(X_1, X_2, \dots, X_n)) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Commençons par le second point.

$$P(\theta > J(x_1, x_2, \dots, x_n)) = P(\theta > \frac{1}{n} \pi(\frac{\alpha}{2}, S_n)) = P(n\theta > \pi(\frac{\alpha}{2}, S_n)).$$

$$P(\theta > J(x_1, x_2, \dots, x_n)) = P(\{\omega \in \Omega \mid n\theta > \pi(\frac{\alpha}{2}, S_n(\omega))\}) \stackrel{\text{appel à 11c}}{=} P(\{\omega \in \Omega \mid F(n\theta, S_n(\omega)) < \frac{\alpha}{2}\})$$

appel à 11c ($n\theta > 0$, $S_n(\omega) \in \mathbb{N}$ et $\frac{\alpha}{2} \in]0, 1[$)

$$P(\theta > J(x_1, x_2, \dots, x_n)) = P(F(n\theta, S_n) < \frac{\alpha}{2}) \leq \frac{\alpha}{2} \text{ d'après } \beta$$

$$P(\theta > J(x_1, x_2, \dots, x_n)) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Pour alléger l'écriture posons $I_n = I(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$\{S_n = 0\}, \{S_n \geq 1\}$ est un système complet d'événements.

$$\text{Alors } P(\theta < I(x_1, x_2, \dots, x_n)) = P(\theta < I_n) = P(\theta < I_n \mid \{S_n = 0\}) + P(\theta < I_n \mid \{S_n \geq 1\})$$

$$\text{Or } P(\theta < I_n \mid \{S_n = 0\}) = P(\theta < 0 \mid \{S_n = 0\}) = 0 \text{ car } \theta > 0.$$

$$\text{donc } P(\theta < I_n) = P(\{S_n \geq 1\} \cap \{\theta < \frac{1}{n} \pi(1 - \frac{\alpha}{2}, S_n - 1)\})$$

$$P(\theta < I_n) = P(\{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \geq 1 \text{ et } n\theta < \pi(1 - \frac{\alpha}{2}, S_n(\omega) - 1)\})$$

$$P(\theta < I_n) = P(\{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \geq 1 \text{ et } F(n\theta, S_n(\omega) - 1) > 1 - \frac{\alpha}{2}\})$$

↑
appel

$$P(\theta < I_n) = P(\{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \geq 1 \text{ et } F_{S_n}(S_n(\omega) - 1) > 1 - \frac{\alpha}{2}\})$$

$$\text{Or } \{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \geq 1 \text{ et } F_{S_n}(S_n(\omega) - 1) > 1 - \frac{\alpha}{2}\} \subset \{\omega \in \Omega \mid F_{S_n}(S_n(\omega) - 1) > 1 - \frac{\alpha}{2}\}$$

$$\text{puisque } \{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \geq 1 \text{ et } F_{S_n}(S_n(\omega) - 1) > 1 - \frac{\alpha}{2}\} \subset \{\omega \in \Omega \mid F_{S_n}(S_n(\omega) - 1) > 1 - \frac{\alpha}{2}\}.$$

$$\text{Alors } P(\theta < I_n) \leq P(\{\omega \in \Omega \mid F_{S_n}(S_n(\omega) - 1) > 1 - \frac{\alpha}{2}\}) \leq \frac{\alpha}{2}$$

↑ d'après 9.13b)

$$\text{Ainsi } P(\theta < I_n) \leq \frac{\alpha}{2}, \quad \underline{P(\theta < I(x_1, x_2, \dots, x_n)) \leq \frac{\alpha}{2}}.$$

Ceci achève de montrer que $P(\theta \notin [I(x_1, x_2, \dots, x_n), J(x_1, x_2, \dots, x_n)]) \leq \alpha$.

$I(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $J(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont les bornes d'un intervalle de confiance de niveau inférieur ou égal à α pour le paramètre inconnu θ .

Partie III Lois de Poisson mélangées

Q14) Soit $n \in \mathbb{N}$. $t \mapsto t^n e^{-t} f(t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

* $\forall t \in]0, 1[$, $0 \leq t^n e^{-t} f(t) \leq f(t)$ et $\int_0^1 f(t) dt$ converge.

les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^1 t^n e^{-t} f(t) dt$ converge.

* $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t^n e^{-t}) = 0$ par croissance comparée. Alors :

$$\bullet \lim_{t \rightarrow +\infty} t^n e^{-t} f(t) = o(f(t))$$

facilité avec le programme 2013 !

$$\bullet \forall t \in [1, +\infty[, t^n e^{-t} f(t) \geq 0 \text{ et } f(t) \geq 0$$

$\uparrow$ positif !

$$\bullet \int_1^{+\infty} f(t) dt \text{ converge.}$$

les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t} f(t) dt$ converge.

Alors $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} f(t) dt$ converge et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Q15) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que nous avons montré dans Q11 b) que $t \mapsto F(t, n)$ définit une bijection continue strictement décroissante de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$. Alors :

$$1) \forall t \in]0, +\infty[, 0 < F(t, n) < 1.$$

$$2) \forall t \in]0, A], F(t, n) \geq F(A, n) = \sum_{j=0}^n \frac{A^j}{j!} e^{-A} = \sum_{j=0}^n P(X_A = j) = P(X_A \leq n).$$

$$1. v_n = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^n \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!} e^{-t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt - \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} e^{-t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt - \int_0^{+\infty} F(t, n) f(t) dt$$

$$1. v_n = \int_0^{+\infty} (1 - F(t, n)) f(t) dt.$$

$$2. \forall t \in]0, +\infty[, 1 - F(t, n) \geq 0 \text{ et } f(t) \geq 0 \text{ d'où } \forall t \in]0, +\infty[, (1 - F(t, n)) f(t) \geq 0.$$

Alors $1 - U_n = \int_0^{+\infty} (1 - F(t, n)) f(t) dt \geq 0$ (car $0 \leq t < +\infty$). $1 - U_n \geq 0$.

$$1 - U_n = \int_0^{+\infty} (1 - F(t, n)) f(t) dt = \int_0^A (1 - F(t, n)) f(t) dt + \int_A^{+\infty} (1 - F(t, n)) f(t) dt.$$

$\forall t \in]0, A], F(t, n) \geq F(A, n)$ car $\forall t \in]0, A], 1 - F(t, n) \leq 1 - F(A, n)$ et $f(t) \geq 0$.

Alors $\forall t \in]0, A], (1 - F(t, n)) f(t) \leq (1 - F(A, n)) f(t) = (1 - P(X_A \leq n)) f(t) = P(X_A > n) f(t)$.

Alors $\int_0^A (1 - F(t, n)) f(t) dt \leq \int_0^A P(X_A > n) f(t) dt$ car $0 < A$ et toutes les intégrales convergent.

f est positive sur $]0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut 1.

Alors $\int_0^A f(t) dt \leq \int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$. de plus $P(X_A > n) \geq 0$.

donc $\int_0^A P(X_A > n) f(t) dt = P(X_A > n) \int_0^A f(t) dt \leq P(X_A > n)$.

Ainsi $\int_0^A (1 - F(t, n)) f(t) dt \leq P(X_A > n)$.

$\forall t \in [A, +\infty[, 1 - F(t, n) \leq 1$ et $f(t) \geq 0$. $\forall t \in [A, +\infty[, (1 - F(t, n)) f(t) \leq f(t)$.

Alors $\int_A^{+\infty} (1 - F(t, n)) f(t) dt \leq \int_A^{+\infty} f(t) dt$ car toutes les intégrales convergent et $A \leq +\infty$.

donc $1 - U_n = \int_0^A (1 - F(t, n)) f(t) dt + \int_A^{+\infty} (1 - F(t, n)) f(t) dt \leq P(X_A > n) + \int_A^{+\infty} f(t) dt$

$1 - U_n \leq P(X_A > n) + \int_A^{+\infty} f(t) dt$.

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq 1 - U_n \leq P(X_A > n) + \int_A^{+\infty} f(t) dt$.

b) montrons en utilisant la définition que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - U_n) = 0$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons que l'on peut trouver p_ε dans $\mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p_\varepsilon \Rightarrow |1 - v_n| < \varepsilon$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} f(t) dt = 0$ "comme reste d'une intégrale convergente".

$$\text{Ainsi } \exists B \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in]0, +\infty[, x > B \Rightarrow \int_x^{+\infty} f(t) dt = \left| \int_x^{+\infty} f(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{Choisissons } A \text{ dans }]B, +\infty[. \quad A \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \int_A^{+\infty} f(t) dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Reprenons une variable aléatoire X_A suivant la loi de Poisson de paramètre A et notons F_{X_A} sa fonction de répartition.

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq 1 - v_n \leq P(X_A > n) + \int_A^{+\infty} f(t) dt < P(X_A > n) + \frac{\varepsilon}{2} = 1 - P(X_A \leq n) + \frac{\varepsilon}{2} = 1 - F_{X_A}(n) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{X_A}(x) = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - F_{X_A}(x)) = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - F_{X_A}(n)) = 0.$$

$$\text{Ainsi } \exists p_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p_\varepsilon \Rightarrow 1 - F_{X_A}(n) = |1 - F_{X_A}(n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p_\varepsilon \Rightarrow 0 \leq 1 - v_n < 1 - F_{X_A}(n) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p_\varepsilon \Rightarrow |1 - v_n| < \varepsilon.$$

$$\text{Finalement } \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p_\varepsilon \Rightarrow |1 - v_n| < \varepsilon.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1. \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n z_k = 1.$$

$$\text{Ainsi la série de terme général } z_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} z_n = 1.$$

Q16 Soit posons $b = \frac{1-p}{p}$. $b \in \mathbb{R}_+^*$ car $p \in]0, 1[$. Rappelons que r est un réel strictement positif.

$$\text{de plus } \forall t \in]0, +\infty[, f(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \left(\frac{p}{1-p} \right)^r t^{r-1} e^{-\frac{pt}{1-p}} = \frac{t^{r-1} e^{-\frac{t}{b}}}{b^r \Gamma(r)} \text{ et } \forall t \in]-\infty, 0], f(t) = 0$$

Ainsi T suit la loi gamma de paramètres b et r .

$$\text{donc } T \text{ suit la loi gamma de paramètres } \frac{1-p}{p} \text{ et } r. \quad T \sim \Gamma\left(\frac{1-p}{p}, r\right).$$

Ainsi $E(T) = \frac{1-p}{p} \times r$ et $V(T) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 r$.

b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui suit la loi de Poisson mélangée arithmétique à la densité f . $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X=n) = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-t} f(t) dt$.

Soit $t \in]0, +\infty[$.

$$\frac{t^n}{n!} e^{-t} f(t) = \frac{t^n}{n!} e^{-t} \frac{1}{\Gamma(r)} \left(\frac{p}{1-p}\right)^r t^{r-1} e^{-\frac{pt}{1-p}} = \frac{1}{n!} \frac{1}{\Gamma(r)} \frac{p^r}{(1-p)^r} t^{n+r-1} \underbrace{e^{-t(1+\frac{p}{1-p})}}_{= e^{-\frac{t}{1-p}}}.$$

$$\frac{t^n}{n!} e^{-t} f(t) = \frac{1}{n!} \frac{1}{\Gamma(r)} \frac{p^r}{(1-p)^r} \frac{\Gamma(n+r) (1-p)^{n+r}}{(1-p)^{n+r} \Gamma(n+r)} \frac{t^{n+r-1} e^{-\frac{t}{1-p}}}{(1-p)^{n+r} \Gamma(n+r)}.$$

donc $\forall t \in]0, +\infty[$, $\frac{t^n}{n!} e^{-t} f(t) = \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(r)} p^r (1-p)^n \frac{t^{n+r-1} e^{-\frac{t}{1-p}}}{(1-p)^{n+r} \Gamma(n+r)}$.

Pour $\forall t \in \mathbb{R}$, $h(t) = \begin{cases} \frac{t^{n+r-1} e^{-\frac{t}{1-p}}}{(1-p)^{n+r-1} \Gamma(n+r)} & \text{si } t \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$n+r-1 > 0$ et $1-p > 0$ car $n \in \mathbb{N}^*$, $r \in]0, +\infty[$ et $p \in]0, 1[$.

h est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi gamma de paramètres $1-p$ et $n+r-1$. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt = 1$. Comme h est nulle sur $]-\infty, 0]$, $\int_0^{+\infty} h(t) dt = 1$.

A $\forall t \in]0, +\infty[$, $\frac{t^n}{n!} e^{-t} f(t) = \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(r)} p^r (1-p)^n h(t)$.

donc $P(X=n) = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-t} f(t) dt = \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(r)} p^r (1-p)^n \int_0^{+\infty} h(t) dt$.

donc $P(X=n) = \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(r)} p^r (1-p)^n$

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)} = r^{(k)}$.

• la propriété est vraie pour $k=0$ car $\frac{\Gamma(0+r)}{\Gamma(r)} = 1 = r^{(0)}$.

• Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}$ et vérifions la pour $k+1$.

$$\frac{p(k+r+1)}{p(r)} = \frac{(k+r)p(k+r)}{p(r)} = (k+r)r^{<k>} = r^{<k+1>} \quad \text{ceci achève la récurrence.}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $"p(k+1) = kp(k)"$ $\text{hypothèse de récurrence}$ $Q2 \text{ e)}$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{p(k+r)}{p(r)} = r^{<k>},$$

$$\text{Alors } P(X=n) = \frac{1}{n!} \frac{p(n+r)}{p(r)} p^r (1-p)^n = \frac{r^{<n>}}{n!} p^r (1-p)^n \text{ et ceci pour tout } n$$

dans $\mathbb{N}$.

Alors X suit la loi binomiale négative de paramètres r et p .

X est la loi binomiale négative $BN(r, p)$.

Q17 a) Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes telles que
 $U \hookrightarrow BN(r, p)$ et $V \hookrightarrow BN(0-r, p)$ ($r > 0$ et $p-r > 0 \dots$).

D'après Q6 $U+V \hookrightarrow BN(r+(0-r), p)$. $U+V \hookrightarrow BN(0, p)$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\{U+V \leq k\} \subset \{U \leq k\}$ car V prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(U+V \leq k) \leq P(U \leq k)$. Or $U+V$ a même loi que Z et U a même loi que Y . Soit $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(Z \leq k) \leq P(Y \leq k)$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(Y \leq k) \geq P(Z \leq k)$ comme Z et Y prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}$, Q9 permet alors de dire que

Y est stochastiquement inférieure à Z .

b) Nous allons procéder en deux étapes. Dans un premier temps nous montrons que Z est stochastiquement inférieure à W en utilisant Q16 puis nous montrons que Y est stochastiquement inférieure à W en utilisant Q17 e)
Etape 1. Montrons que Z est stochastiquement inférieure à W .

Z et W sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ d.e.c pour prouver que Z est stochastiquement inférieure à W il suffit de montrer que :

$\forall k \in \mathbb{N}, P(Z \leq k) \leq P(W \leq k)$ (comme nous l'avons vu dans 9.9).

$$\text{Pour } \forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left(\frac{p}{1-p} \right)^\lambda t^{\lambda-1} e^{-\frac{p}{1-p}t} & \text{si } t \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left(\frac{q}{1-q} \right)^\lambda t^{\lambda-1} e^{-\frac{q}{1-q}t} & \text{si } t \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$Z \hookrightarrow \text{BN}(\lambda, p)$ d.e.c $Z \hookrightarrow \mathcal{G}_g$. $W \hookrightarrow \text{BN}(\lambda, q)$ d.e.c $W \hookrightarrow \mathcal{G}_h$.

$$\text{Soit } k \in \mathbb{N}. P(Z \leq k) = \sum_{j=0}^k P(Z=j) = \sum_{j=0}^k \int_0^{+\infty} \frac{t^j}{j!} e^{-t} g(t) dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} e^{-t} \right) g(t) dt.$$

$$P(Z \leq k) = \int_0^{+\infty} F(k, t) g(t) dt. \text{ De même } P(W \leq k) = \int_0^{+\infty} F(k, t) h(t) dt.$$

$$\text{Ainsi } P(Z \leq k) = \int_0^{+\infty} F(k, t) \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left(\frac{p}{1-p} \right)^\lambda t^{\lambda-1} e^{-\frac{p}{1-p}t} dt$$

$$P(W \leq k) = \int_0^{+\infty} F(k, t) \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left(\frac{q}{1-q} \right)^\lambda t^{\lambda-1} e^{-\frac{q}{1-q}t} dt.$$

Pour comparer $P(Z \leq k)$ et $P(W \leq k)$ nous allons "transférer" $e^{-\frac{p}{1-p}t}$ à $e^{-\frac{q}{1-q}t}$ en utilisant le changement de variable $u = \frac{1-q}{q} \frac{p}{1-p} t$.

$$\frac{1-q}{q} \frac{p}{1-p} > 0 \text{ car } p \in]0, 1[\text{ et } q \in]0, 1[. \text{ Ainsi } t \mapsto \frac{1-q}{q} \frac{p}{1-p} t \text{ définit}$$

de nouveau une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ de classe

$\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Ici autoriser le changement de variable $u = \frac{1-q}{q} \frac{p}{1-p} t$ dans

$$\text{l'intégrale comparée } \int_0^{+\infty} F(k, t) g(t) dt.$$

$$\int_0^{+\infty} F(k, t) g(t) dt = \int_0^{+\infty} F(k, \frac{q}{1-q} \frac{1-p}{p} u) g\left(\frac{q}{1-q} \frac{1-p}{p} u\right) \frac{q}{1-q} \frac{1-p}{p} du.$$

Notons que la convergence de la première intégrale donne la convergence de la seconde

Soit $u \in]0, +\infty[$. Posons $\alpha(u) = g\left(\frac{q}{1-q} \frac{1-p}{p} u\right) \frac{q}{1-q} \frac{1-p}{p}$.

$$d(u) = \frac{1}{\Gamma(D)} \binom{p}{1-p}^D \left(\frac{q}{1-q} \frac{1-p}{p} u\right)^{D-1} e^{-\frac{p}{1-p} \frac{q}{1-q} \frac{1-p}{p} u} \frac{q}{1-q} \frac{1-p}{p}.$$

$$\alpha(u) = \frac{1}{\Gamma(D)} \binom{p}{1-p}^D \left(\frac{q}{1-q}\right)^D \left(\frac{1-p}{p}\right)^{D-1} u^{D-1} e^{-\frac{q}{1-q} u} \frac{q}{1-q} \frac{1-p}{p}.$$

$$\alpha(u) = \frac{1}{\Gamma(D)} \binom{p}{1-p}^D \left(\frac{q}{1-q}\right)^D \left(\frac{1-p}{p}\right)^D u^{D-1} e^{-\frac{qu}{1-q}} = \frac{1}{\Gamma(D)} \left(\frac{q}{1-q}\right)^D u^{D-1} e^{-\frac{qu}{1-q}} = h(u).$$

Ainsi $\int_0^{+\infty} F(R, t) g(t) dt = \int_0^{+\infty} F\left(R, \frac{q}{1-q} \frac{1-p}{p} u\right) g\left(\frac{q}{1-q} \frac{1-p}{p} u\right) \frac{q}{1-q} \frac{1-p}{p} du$ car :

$$\int_0^{+\infty} F(R, t) g(t) dt = \int_0^{+\infty} F\left(R, \frac{q}{1-q} \frac{1-p}{p} u\right) h(u) du.$$

Notons alors que $\int_0^{+\infty} F\left(R, \frac{q}{1-q} \frac{1-p}{p} u\right) h(u) du \leq \int_0^{+\infty} F(R, u) h(u) du$.

Soit $u \in]0, +\infty[$. $p < q$; $p \cdot pq < q - pq$; $0 < p(1-q) = p \cdot pq < q - pq = q(1-p)$.
 $\uparrow$
 $p \in]0, 1[$ et $q \in]0, 1[$

Alors $\frac{q(1-p)}{p(1-q)} > 1$ et $u > 0$ donc $\frac{q}{1-q} \frac{1-p}{p} u = \frac{q(1-p)}{p(1-q)} u > u > 0$

On nous aura vu que $z \mapsto F(R, z)$ est (strictement) décroissante sur $]0, +\infty[$.

Alors $F\left(R, \frac{q}{1-q} \frac{1-p}{p} u\right) \leq F(R, u)$. De plus $h(u) \geq 0$. Ainsi

$$F\left(R, \frac{q}{1-q} \frac{1-p}{p} u\right) h(u) \leq F(R, u) h(u) \text{ et ceci pour tout } u \text{ dans }]0, +\infty[.$$

Alors $\int_0^{+\infty} F\left(R, \frac{q}{1-q} \frac{1-p}{p} u\right) h(u) du \leq \int_0^{+\infty} F(R, u) h(u) du$ car $0 \leq +\infty$ (!) et

les deux intégrales sont convergentes. Finalement :

$$P(Z \leq R) = \int_0^{+\infty} F(R, t) g(t) dt = \int_0^{+\infty} F\left(R, \frac{q}{1-q} \frac{p}{1-p} u\right) du \leq \int_0^{+\infty} F(R, u) h(u) du = P(W \leq R).$$

$\forall k \in \mathbb{R}, P(Z \leq k) \leq P(W \leq k)$. Comme Z et W sont des variables aléatoires réelles, Q9 permet de dire que Z est stochastiquement inférieure à W .

Etape 2 Montrons que Y est stochastiquement inférieure à W .

Nous venons de voir que Z est stochastiquement inférieure à W donc

$$\forall k \in \mathbb{R}, P(Z \geq k) \leq P(W \geq k).$$

Dans Q37 a nous avons vu que Y est stochastiquement inférieure à Z donc

$$\forall k \in \mathbb{R}, P(Y \geq k) \leq P(Z \geq k).$$

$$\text{Alors } \forall k \in \mathbb{R}, P(Y \geq k) \leq P(Z \geq k) \leq P(W \geq k).$$

Ainsi Y est stochastiquement inférieure à W .