PARTIE I. Quelques résultats statistiques et algébriques

Q1 a) $S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \geqslant 0$. Supposons que $S_x^2 = 0$.

Alors $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = 0$ et $\forall i \in [\![1,n]\!], (x_i-\bar{x})^2 \geqslant 0$. Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(x_i-\bar{x})^2 = 0$.

Par conséquent : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i - \bar{x} = 0$ et ainsi : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = \bar{x}$. Ceci contredit l'hypothèse indiquant que les réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ ne sont pas tous égaux.

Donc $S_x^2 \geqslant 0$ et $S_x^2 \neq 0$. Alors $\underline{S_x^2 > 0}$.

b) • $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})y_i = \sum_{i=1}^{n}(x_iy_i) - \bar{x}\sum_{i=1}^{n}y_i = \sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \bar{x}(n\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}(x_iy_i) - n\bar{x}\bar{y}$.

• $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i + \sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\bar{x}(n\bar{x}) + n\bar{x}^2$.

$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2$

$$\underline{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})y_i = \sum_{i=1}^{n}x_iy_i - n\bar{x}\bar{y}} \quad \text{et} \quad \underline{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2} \dots \quad \underline{S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \bar{x}^2}.$$

c) • $\sum_{i=1}^{n}a_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\bar{x}}{nS_x^2} = \frac{1}{nS_x^2}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i - \sum_{i=1}^{n}\bar{x}\right] = \frac{1}{nS_x^2}\left[n\bar{x} - n\bar{x}\right] = 0$.

• $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{nS_x^2}\right)x_i = \frac{1}{nS_x^2}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i\right] = \frac{1}{nS_x^2}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \bar{x}\times n\bar{x}\right]$.

$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i = \frac{1}{nS_x^2}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2\right] \underset{\text{b)}}{=} \frac{1}{S_x^2}\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{S_x^2}\times S_x^2 = 1$.

• $\sum_{i=1}^{n}a_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{nS_x^2}\right)^2 = \frac{1}{(nS_x^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{(nS_x^2)^2}\times nS_x^2 = \frac{1}{nS_x^2}$.

$$\underline{\sum_{i=1}^{n}a_i = 0,\ \sum_{i=1}^{n}a_ix_i = 1 \ \text{et}\ \sum_{i=1}^{n}a_i^2 = \frac{1}{nS_x^2}}$$

Q2 Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\alpha\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = 0$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha x_i + \beta = 0$. Alors $\alpha x_1 = \alpha x_2 = \dots = \alpha x_n = -\beta$.

Si α n'est pas nul : $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Or les réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ ne sont pas tous égaux.
Donc $\alpha = 0$ et alors $\beta = 0$.
Ceci achève de montrer que $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Les deux colonnes de M constituent donc une famille libre.

Alors la matrice M est de rang 2.

b) $${}^tMM = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix}. \quad {}^tMM = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix}.$$

On peut encore écrire $${}^tMM = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & n\bar{x} \\ n\bar{x} & n \end{pmatrix} \text{ ou } {}^tMM \overset{Q1\,b)}{=} n \begin{pmatrix} S_x^2 + \bar{x}^2 & \bar{x} \\ \bar{x} & 1 \end{pmatrix}.$$

$${}^tMM \text{ inversible } \underset{n \neq 0}{\iff} \begin{pmatrix} S_x^2 + \bar{x}^2 & \bar{x} \\ \bar{x} & 1 \end{pmatrix} \text{ inversible } \iff \begin{vmatrix} S_x^2 + \bar{x}^2 & \bar{x} \\ \bar{x} & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \iff S_x^2 + \bar{x}^2 - \bar{x}^2 \neq 0$$

${}^tMM$ inversible $\iff S_x^2 \neq 0$. Or nous avons vu que $S_x^2 > 0$. Alors ${}^tMM$ est inversible.

(Q3) Remarques. 1.. Je n'identifierai pas $\mathbb{R}^n$ et $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

2.. Dans la suite je noterai $\|\cdot\|_n$ la norme de $\mathbb{R}^n$ associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ la norme de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Soit $\theta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$. $$\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i+b))^2 = \left\| \begin{pmatrix} y_1 - (ax_1+b) \\ y_2 - (ax_2+b) \\ \dots \\ y_n - (ax_n+b) \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|^2.$$

Donc $\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i+b))^2 = \|y - M\theta\|^2 = \|M\theta - y\|^2$.

On cherche donc $\theta \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|M\theta - y\|^2$ soit minimum ou tel que $\|M\theta - y\|$ soit minimum.

Comme $\operatorname{rg} M = 2$, le théorème de cours sur la méthode des moindres carrés permet de dire que :

1°) $\min\limits_{\theta\in M_{2,1}(\mathbb{R})} \|M\theta - y\|$ existe ;

2°) $\exists!\ \hat\theta = \binom{\hat a}{\hat b} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$, $\|M\hat\theta - y\| = \min\limits_{\theta\in M_{2,1}(\mathbb{R})}\|M\theta-y\|$;

3°) ${}^tMM\hat\theta = {}^tMy$;

3°)' ${}^tMM$ est inversible et $\hat\theta = ({}^tMM)^{-1}\,{}^tMy$.

Dans ces conditions :

1°) $\min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i-(ax_i+b))^2$ existe ;

2°) $(\hat a,\hat b)$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i-(ax_i+b))^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i-(\hat a x_i+\hat b))^2$$

3°) $\hat\theta = \binom{\hat a}{\hat b}$ vérifie la relation ${}^tMM\hat\theta = {}^tMy$... ce qui répond à la question non ? (▲)

b) ${}^tMM\hat\theta = {}^tMy$ donc $n\begin{pmatrix} s_x^2+\bar x^2 & \bar x\\ \bar x & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat a\\ \hat b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i\\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\end{pmatrix}$.

Ainsi $\begin{cases}(s_x^2+\bar x^2)\hat a + \bar x\, \hat b = \frac1n\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i\\ \bar x\,\hat a + \hat b = \frac1n \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = \bar y\end{cases}$.

Donc $\hat b = \bar y - \hat a\bar x$. En réinjectant dans la première ligne il vient

$\frac1n\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i = (s_x^2+\bar x^2)\hat a + \bar x(\bar y - \hat a\bar x) = (s_x^2+\bar x^2-\bar x^2)\hat a + \bar x\bar y = s_x^2\hat a + \bar x\bar y$.

Donc $s_x^2\hat a = \frac1n\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i - \bar x\,\bar y \underset{\text{Q1 b)}}{=} \frac1n\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar x)y_i = s_x^2\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i-\bar x}{n s_x^2}y_i = s_x^2\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$.

Comme $s_x^2\neq 0$: $\hat a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$ et $\hat b = \bar y - \hat a\bar x$.

(▲) le rapport du concours indique que l'on attendait la preuve du résultat. Est-ce bien raisonnable vu ce travail demandé dans la suite ? Néanmoins je vous conseille de revoir la preuve dans votre cours ou d'aller en p5' !

c) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. $\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))^2=\|(y_1-(ax_1+b),y_2-(ax_2+b),\dots,y_n-(ax_n+b))\|_n^2$

Norme de $\mathbb{R}^n$ associée au produit scalaire canonique.

$\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))^2=\|(y_1,y_2,\dots,y_n)-a(x_1,x_2,\dots,x_n)-b(1,1,\dots,1)\|_n^2$.

Posons $y'=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ et $t=(1,1,\dots,1)$. On a toujours $y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$ et $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

Alors $\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))^2=\|y'-(ax+bt)\|_n^2$.

On $\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(\hat a x_i+\hat b))^2$.

Alors $\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\|y'-(ax+bt)\|_n^2=\|\hat a x+\hat b t\|_n^2$ ou $\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\|y'-(ax+bt)\|_n=\|y'-(\hat a x+\hat b t)\|_n$

Rappelons que $\mathcal{H}=\mathrm{Vect}(x,t)$. Donc $\min_{z\in\mathcal{H}}\|y'-z\|_n=\|y'-(\hat a x+\hat b t)\|_n$ et $\hat a x+\hat b t\in\mathcal{H}$.

Le "théorème de meilleure approximation" du cours confirme alors que $\min_{z\in\mathcal{H}}\|y'-z\|_n$ existe et indique que la projection orthogonale de y' sur $\mathcal{H}$ est l'unique élément de $\mathcal{H}$ qui réalise ce minimum.

Alors $\hat a x+\hat b t$ est la projection orthogonale de y' sur $\mathcal{H}$.

Si la matrice de cette projection orthogonale dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est K alors la matrice des coordonnées de y' dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est Ky.

Or la matrice des coordonnées de $\hat a x+\hat b t$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $\hat a\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\hat b\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$.

Alors $Ky=\hat a\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\hat b\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat a x_1+\hat b\\\hat a x_2+\hat b\\\vdots\\\hat a x_n+\hat b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&1\\x_2&1\\\vdots&\vdots\\x_n&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat a\\\hat b\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}\hat a\\\hat b\end{pmatrix}=M\hat\Theta$. Or ${}^tMM\hat\Theta={}^tMy$ et ${}^tMM$ est inversible.

Donc $Ky=M({}^tMM)^{-1}\,{}^tMy$ et ceci pour tout y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $(E_1,E_2,\dots,E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $KE_j=M({}^tMM)^{-1}\,{}^tME_j$. Alors pour tout j dans $[\![1,n]\!]$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de K est égale à la $j^{\text{ème}}$ colonne de $M({}^tMM)^{-1}\,{}^tM$.

Finalement $\underline{K = \Pi({}^t\Pi\Pi)^{-1}\,{}^t\Pi}$.

d). $\hat u = y - \Pi\hat\theta = y - \Pi({}^t\Pi\Pi)^{-1}\,{}^t\Pi y = y - Ky = (I_n - K)y = Gy$.

• $\hat u = Gy = G(\Pi\theta) + Gu$.

Or $G(\Pi\theta) = (I_n - K)\Pi\theta = \Pi\theta - K\Pi\theta = \Pi\theta - (\Pi({}^t\Pi\Pi)^{-1}\,{}^t\Pi)\Pi\theta$

$G(\Pi\theta) = \Pi\theta - \Pi({}^t\Pi\Pi)^{-1}({}^t\Pi\Pi)\theta = \Pi\theta - \Pi I_n\theta = \Pi\theta - \Pi\theta = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $\hat u = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} + Gu = Gu$.

Finalement $\underline{\hat u = Gy = Gu}$

e). $\hat u = \begin{pmatrix} \hat u_1 \\ \hat u_2 \\ \vdots \\ \hat u_n \end{pmatrix}$. ${}^t\hat u\hat u = (\hat u_1\ \hat u_2 \dots \hat u_n)\begin{pmatrix} \hat u_1 \\ \hat u_2 \\ \vdots \\ \hat u_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \hat u_i^2$. $\underline{{}^t\hat u\hat u = \sum_{i=1}^n \hat u_i^2}$.

• ${}^t\hat u\hat u = {}^t(Gy)Gy = {}^ty({}^tGG)y$.

K est la matrice du projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathcal{J}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Alors $G = I_n - K$ est la matrice du projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathcal{J}^\perp$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Ainsi $\underline{G^2 = G}$. Les initiés peuvent même dire que G est symétrique car G est la matrice d'un projecteur orthogonal dans une base orthonormée. Pour plus de sécurité montrons que ${}^tG = G$.

${}^tG = {}^t(I_n - K) = {}^tI_n - {}^tK = I_n - {}^t(\Pi({}^t\Pi\Pi)^{-1}\,{}^t\Pi) = I_n - {}^t({}^t\Pi)\,{}^t(({}^t\Pi\Pi)^{-1})\,{}^t\Pi$.

${}^tG = I_n - \Pi({}^t({}^t\Pi\Pi))^{-1}\,{}^t\Pi = I_n - \Pi({}^t\Pi\Pi)^{-1}\,{}^t\Pi = I_n - K = G$. $\underline{{}^tG = G}$.

$\uparrow\ {}^t({}^t\Pi\Pi) = {}^t\Pi\,{}^t({}^t\Pi) = {}^t\Pi\Pi$.

Alors ${}^tGG = G^2 = G$. Donc ${}^t\hat u\hat u = {}^ty({}^tGG)y = {}^tyGy$.

De même ${}^t\hat u\hat u = {}^t(Gu)Gu = {}^tu\,{}^tGGu = {}^tuGu$.

Finalement $\underline{{}^t\hat u\hat u = \sum_{i=1}^n \hat u_i^2 = {}^tyGy = {}^tuGu}$.

<u>Preuve du résultat de Q3 a)</u>. Soit $\mathcal{B}_2$ (resp. $\mathcal{B}_n$) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^n$).

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^n$ de matrice M relativement aux bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_n$.

Notons que $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, M = 2$. Alors $\dim \mathrm{Ker}\, f = \dim \mathbb{R}^2 - \mathrm{rg}\, f = 2 - 2 = 0$. Alors $\mathrm{Ker}\, f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ donc

<u>f injective</u>.

Rappelons que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2 = \|y - M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\|^2$.

norme de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Notons y_0 l'élément de $\mathbb{R}^n$ de matrice y dans $\mathcal{B}_n$.

norme de $\mathbb{R}^n$ associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

$\min\limits_{\theta \in M_{2,1}(\mathbb{R})} \|y - M\theta\|^2$ existe $\Leftrightarrow \min\limits_{\theta \in M_{2,1}(\mathbb{R})} \|y - M\theta\|$ existe $\Leftrightarrow \min\limits_{v \in \mathbb{R}^2} \|y_0 - f(v)\|_n$ existe.

$\min\limits_{\theta \in M_{2,1}(\mathbb{R})} \|y - M\theta\|^2$ existe $\Leftrightarrow \min\limits_{z \in \mathrm{Im} f} \|y_0 - z\|_n$ existe. En cas d'existence ces deux minimums sont égaux.

$\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Mieux comme $M(f, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_n) = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$ alors

$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}((x_1, x_2, \dots, x_n), (1, 1, \dots, 1)) = \mathcal{F}$.

Notons $p_{\mathcal{F}}$ la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathcal{F}$ et rappelons que K est sa matrice dans $\mathcal{B}_n$.

Le théorème de meilleure approximation du cours montre que
- $\min\limits_{z \in \mathcal{F}} \|y_0 - z\|_n$ existe
- $p_{\mathcal{F}}(y_0)$ est l'unique élément de $\mathcal{F}$ qui réalise ce minimum.

Alors
- $\min\limits_{z \in \mathrm{Im} f} \|y_0 - z\|_n$ existe
- $p_{\mathcal{F}}(y_0)$ est l'unique élément de $\mathrm{Im}\, f$ qui réalise ce minimum.

$p_{\mathcal{F}}(y_0) \in \mathrm{Im}\, f$ donc $\exists \hat{v} \in \mathbb{R}^2$, $f(\hat{v}) = p_{\mathcal{F}}(y_0)$. Mieux $\exists!\, \hat{v} \in \mathbb{R}^2$, $f(\hat{v}) = p_{\mathcal{F}}(y_0)$ car f injective.

Ainsi $\min\limits_{v \in \mathbb{R}^2} \|y_0 - f(v)\|_n$ existe et $\exists!\, \hat{v} \in \mathbb{R}^2$, $\min\limits_{v \in \mathbb{R}^2} \|y_0 - f(v)\|_n = \|y_0 - f(\hat{v})\|_n$.

Soit $\hat{\theta}$ la matrice de $\hat{v}$ dans $\mathcal{B}_2$. On peut alors affirmer que :

$\min\limits_{\theta \in M_{2,1}(\mathbb{R})} \|y - M\theta\|$ existe et que $\hat{\theta}$ est l'unique élément de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ qui réalise ce minimum.

Donc $\min\limits_{\theta \in M_{2,1}(\mathbb{R})} \|y - M\theta\|^2$ existe et $\hat{\theta}$ est l'unique élément de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ qui réalise ce minimum.

$f(\hat{v}) = P_{Im f}(y_0)$ · la matrice de $\hat{v}$ dans $\mathcal{B}_2$ est $\hat{\theta}$, $M = M(f, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_n)$, y_0 a pour matrice y dans la base $\mathcal{B}_n$ et $P_{Im f}$ a pour matrice K dans la base $\mathcal{B}_n$. Alors $\underline{M\hat{\theta} = Ky}$... ce qui est très utile pour y. Ne reste plus qu'à montrer que ${}^tM M\hat{\theta} = {}^tM y$.

$y_0 - P_{Im f}(y_0) = y_0 - P_{Im f}(y_0) \in (Im f)^{\perp}$

produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Donc $\forall z \in Im f$, $\langle z, y_0 - P_{Im f}(y_0) \rangle_n = 0$.

Alors $\forall v \in \mathbb{R}^2$, $\langle f(v), y_0 - P_{Im f}(y_0) \rangle_n = 0$. Comme $\mathcal{B}_n$ est orthonormée, ceci se traduit matriciellement par $\forall \theta \in M_{2,1}(\mathbb{R})$, ${}^t(M\theta)(y - Ky) = 0$.

produit scalaire canonique de $M_{2,1}(\mathbb{R})$

$\forall \theta \in M_{2,1}(\mathbb{R})$, ${}^t\theta\,({}^tM(y - Ky)) = 0$. Alors $\forall \theta \in M_{2,1}(\mathbb{R})$, $\langle \theta, {}^tM(y - Ky) \rangle = 0$.

Donc ${}^tM(y - Ky) \in (M_{2,1}(\mathbb{R}))^{\perp}$. Or $(M_{2,1}(\mathbb{R}))^{\perp} = \{0_{M_{2,1}(\mathbb{R})}\}$.

Alors ${}^tM(y - Ky) = 0_{M_{2,1}(\mathbb{R})}$; ${}^tMy - {}^tMKy = 0_{M_{2,1}(\mathbb{R})}$. $\underline{{}^tMy = {}^tMKy}$.

Ainsi ${}^tMy = {}^tM(Ky) = {}^tM(M\hat{\theta}) = {}^tMM\hat{\theta}$. Finalement $\underline{\underline{{}^tMM\hat{\theta} = {}^tMy}}$.

On retrouve alors aisément K en fonction de M et ${}^tM$. En effet :

${}^tMM\hat{\theta} = {}^tMy$ donc $\hat{\theta} = ({}^tMM)^{-1}\,{}^tMy$. De plus $M\hat{\theta} = Ky$

Alors $Ky = M\hat{\theta} = M({}^tMM)^{-1}\,{}^tM y$ et ceci pour tout y dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ce qui donne, comme nous l'avons vu, $\underline{\underline{K = M({}^tMM)^{-1}\,{}^tM}}$.

Reste un peu de place pour une petite remarque...

Nous avons montré que la matrice O est symétrique. Le rapport du concours nous apprend que l'on acceptait que les candidats disent que O est la matrice d'une projection orthogonale dans une base orthonormée pour le justifier.

Normal, à ce niveau, non ?

(Q4) a) $A_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i$ et pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, $Y_i = a x_i + b + U_i$.

Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, U_i possède une espérance qui vaut 0

donc pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, Y_i possède une espérance qui vaut $a x_i + b$.

Alors A_n possède une espérance comme combinaison linéaire de n variables aléatoires qui possèdent une espérance.

De plus $E(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a x_i + b) = a \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + b \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overset{Q3\ c)}{=} a \times 1 + b \times 0 = a$.

$\underline{E(A_n) = a}$.

<u>Sans doute pouvons nous dire que A_n est un estimateur sans biais de a ...</u>

$\overline{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$ possède une espérance comme combinaison linéaire de n variables aléatoires qui possèdent une espérance et $E(\overline{Y}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(Y_i)$.

$E(\overline{Y}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (a x_i + b) = a \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i + b \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 = a \overline{x} + b$.

$B_n = \overline{Y}_n - \overline{x} A_n$ possède une espérance comme combinaison linéaire de deux variables aléatoires qui possèdent une espérance et $E(B_n) = E(\overline{Y}_n) - \overline{x}\, E(A_n)$.

$E(B_n) = a\overline{x} + b - \overline{x} \times a = b$. $\underline{E(B_n) = b}$.

Estimons donc que <u>B_n est un estimateur sans biais de b</u> pour ne pas contrarier le concepteur ... mais observons que les Y_i n'ont pas la même loi !!

<u>b)</u> Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $V(U_i)$ existe et vaut σ^2.

Alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, Y_i qui est égal à $a x_i + b + U_i$ possède une variance qui vaut $V(U_i)$ donc σ^2. <u>$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $V(Y_i) = \sigma^2$.</u>

Alors A_n possède une variance comme combinaison linéaire de n variables aléatoires qui possèdent une variance puisque $A_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i$.

$U_1, U_2, \dots, U_n$ étant indépendantes il en est de même de $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ et même de $\alpha_1 Y_1, \alpha_2 Y_2, \dots, \alpha_n Y_n$.

Alors $V(A_n)=\sum_{i=1}^n V(\alpha_i Y_i)=\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 V(Y_i)=\sigma^2\sum_{i=1}^n \alpha_i^2=\sigma^2\times\frac{1}{nS_x^2}$.

$$V(A_n)=\frac{\sigma^2}{nS_x^2}.$$

$B_n=\bar{Y}_n-A_n\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i-\bar{x}\sum_{i=1}^n\alpha_i Y_i=\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{n}-\alpha_i\bar{x}\right)Y_i$

Ici encore B_n possède une variance comme combinaison linéaire de n variables aléatoires qui possèdent une variance.

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ étant indépendantes il en est de même pour les variables aléatoires

$(\frac{1}{n}-\alpha_1\bar{x})Y_1$, $(\frac{1}{n}-\alpha_2\bar{x})Y_2, \dots, (\frac{1}{n}-\alpha_n\bar{x})Y_n$.

Alors $V(B_n)=\sum_{i=1}^n V\left(\left(\frac{1}{n}-\alpha_i\bar{x}\right)Y_i\right)=\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{n}-\alpha_i\bar{x}\right)^2 V(Y_i)=\sigma^2\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{n}-\alpha_i\bar{x}\right)^2.$

$$V(B_n)=\sigma^2\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2\bar{x}}{n}\alpha_i+\bar{x}^2\alpha_i^2\right)=\left(n\times\frac{1}{n^2}-\frac{2\bar{x}}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^n\alpha_i}_{=0}+\bar{x}^2\underbrace{\sum_{i=1}^n\alpha_i^2}_{\frac{1}{nS_x^2}}\right)\sigma^2.$$

$V(B_n)=\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{nS_x^2}\right)\sigma^2.$

$$V(B_n)=\left(1+\frac{\bar{x}^2}{S_x^2}\right)\frac{\sigma^2}{n}.$$

c) $\operatorname{cov}(A_n,B_n)=\frac{1}{2}\left[V(A_n+B_n)-V(A_n)-V(B_n)\right]$.

$A_n+B_n=A_n+\bar{Y}_n-A_n\bar{x}=(1-\bar{x})A_n+\bar{Y}_n=(1-\bar{x})\sum_{i=1}^n\alpha_i Y_i+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i.$

$A_n+B_n=\sum_{i=1}^n\left(\alpha_i(1-\bar{x})+\frac{1}{n}\right)Y_i.$

Alors par indépendance $V(A_n+B_n)=\sum_{i=1}^n\left(\alpha_i(1-\bar{x})+\frac{1}{n}\right)^2 V(Y_i)$.

$$V(A_n+B_n)=\sigma^2\sum_{i=1}^n\left((1-\bar{x})^2\alpha_i^2+\frac{2}{n}(1-\bar{x})\alpha_i+\frac{1}{n^2}\right)=\sigma^2\left[(1-\bar{x})^2\frac{1}{nS_x^2}+\frac{2}{n}(1-\bar{x})\times 0+n\times\frac{1}{n^2}\right]$$

$$V(A_n+B_n)=\sigma^2\left[(1-\bar{x})^2\frac{1}{nS_x^2}+\frac{1}{n}\right].$$

Donc $\mathrm{cov}(A_n,B_n) = \frac{1}{2}\left[\sigma^2\left[(1-\bar{x})^2 \frac{1}{nS_x^2} + \frac{1}{n}\right] - \frac{\sigma^2}{nS_x^2} - \left(1+\frac{\bar{x}^2}{S_x^2}\right)\frac{\sigma^2}{n}\right]$.

$\mathrm{cov}(A_n,B_n) = \frac{\sigma^2}{2nS_x^2}\left[1+\bar{x}^2-2\bar{x}+S_x^2-1-(S_x^2+\bar{x}^2)\right] = -\frac{\bar{x}\,\sigma^2}{nS_x^2}$.

$\mathrm{cov}(A_n,B_n) = -\frac{\bar{x}\,\sigma^2}{nS_x^2}$.

(Q5) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in [\![3,+\infty[\![$. A_n et B_n possèdent un moment d'ordre 2.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors :

$0 \leq P(|A_n - E(A_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(A_n)}{\varepsilon^2}$ & $0 \leq P(|B_n - E(B_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(B_n)}{\varepsilon^2}$

donc $\overbrace{0 \leq P(|A_n - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n S_x^2}}^{①}$ et $\overbrace{0 \leq P(|B_n - b| \geq \varepsilon) \leq \left(1+\frac{\bar{x}^2}{S_x^2}\right)\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \times n}}^{②}$ et ceci pour tout n dans $[\![3,+\infty[\![$.

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right) = \rho^2$ donc $\lim_{n\to+\infty} S_x^2 \overset{!!}{=} \rho^2$. Alors $\lim_{n\to+\infty}(nS_x^2) = +\infty$ car $\rho^2 > 0$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n S_x^2} = 0$. Par encadrement ① donne $\underline{\lim_{n\to+\infty} P(|A_n - a| \geq \varepsilon) = 0}$.

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \lambda$ donc $\lim_{n\to+\infty} \bar{x} \overset{!!}{=} \lambda$. Rappelons que $\lim_{n\to+\infty} S_x^2 = \rho^2$ et que $\rho^2 > 0$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{\bar{x}^2}{S_x^2}\right)\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \times n}\right) = \left(1+\frac{\lambda^2}{\rho^2}\right)\times 0$. Par encadrement ② donne $\lim_{n\to+\infty} P(|B_n - b| \geq \varepsilon) = 0$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n\to+\infty} P(|A_n - a| \geq \varepsilon) = \lim_{n\to+\infty} P(|B_n - b| \geq \varepsilon) = 0$

Alors les deux suites $(A_n)_{n\geq 3}$ et $(B_n)_{n\geq 3}$ convergent en probabilité vers a et b respectivement.

(Q6) a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Y_i, A_n et B_n possèdent une espérance donc $\hat{U}_i$ qui vaut $Y_i - A_n x_i - B_n$ possède une espérance comme combinaison linéaire de trois variables aléatoires qui possèdent une espérance.

De plus $E(\hat{U}_i) = E(Y_i) - x_i E(A_n) - E(B_n) = a x_i + b - x_i \times a - b = 0$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $E(\hat{U}_i)$ existe et vaut 0.

b) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $\hat{U}_i = Y_i - A_n x_i - B_n = Y_i - A_n x_i - (\overline{Y}_n - A_n \overline{x}) = Y_i - \overline{Y}_n - A_n(x_i - \overline{x})$.

$Y_i - \overline{Y}_n = a x_i + b + U_i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = a x_i + b + U_i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a x_k + b + U_k)$.

$Y_i - \overline{Y}_n = a x_i + b + U_i - a\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k$.

$Y_i - \overline{Y}_n = a x_i + b + U_i - a\overline{x} - \frac{b}{n}\times n - \overline{U}_n = a(x_i - \overline{x}) + U_i - \overline{U}_n$.

Alors $\hat{U}_i = Y_i - \overline{Y}_n - A_n(x_i - \overline{x}) = a(x_i - \overline{x}) + U_i - \overline{U}_n - A_n(x_i - \overline{x})$.

$\hat{U}_i = U_i - \overline{U}_n - (x_i - \overline{x})(A_n - a)$.

$\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[(U_i - \overline{U}_n)^2 - 2(A_n - a)(x_i - \overline{x})(U_i - \overline{U}_n) + (x_i - \overline{x})^2(A_n - a)^2\right]$.

$\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(U_i - \overline{U}_n)^2 - 2(A_n - a)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(U_i - \overline{U}_n) + (A_n - a)^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \quad (*)$

Or $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(U_i - \overline{U}_n) = \sum_{i=1}^{n}(n S_x^2 \alpha_i)(U_i - \overline{U}_n) = n S_x^2 \sum_{i=1}^{n}\alpha_i U_i - n S_x^2 \overline{U}_n \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}_{=0} = n S_x^2 \sum_{i=1}^{n}\alpha_i U_i$.

$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(U_i - \overline{U}_n) = n S_x^2 \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(Y_i - a x_i - b) = n S_x^2\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i Y_i - a\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i}_{=1} - b\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}_{=0}\right]$.

$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(U_i - \overline{U}_n) = n S_x^2\left[A_n - a\right]$.

En reportant dans $(*)$ il vient :

$$\sum_{i=1}^{n}\hat{U}_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(U_i - \overline{U}_n)^2 - 2(A_n - a)\, n S_x^2 (A_n - a) + (A_n - a)^2\, n S_x^2 = \sum_{i=1}^{n}(U_i - \overline{U}_n)^2 - n S_x^2 (A_n - a)^2.$$

Ainsi $\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (U_i - \bar{U}_n)^2 - n\, S_x^2\, (A_n - a)^2.$

c) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. $(U_i - \bar{U}_n)^2 = U_i^2 - 2\bar{U}_n U_i + \bar{U}_n^2$.

U_i^2 possède une variance donc un moment d'ordre 2. Alors $E(U_i^2)$ existe.

De plus $E(U_i^2) = V(U_i) + (E(U_i))^2 = \sigma^2 + 0^2 = \sigma^2$. $E(U_i^2) = \sigma^2$.

$\bar{U}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} U_k$ possède un moment d'ordre 2 comme combinaison linéaire de n variables aléatoires qui possèdent un moment d'ordre 2 donc $E(\bar{U}_n^2)$ existe.

$E(\bar{U}_n^2) = V(\bar{U}_n) + (E(\bar{U}_n))^2$.

Or $E(\bar{U}_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} U_k\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(U_k) \overset{E(U_k)=0}{=} 0$

$V(\bar{U}_n) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} U_k\right) \underset{\text{par indépendance}}{=} \sum_{k=1}^{n} V\left(\frac{1}{n} U_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} V(U_k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$. Alors $E(\bar{U}_n^2) = \frac{\sigma^2}{n}$.

U_i et $\bar{U}_n$ possèdent un moment d'ordre 2 donc $U_i \bar{U}_n$ possèdent une espérance.

$E(U_i \bar{U}_n) = E\left(U_i \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} U_k\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(U_i U_k) = \frac{1}{n} E(U_i^2) + \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} E(U_i U_k)$.

$E(U_i \bar{U}_n) = \frac{1}{n} \sigma^2 + \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} E(U_i) \underbrace{E(U_k)}_{=0}$ par indépendance.

$E(U_i \bar{U}_n) = \frac{1}{n} \sigma^2$.

Finalement $(U_i - \bar{U}_n)^2$ qui vaut $U_i^2 - 2\bar{U}_n U_i + \bar{U}_n^2$ possède une espérance comme combinaison linéaire de trois variables aléatoires qui possèdent une espérance.

De plus $E((U_i - \bar{U}_n)^2) = E(U_i^2) - 2E(\bar{U}_n U_i) + E(\bar{U}_n^2) = \sigma^2 - 2 \times \frac{1}{n} \sigma^2 + \frac{1}{n} \sigma^2$.

$E((U_i - \bar{U}_n)^2) = (1 - \frac{1}{n}) \sigma^2$. Alors $\sum_{i=1}^{n} (U_i - \bar{U}_n)^2$ possède une espérance

et $E\left(\sum_{i=1}^{n} (U_i - \bar{U}_n)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} E((U_i - \bar{U}_n)^2) = \sum_{i=1}^{n} (1 - \frac{1}{n}) \sigma^2 = n(1 - \frac{1}{n}) \sigma^2$.

$E\left(\sum_{i=1}^{n} (U_i - \bar{U}_n)^2 \right) = (n-1)\sigma^2$ ce qui n'est pas un scoop.

$(A_n - a)^2 = (A - E(A_n))^2$ donc $(A_n - a)^2$ possède une espérance qui vaut $V(A_n)$.

Alors $\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2$ qui vaut $\sum_{i=1}^{n} (U_i - \bar{U}_n)^2 - n S_x^2 (A_n - a)^2$ possède une espérance comme combinaison de deux variables aléatoires qui possèdent une espérance.

De plus $E\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 \right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} (U_i - \bar{U}_n)^2 \right) - n S_x^2 E\left((A_n - a)^2 \right)$.

$E\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 \right) = (n-1)\sigma^2 - n S_x^2 V(A_n) = (n-1)\sigma^2 - n S_x^2 \times \frac{\sigma^2}{n S_x^2} = (n-1)\sigma^2 - \sigma^2$.

$E\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 \right) = (n-2)\sigma^2$.

Donc $E\left(\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 \right) = \sigma^2 \quad (n \geq 3)$.

Donc $\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2$ doit être un estimateur sans biais de σ^2...

PARTIE III Hypothèse de normalité et prévision

(Q8) a) Commençons par deux rappels de cours et par la preuve d'un lemme

R1 T est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance m et de variance σ^2. $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a \neq 0$

Alors $aT+b$ suit la loi normale d'espérance $am+b$ et de variance $(|a|\sigma)^2$.

R2 T_1 et T_2 sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si $T_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et si $T_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, $T_1 + T_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1+m_2, (\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})^2)$

Lemme .. $n \in \mathbb{N}^*$. 1°/ $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sont n variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$;

2°/ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont n réels non tous nuls ;

3°/ $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $T_i \hookrightarrow \mathcal{N}(m_i, \sigma_i)$.

Alors $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \cdots + \lambda_n T_n$ suit la loi normale d'espérance $\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \cdots + \lambda_n m_n$ et de variance $\lambda_1^2 \sigma_1^2 + \lambda_2^2 \sigma_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 \sigma_n^2$.

Preuve du lemme. Montrons ce résultat par récurrence sur n.

- Soit $\lambda_1 \in \mathbb{R}^*$. Soit T_1 une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres m_1 et σ_1^2. D'après R_1, $\lambda_1 T_1$ suit la loi normale d'espérance $\lambda_1 m_1$ et de variance $(|\lambda_1|\sigma_1)^2$ ou de variance $\lambda_1^2 \sigma_1^2$.

  La propriété est donc vraie pour $n=1$.
- Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

Soient $T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ $n+1$ variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ $n+1$ réels non tous nuls. On suppose que $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $T_i \hookrightarrow \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$

Posons $C_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i$, $C_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i T_i$ et $W_{n+1} = \lambda_{n+1} T_{n+1}$. $C_{n+1} = C_n + W_{n+1}$

1er cas .. $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et $\lambda_{n+1} \neq 0$.

L'hypothèse de récurrence montre que C_n suit la loi normale d'espérance $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i$ et de variance $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \sigma_i^2$.

D'après le rappel 1, W_{n+1} suit la loi normale d'espérance $\delta_{n+1} m_{n+1}$ et de variance $\delta_{n+1}^2 \sigma_{n+1}^2$.

De plus, comme $T_1, T_2, \dots, T_n, T_{n+1}$ sont indépendantes $\sum_{i=1}^{n} \delta_i T_i$ et $\delta_{n+1} T_{n+1}$ sont indépendantes. Ainsi C_n et W_{n+1} sont indépendantes.

Le rappel 2 montre alors que $C_{n+1} = C_n + W_{n+1}$ suit la loi normale d'espérance $\sum_{i=1}^{n} \delta_i m_i + \delta_{n+1} m_{n+1}$ et de variance $\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 \sigma_i^2 + \delta_{n+1}^2 \sigma_{n+1}^2$.

Ainsi $\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i T_i$ suit la loi normale d'espérance $\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i m_i$ et de variance $\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^2 \sigma_i^2$

<u>2ème cas</u> $\delta_{n+1} = 0$.

Alors $C_{n+1} = C_n$ et $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. L'hypothèse de récurrence montre que C_{n+1} suit la loi normale d'espérance $\sum_{i=1}^{n} \delta_i m_i$ et de variance $\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 \sigma_i^2$.

Mais $\delta_{n+1} = 0$ donc C_{n+1} suit également la loi normale d'espérance $\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i m_i$ et de variance $\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^2 \sigma_i^2$.

<u>3ème cas.</u> $\delta_{n+1} \neq 0$ et $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Alors $C_{n+1} = \delta_{n+1} T_{n+1} = W_{n+1}$ et $W_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{N}(\delta_{n+1} m_{n+1}, (|\delta_{n+1}| \sigma_{n+1})^2)$.

Donc C_{n+1} suit la loi normale d'espérance $\delta_{n+1} m_{n+1}$ et de variance $\delta_{n+1}^2 \sigma_{n+1}^2$.
Comme $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = 0$, C_{n+1} suit encore la loi normale d'espérance $\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i m_i$ et de variance $\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^2 \sigma_i^2$.

Ceci achève la récurrence et la preuve du lemme ▼

Montrons que le vecteur $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ est normal.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $Y_i = a x_i + b + U_i$ et $U_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Le rappel 1 montre alors que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{N}(a x_i + b, \sigma^2)$.

De plus $U_1, U_2, \dots, U_n$ sont indépendantes donc $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sont indépendantes.

soit alors $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ n réels non tous nuls. le cours montre que $\sum_{i=1}^{n} \delta_i Y_i$ suit la loi normale d'espérance $\sum_{i=1}^{n} \delta_i (a x_i + b)$ et de variance $\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 \sigma^2$.

cette variance n'est pas nulle (!) car $\sigma > 0$ et $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

Par conséquent $\sum_{i=1}^{n} \delta_i Y_i$ suit une loi normale de variance non nulle (ici) !

ceci permet d'affirmer que <u>$(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ est un vecteur aléatoire normal.</u>

Posons $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\delta_i = 1$.

$\delta_1 (Y_1 - \overline{Y}_n) + \delta_2 (Y_2 - \overline{Y}_n) + \dots + \delta_n (Y_n - \overline{Y}_n) = (Y_1 - \overline{Y}_n) + (Y_2 - \overline{Y}_n) + \dots + (Y_n - \overline{Y}_n) = \sum_{i=1}^{n} Y_i - n \overline{Y}_n = n\overline{Y}_n - n\overline{Y}_n$

Alors $\sum_{i=1}^{n} \delta_i (Y_i - \overline{Y}_n)$ est la variable certaine nulle donc elle ne suit pas une loi normale, et les réels $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ ne sont pas tous nuls.

Ainsi <u>$(Y_1 - \overline{Y}_n, Y_2 - \overline{Y}_n, \dots, Y_n - \overline{Y}_n)$ n'est pas un vecteur aléatoire normale.</u>

<u>b)</u> • $A_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i$ • $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sont indépendantes • $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{N}(a x_i + b, \sigma^2)$.

Supposons que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\frac{x_i - \overline{x}}{n S_x^2} = 0$; $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \overline{x}$ donc $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Alors • $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

le cours montre que A_n suit la loi normale d'espérance $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a x_i + b)$ et de variance $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma^2$. Rappelons que $E(A_n) = a$ et $V(A_n) = \frac{\sigma^2}{n S_x^2}$.

<u>A_n suit la loi normale d'espérance a et de variance $\frac{\sigma^2}{n S_x^2}$.</u>

$B_n = \overline{Y}_n - A_n \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i - \overline{x} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \overline{x} \alpha_i \right) Y_i$

Posons pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $\beta_i = \frac{1}{n} - \overline{x} \alpha_i$. Alors $B_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i Y_i$.

De plus $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sont indépendantes et pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{N}(a x_i + b, \sigma^2)$.

Supposons que $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$. Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\overline{x} \alpha_i = \frac{1}{n}$.

R.

Donc $\bar{x} \neq 0$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i = \frac{1}{n\bar{x}}$. $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$.

Alors $\frac{x_1-\bar{x}}{nS_x^2} = \frac{x_2-\bar{x}}{nS_x^2} = \cdots = \frac{x_n-\bar{x}}{nS_x^2}$; $x_1-\bar{x} = x_2-\bar{x} = \cdots = x_n-\bar{x}$. $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$!!

Finalement $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Le lemme permet alors de dire que

B_n suit la loi normale d'espérance $\sum_{i=1}^{n} \beta_i (ax_i+b)$ et de variance $\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 \sigma^2$.

Rappelons que $E(B_n) = b$ et $V(B_n) = \left(1+\frac{\bar{x}^2}{S_x^2}\right)\frac{\sigma^2}{n}$.

Alors B_n suit la loi normale d'espérance b et de variance $\left(1+\frac{\bar{x}^2}{S_x^2}\right)\frac{\sigma^2}{n}$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$.

$\lambda_1 A_n + \lambda_2 B_n = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i + \lambda_2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \bar{x}\alpha_i\right) Y_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_1 \alpha_i - \frac{\lambda_2}{n} - \lambda_2 \bar{x} \alpha_i\right) Y_i$.

Posons, pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, $\delta_i = \lambda_1 \alpha_i - \frac{\lambda_2}{n} - \lambda_2 \bar{x} \alpha_i$.

Alors $\lambda_1 A_n + \lambda_2 B_n = \sum_{i=1}^{n} \delta_i Y_i$; $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sont indépendantes ; $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{N}(ax_i+b, \sigma^2)$.

Supposons que $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_n = 0$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(\lambda_1 - \lambda_2 \bar{x})\alpha_i - \frac{\lambda_2}{n} = 0$.

<u>1er cas</u>. $\lambda_1 - \lambda_2 \bar{x} = 0$. Alors $\frac{\lambda_2}{n} = 0$. $\lambda_2 = 0$. Donc $\lambda_1 = \lambda_2 \bar{x} = 0$. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$!!

<u>2e cas</u>. $\lambda_1 - \lambda_2 \bar{x} \neq 0$. Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i = \frac{\lambda_2}{n(\lambda_1 - \lambda_2 \bar{x})}$.

Ainsi $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$. Ce qui donne comme nous venons de le voir

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$!!

Finalement $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Le lemme permet alors de dire que

$\sum_{i=1}^{n} \delta_i Y_i$ suit une loi normale. Donc $\lambda_1 A_n + \lambda_2 B_n$ suit une loi normale de

variance nécessairement non nulle. Ceci pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Alors :

(A_n, B_n) est un vecteur aléatoire normal.

(Q8) a) Posons $S = (s_{i,j})$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $T_i = \sum_{j=1}^{n} s_{i,j} U_j$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} s_{i,j} U_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{i,j} \right) U_j .$$

Posons $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{i,j}$.

Alors • $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j U_j$ • $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ sont indépendantes

• $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $U_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Il reste pour utiliser le lemme que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

Supposons que $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\varepsilon_j = 0$. Alors $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{i,j} = 0$.

Ainsi $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $(\lambda_1\ \lambda_2 \cdots \lambda_n) \begin{pmatrix} s_{1j} \\ s_{2j} \\ \vdots \\ s_{nj} \end{pmatrix} = 0$. Donc $(\lambda_1\ \lambda_2 \cdots \lambda_n) S = 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})}$.

Rappelons que S est inversible. Multiplions l'égalité précédente à droite par S^{-1}.

Alors $(\lambda_1\ \lambda_2 \cdots \lambda_n) \underbrace{S S^{-1}}_{I_n} = 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})} S^{-1} = 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})}$. Donc $(\lambda_1\ \lambda_2 \cdots \lambda_n) = 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})}$.

Par conséquent $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ ce qui contredit l'hypothèse.

Finalement • $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

Le lemme montre alors que $\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j U_j$ suit une loi normale. Donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i$ suit une loi normale de variance nécessairement non nulle, et ceci pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

!!!

Alors $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ est un vecteur aléatoire normal.

b) D'après le résultat admis, pour montrer que $T_1, T_2, \dots, T_n$ sont mutuellement indépendantes il suffit de montrer que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow \operatorname{cov}(T_i, T_j) = 0$ car $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ est un vecteur aléatoire normal.

Soient i et j deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$.

$cov(T_i,T_j) = cov\left(\sum_{k=1}^{n} s_{i,k} U_k , \sum_{\ell=1}^{n} s_{j,\ell} U_\ell\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} s_{i,k}\, s_{j,\ell}\, cov(U_k,U_\ell)$.

Or $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, $k \neq \ell \Rightarrow cov(U_k,U_\ell)=0$ car $U_1, U_2, \dots, U_n$ sont indépendantes.

De plus $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $cov(U_k,U_k) = V(U_k) = \sigma^2$.

Alors $\underline{cov(T_i,T_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} s_{i,k}\, s_{j,k}\right)\sigma^2}$.

$S = (s_{i,j})$ donc ${}^tSS = \left(\sum_{k=1}^{n} s_{i,k}\, s_{j,k}\right)$. S est orthogonale donc ${}^tSS = I_n$.

~~Rappelons~~ (!) i et j deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$.

Comme ${}^tSS = I_n$. $\sum_{k=1}^{n} s_{i,k}\, s_{j,k} = 0$ car $i \neq j$. Alors $cov(T_i,T_j) = 0$.

$\underline{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow cov(T_i,T_j) = 0 .\ T_1, T_2, \dots, T_n \text{ sont mutuellement indépendantes.}}$

(Q9) a) Montrons que $\hat{U} = GU$. Il nous faut donc montrer que :

$\forall \omega \in \Omega$, $\begin{pmatrix} \hat{U}_1(\omega) \\ \hat{U}_2(\omega) \\ \vdots \\ \hat{U}_n(\omega) \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} U_1(\omega) \\ U_2(\omega) \\ \vdots \\ U_n(\omega) \end{pmatrix}$. Soit $\omega \in \Omega$.

Posons $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $u_i = U_i(\omega)$, $y_i = Y_i(\omega)$. Posons $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\theta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $Y_i = ax_i + b + U_i$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $y_i = ax_i + b + u_i$ ou $y = M\theta + u$ ok ?

Posons $\bar{y} = \frac{1}{n}(y_1+y_2+\dots+y_n)$. $\bar{y} = \frac{1}{n}[Y_1(\omega)+\dots+Y_n(\omega)] = \bar{Y}_n(\omega)$.

Posons encore $\hat{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$, $\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x}$, $\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$ et $\hat{u} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{pmatrix} = y - M\hat{\theta}$. $\underline{\hat{u} = y - M\hat{\theta}}$.

I Q3 d) donne : $\hat{u} = Gy = Gu$ donc $\begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} U_1(\omega) \\ U_2(\omega) \\ \vdots \\ U_n(\omega) \end{pmatrix}$.

Il ne reste donc plus qu'à montrer que $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $\hat{u}_i = \hat{U}_i(\omega)$.

Or $\hat{U} = Y - M \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$. Donc $\hat{U}(\omega) = Y(\omega) - M \begin{pmatrix} A_n(\omega) \\ B_n(\omega) \end{pmatrix}$.

Alors $\begin{pmatrix} \hat{U}_1(\omega) \\ \hat{U}_2(\omega) \\ \vdots \\ \hat{U}_n(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1(\omega) \\ Y_2(\omega) \\ \vdots \\ Y_n(\omega) \end{pmatrix} - M \begin{pmatrix} A_n(\omega) \\ B_n(\omega) \end{pmatrix} = y - M \begin{pmatrix} A_n(\omega) \\ B_n(\omega) \end{pmatrix}$.

De plus $A_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = \hat{a}$.

$$B_n(\omega) = \overline{Y}_n(\omega) - A_n(\omega)\overline{x} = \frac{Y_1(\omega)+Y_2(\omega)+\dots+Y_n(\omega)}{n} - \hat{a}\overline{x} = \frac{y_1+y_2+\dots+y_n}{n} - \hat{a}x = \overline{y} - \hat{a}\overline{x} = \hat{b}$$

Donc $\begin{pmatrix} A_n(\omega) \\ B_n(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \hat{\theta}$. Alors $\begin{pmatrix} \hat{U}_1(\omega) \\ \hat{U}_2(\omega) \\ \vdots \\ \hat{U}_n(\omega) \end{pmatrix} = y - M\hat{\theta} = \hat{u} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{pmatrix}$.

Comme $\hat{u} = G u$: $\begin{pmatrix} \hat{U}_1(\omega) \\ \hat{U}_2(\omega) \\ \vdots \\ \hat{U}_n(\omega) \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$.

Ainsi $\begin{pmatrix} \hat{U}_1(\omega) \\ \hat{U}_2(\omega) \\ \vdots \\ \hat{U}_n(\omega) \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} U_1(\omega) \\ U_2(\omega) \\ \vdots \\ U_n(\omega) \end{pmatrix}$ et ceci pour tout ω dans Ω. Donc $\underline{\hat{U} = G U}$.

c) Nous avons vu dans I c) que G est symétrique et que G est la matrice du projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathcal{F}^\perp$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Or $\dim \mathcal{F} = 2$ donc $(\dim \mathcal{F})^\perp = n-2$.

Alors $Sp\, G = \{1, 0\}$, $\dim SEP(G,1) = n-2$ et $\dim SEP(G,0) = 2$.

$M_{n,1}(\mathbb{R}) = SEP(G,1) \oplus SEP(G,0)$. De plus $SEP(G,1)$ et $SEP(G,0)$ sont orthogonaux car G est symétrique et $G \in M_n(\underline{\mathbb{R}})$.

Soit $\mathcal{B}_1$ (resp. $\mathcal{B}_2$) une base orthonormée de $SEP(G,1)$ (resp. $SEP(G,0)$).

Alors "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$" est une base orthonormée de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de G respectivement associés aux valeurs propres $1, 1, \dots, 1, 0, 0$.

Soit R la matrice de passage de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$"

1) R est une matrice orthogonale comme matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée.

2) $^tR\,G\,R = R^{-1}G\,R = \mathrm{Diag}(1,1,\dots,1,0,0) = \sum_{i=1}^{n-2} E_{i,i}$ où $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ est la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$. Notons que $G = R D R^{-1} = R D\,{}^tR$.

Il existe une matrice orthogonale R de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $G = R D\,{}^tR$ où D est la matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ égale à $\mathrm{Diag}(1,1,\dots,1,0,0)$ ou $\sum_{i=1}^{n-2} E_{i,i}$.

Remarque.. ceci répond à la question... avec plus de précision sur D...

c) Posons $R = (r_{ij})$. $Z = {}^tR\,U$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $Z_i = \sum_{j=1}^{n} r_{j,i} U_j$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $\begin{pmatrix} r_{1,i} \\ r_{2,i} \\ \vdots \\ r_{n,i} \end{pmatrix}$ est la i^{e} colonne de R et R est inversible. Donc cette colonne n'est pas $0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors :

- $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ sont mutuellement indépendantes
- $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $U_j \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$
- $Z_i = \sum_{j=1}^{n} r_{j,i} U_j$
- $(r_{1,i}, r_{2,i}, \dots, r_{n,i}) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

Le cours montre que Z_i suit la loi normale d'espérance $\underbrace{\sum_{j=1}^{n} r_{j,i} \times 0}_{=0\,!}$ et de variance $\sum_{j=1}^{n} (r_{j,i})^2 \sigma^2$.

Or $I_n = {}^tR\,R = \left(\sum_{k=1}^{n} r_{k,p}\, r_{k,q}\right)_{\substack{1\leq p\leq n\\ 1\leq q\leq n}}$ donc $\forall p \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} (r_{k,p})^2 = 1$. Alors $\sum_{j=1}^{n} (r_{j,i})^2\sigma^2 = \sigma^2$.

Ainsi $Z_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Notons que $\frac{Z_i}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Montrons alors que si T est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite alors T^2 suit la loi gamma de paramètres 2 et $1/2$.

Pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ et notons Φ la fonction de répartition de T.

Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\Phi' = \varphi$. Déterminons la fonction de répartition F_{T^2} de T^2.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_{T^2}(x) = P(T^2 \leq x) = 0$. Soit $x \in [0, +\infty[$.

$F_{T^2}(x) = P(T^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq T \leq \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} < T \leq \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{T^2}(x) = \begin{cases} \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\end{cases}.$$

Notons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{T^2}(x) = \begin{cases} \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \end{cases}$.

F_{T^2} est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$. En particulier F_{T^2} est continue sur $]-\infty, 0]$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto -\sqrt{x}$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et Φ est continue sur $\mathbb{R}$. Par composition $x \mapsto \Phi(\sqrt{x})$ et $x \mapsto \Phi(-\sqrt{x})$ sont continues sur $[0, +\infty[$. Par différence F_{T^2} est continue sur $[0, +\infty[$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto -\sqrt{x}$ sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Par composition $x \mapsto \Phi(\sqrt{x})$ et $x \mapsto \Phi(-\sqrt{x})$ sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Par différence F_{T^2} est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Ce qui précède suffit pour dire que F_{T^2} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Alors T^2 est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F'_{T^2}(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $F'_{T^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Phi'(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Phi'(-\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\varphi(\sqrt{x}) + \varphi(-\sqrt{x}))$

$\forall x \in]0, +\infty[$, $F'_{T^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} 2\varphi(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \varphi(\sqrt{x})$ car φ est paire sur $\mathbb{R}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{T^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} \varphi(\sqrt{x}) & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f_{T^2} est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_{T^2} sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

f_{T^2} est une densité de T^2. Notons que $\forall x \in]0, +\infty[$, $f_{T^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}} = \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{1}{2}-1}}{2^{1/2}\sqrt{\pi}}$.

Pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/2}\, x^{1/2-1}}{2^{1/2}\,\Gamma(1/2)} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

h est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi gamma de paramètres 2 et $1/2$. $\forall x \in]0,+\infty[$, $f_{T^2}(x) = \dfrac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}}\, h(x)$. Mieux $\forall x \in \underline{\underline{\mathbb{R}}}$, $f_{T^2}(x) = \dfrac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}}\, h(x)$.

Alors $1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{T^2}(x)\,dx = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} \times 1 = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}}$.

Alors $\dfrac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} = 1$ donc $f_{T^2} = h$. Ainsi $\underline{\underline{T^2 \text{ suit la loi gamma de paramètres } 2 \text{ et } 1/2}}$.

__Remarque__.. ce qui précède montre que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$...

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $Z_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$. $\dfrac{Z_i}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Alors $\left(\dfrac{Z_i}{\sigma}\right)^2 \hookrightarrow \Gamma(2,\tfrac{1}{2})$.

$\dfrac{Z_i^2}{\sigma^2} \hookrightarrow \Gamma(2,\tfrac{1}{2})$ et ainsi $\underline{\underline{Z_i^2 \hookrightarrow \Gamma(2\sigma^2,\tfrac{1}{2})}}$.

$Z = {}^tRU$ et ${}^tR$ est une matrice orthogonale. Alors Q8 b) montre que les variables aléatoires $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ sont mutuellement indépendantes.

Dans ces conditions $Z_1^2, Z_2^2, \dots, Z_n^2$ sont mutuellement indépendantes.

Alors • $Z_1^2, Z_2^2, \dots, Z_{n-2}^2$ sont mutuellement indépendantes ;

• $\forall i \in [\![1,n-2]\!]$, $Z_i^2 \hookrightarrow \Gamma(2\sigma^2,\tfrac{1}{2})$.

Le théorème de stabilité des sommes sur les lois gamma montre que

$\underline{\underline{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-2} Z_i^2 \text{ suit la loi Gamma de paramètres } 2\sigma^2 \text{ et } \frac{n-2}{2}}}$.

__d]__ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 = {}^t\hat{U}\hat{U} = {}^t(GU)GU = {}^tU\,{}^tG\,G\,U \underset{{}^tGG = G^2 = G}{=} {}^tU\,G\,U = {}^tU\,R\,D\,{}^tR\,U = {}^t({}^tRU)\,D\,{}^tRU$.

${}^tRU = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{Diag}(1,1,\dots,1,0,0)$.

Alors $D\,{}^tRU = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_{n-2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 = {}^t({}^tRU)\,D\,{}^tRU = (Z_1\, Z_2 \cdots Z_n) \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_{n-2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-2} Z_i^2$.

Alors $\sum_{i=1}^{n} U_i^2 = \sum_{i=1}^{n-2} Z_i^2$. Donc $\underline{\underline{\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 \hookrightarrow \Gamma(2\sigma^2, \frac{n-2}{2})}}$.

e) Rappelons que $\sum_{i=1}^{n-2} \frac{Z_i^2}{\sigma^2} \hookrightarrow \Gamma(2, \frac{n-2}{2})$ et notons F_n sa fonction de répartition.

F_n ne dépend que de n donc F_n ne dépend pas des paramètres inconnus a, b et σ^2.

F_n est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. $1-p \in]0,1[$, $\lim_{x\to+\infty} F_n(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} F_n(x) = 0$.

Alors $\exists A \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > A \Rightarrow F_n(x) > 1-p$. En particulier $F_n(A+1) > 1-p$.

$\exists B \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x < -B \Rightarrow F_n(x) < 1-p$. En particulier $F_n(-B-1) < 1-p$.

Or F_n est continue sur $[-B-1, A+1]$ et $1-p \in]F_n(-B-1), F_n(A+1)[$.

Le théorème des valeurs intermédiaires montre que F_n prend sur $[-B-1, A+1]$ toutes les valeurs comprises entre $F(-B-1)$ et $F(A+1)$.

Ainsi $\exists c_n \in [-B-1, A+1]$, $F_n(c_n) = 1-p$

Alors $P\left(\sum_{i=1}^{n-2} \frac{Z_i^2}{\sigma^2} \leq c_n\right) = 1-p$.

Donc $P\left(\sum_{i=1}^{n-2} \frac{Z_i^2}{\sigma^2} \geq c_n\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n-2} \frac{Z_i^2}{\sigma^2} > c_n\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{n-2} \frac{Z_i^2}{\sigma^2} \leq c_n\right) = 1-(1-p) = p$

donc $P\left(\sum_{i=1}^{n-2} Z_i^2 \geq \sigma^2 c_n\right) = p$ car $\sigma^2 > 0$. Alors $P\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 \geq c_n \sigma^2\right) = p$.

<u>Pour tout p dans $]0,1[$ il existe un réel c_n ne dépendant pas des paramètres</u>

<u>inconnus a, b et σ^2 tel que $P\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 \geq c_n \sigma^2\right) = p$.</u>

<u>Remarques</u> 1. En se fatiguant un peu plus on peut montrer l'unicité de c_n car F_n est nulle sur $]-\infty, 0[$ et réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$, non ?

2. F_n est nulle sur $]-\infty, 0[$ et même sur $]-\infty, 0]$!

Or $1-p > 0$ et $F_n(c_n) = 1-p$. Donc $\underline{\underline{c_n > 0}}$.

Q10 a) Posons $\forall (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$, $\ell_1(r_1, r_2, \dots, r_n) = \sum_{i=1}^{n} r_i$ et $\ell_2(r_1, r_2, \dots, r_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i$

ℓ_1 et ℓ_2 sont deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. Posons $\mathcal{C} = \{ r \in \mathbb{R}^n \mid \ell_1(r) = 1$ et $\ell_2(r) = x_{n+1} \}$ et

$\mathcal{H} = \mathrm{Ker}\, \ell_1 \cap \mathrm{Ker}\, \ell_2$.

Rappelons que $\mathcal{H}^\perp = \mathrm{Vect}(\nabla \ell_1(r), \nabla \ell_2(r))$ où r est un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Ainsi $\mathcal{H}^\perp = \mathrm{Vect}((1,1,\dots,1),(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \mathcal{F}$.

Notons que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ car c'est une fonction polynomiale et $\mathbb{R}^n$ est un ouvert !

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des points critiques de g dans l'optimisation pour la contrainte $\mathcal{C}$.

Soit $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$. $r \in \mathcal{S} \Leftrightarrow r \in \mathcal{C}$ et $\nabla g(r) \in \mathcal{H}^\perp$.

$r \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} r_i = 1$, $\sum_{i=1}^{n} x_i r_i = x_{n+1}$ et $(2r_1, 2r_2, \dots, 2r_n) \in \mathrm{Vect}((1,1,\dots,1),(x_1, x_2, \dots, x_n))$.

$r \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} r_i = 1$ $\sum_{i=1}^{n} x_i r_i = x_{n+1}$ et $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $(2r_1, 2r_2, \dots, 2r_n) = \alpha(1,1,\dots,1) + \beta(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$r \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} r_i = 1$, $\sum_{i=1}^{n} x_i r_i = x_{n+1}$ et $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $r_i = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} x_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$r \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} r_i = 1$, $\sum_{i=1}^{n} x_i r_i = x_{n+1}$ et $\exists (\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2$, $r_i = \alpha' + \beta' x_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$r \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists (\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \forall i \in [\![1, n]\!], \quad r_i = \alpha' + \beta' x_i \\ 1 = \sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha' + \beta' x_i) = n\alpha' + \beta' \sum_{i=1}^{n} x_i = n\alpha' + \beta' n \bar{x} \\ x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i = \sum_{i=1}^{n} x_i(\alpha' + \beta' x_i) = \alpha' \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta' \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \alpha' n \bar{x} + \beta'(n S_x^2 + n \bar{x}^2) \end{cases}$$

(Q1 b)

$$r \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists (\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \forall i \in [\![1, n]\!], \quad r_i = \alpha' + \beta' x_i \\ n\alpha' + n\bar{x}\beta' = 1 \\ n\bar{x}\alpha' + (nS_x^2 + n\bar{x}^2)\beta' = x_{n+1} \end{cases}.$$

Soit $(\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} n\alpha' + n\bar{x}\beta' = 1 \\ n\bar{x}\alpha' + (nS_x^2 + n\bar{x}^2)\beta' = x_{n+1} \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - \bar{x} L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} n\alpha' + n\bar{x}\beta' = 1 \\ nS_x^2 \beta' = x_{n+1} - \bar{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta' = \dfrac{x_{n+1} - \bar{x}}{n S_x^2} \\ \alpha' = \dfrac{1}{n}\left[1 - n\bar{x}\dfrac{x_{n+1} - \bar{x}}{n S_x^2}\right] = \dfrac{1}{n} - \bar{x}\dfrac{x_{n+1} - \bar{x}}{n S_x^2} \end{cases}.$$

$$\text{Alors } r \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists (\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \forall i \in [\![1, n]\!], \quad r_i = \alpha' + \beta' x_i \\ \alpha' = \dfrac{1}{n} - \bar{x}\dfrac{x_{n+1} - \bar{x}}{n S_x^2} \\ \beta' = \dfrac{x_{n+1} - \bar{x}}{n S_x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \; r_i = \frac{1}{n} - \bar{x}\frac{x_{n+1} - \bar{x}}{n S_x^2} + \frac{x_{n+1} - \bar{x}}{n S_x^2} x_i.$$

R.

$r \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ r_i = \frac{1}{n} + \frac{x_{n+1}-\bar{x}}{n S_x^2}(x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n} + (x_{n+1}-\bar{x})\frac{x_i-\bar{x}}{n S_x^2} = \frac{1}{n} + (x_{n+1}-\bar{x})\alpha_i$.

Posons $\forall i \in [\![1,n]\!],\ r_i^* = \frac{1}{n} + (x_{n+1}-\bar{x})\alpha_i$ et $r^* = (r_1^*, r_2^*, \dots, r_n^*)$. r^* est l'unique point critique de g dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Montrons que g admet en r^* un minimum absolu sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Donnons "deux" méthodes (en fait c'est la même dans le développement car g est une fonction polynôme de n variables de degré 2 ...).

Version 1 — A la main ! Soit $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathcal{C}$. Posons $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) = r - r^*$.

Notons que $\ell_1(h) = \ell_1(r) - \ell_1(r^*) = 1 - 1 = 0$ et $\ell_2(h) = \ell_2(r) - \ell_2(r^*) = x_{n+1} - x_{n+1} = 0$.

Ainsi $\sum_{i=1}^{n} h_i = \sum_{i=1}^{n} x_i h_i = 0$

$g(r) = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (r_i^* + h_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (r_i^*)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} r_i^* h_i + \sum_{i=1}^{n} h_i^2$.

$$g(r) - g(r^*) = 2\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{n} + (x_{n+1}-\bar{x})\alpha_i\right]h_i + \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \underset{\sum_{i=1}^{n} h_i = 0}{=} 2(x_{n+1}-\bar{x})\sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i + \sum_{i=1}^{n} h_i^2.$$

Or $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\bar{x})}{n S_x^2} h_i = \frac{1}{n S_x^2}\Big[\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i h_i}_{=0} - \bar{x}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} h_i}_{=0}\Big] = 0$.

Alors $g(r) - g(r^*) = \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \geq 0$.

Finalement $\forall r \in \mathcal{C}$, $g(r) \geq g(r^*)$. g admet en r^* un minimum absolu sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Version 2.. Taylor-Lagrange à l'ordre 2 !

g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ comme fonction polynomiale. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $i \neq j$.

$\forall r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$, $\frac{\partial g}{\partial r_i}(r) = 2r_i$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial r_j \partial r_i}(r) = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $\forall r \in \mathbb{R}^n$, $\nabla g(r) = 2r$ et $\nabla^2 g(r) = 2 I_n$.

Soit $r \in \mathbb{R}^n$ et q_r la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ associée à $\nabla^2 g(r)$.

$\forall h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, $q_r(h) = (h_1\ h_2 \cdots h_n)\, 2 I_n \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = 2\sum_{i=1}^{n} h_i^2$.

Soit $r \in \mathcal{B}$. Posons $h = r - r^o$. $[r^o, r^o + h] \subset \mathbb{R}^n$!

La formule de Taylor appliquée à l'ordre 1 à g donne :

$\exists \theta \in]0,1[$, $g(r^o + h) = g(r^o) + \langle \nabla g(r^o), h \rangle + \frac{1}{2} q_{r^o + \theta h}(h)$.

$\ell_1(h) = \ell_1(r) - \ell_1(r^o) = 1 - 1 = 0$ et $\ell_2(h) = \ell_2(r) - \ell_2(r^o) = x_{n+1} - x_{n+1} = 0$.

Donc $h \in \operatorname{Ker} \ell_1 \cap \operatorname{Ker} \ell_2$. Alors $h \in \mathcal{B}$ et $\nabla g(r^o) \in \mathcal{B}^\perp$. Ainsi $\langle \nabla g(r^o), h \rangle = 0$.

Alors $g(r) = g(r^o + h) = g(r^o) + \frac{1}{2} q_{r^o + \theta h}(h)$. Posons $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$.

Donc $g(r) = g(r^o) + \frac{1}{2} 2 \sum_{i=1}^{n} h_i^2$. $g(r) = g(r^o) + \sum_{i=1}^{n} h_i^2$.

Ainsi nous retrouvons la formule de la version 1 et nous pouvons encore dire que $g(r) \geq g(r^o)$ et ceci pour tout r dans $\mathcal{B}$.

<u>g possède en r^o un minimum absolu sous la contrainte $\mathcal{B}$.</u>

<u>b)</u> Soit $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$. $\hat{Y}_{n+1}^{(r)}$ possède une espérance comme combinaison linéaire de n variables aléatoires qui possèdent une espérance.

$E(\hat{Y}_{n+1}^{(r)}) = \sum_{i=1}^{n} r_i E(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i (a x_i + b) = a \sum_{i=1}^{n} x_i r_i + b \sum_{i=1}^{n} r_i$.

$E(\hat{Y}_{n+1}^{(r)}) = E(Y_{n+1}) \iff a \sum_{i=1}^{n} x_i r_i + b \sum_{i=1}^{n} r_i = a x_{n+1} + b \iff \left(\sum_{i=1}^{n} x_i r_i - x_{n+1}\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} r_i - 1\right) b = 0$

Posons $t_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i - x_{n+1}$ et $t_2 = \sum_{i=1}^{n} r_i - 1$.

- Si $t_1 = t_2 = 0$: $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $t_1 \alpha + t_2 \beta = 0$.
- Réciproquement supposons que $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $t_1 \alpha + t_2 \beta = 0$.

Alors $t_1 \times 1 + t_2 \times 0 = t_1 \times 0 + t_2 \times 1 = 0$ donc $t_1 = t_2 = 0$.

Ainsi $\left(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ t_1 \alpha + t_2 \beta = 0\right) \iff t_1 = t_2 = 0$.

Donc $E(\hat{Y}_{n+1}^{(r)}) = E(Y_{n+1})$ pour tout (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si :

$\sum_{i=1}^{n} x_i r_i - x_{n+1} = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} r_i - 1 = 0$.

<u>$E(\hat{Y}_{n+1}^{(r)}) = E(Y_{n+1})$ pour tout (a,b) dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i r_i = x_{n+1}$.</u>

$V(\hat{Y}_{n+1}^{(r)})$ existe car $\hat{Y}_{n+1}^{(r)}$ est combinaison linéaire de n variables aléatoires qui possèdent une variance.

$r_1Y_1, r_2Y_2, \dots, r_nY_n$ étant indépendantes : $V(\hat{Y}_{n+1}^{(r)}) = \sum_{i=1}^{n} V(r_iY_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 V(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \sigma^2$

Comme $\sigma^2 > 0$, $V(\hat{Y}_{n+1}^{(r)})$ est minimale lorsque $E(\hat{Y}_{n+1}^{(r)}) = E(Y_{n+1})$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} r_i^2$ est minimale sous les contraintes $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i r_i = x_{n+1}$ donc si et seulement si $r = r^*$.

Parmi les prédicteurs linéaires $\hat{Y}_{n+1}^{(r)}$ de Y_{n+1} qui vérifient $E(\hat{Y}_{n+1}^{(r)}) = E(Y_{n+1})$ pour tout (a,b) dans $\mathbb{R}^2$, $\hat{Y}_{n+1}^{(r^*)}$ est celui qui a la plus petite variance.

$$\hat{Y}_{n+1}^{(r^*)} = \sum_{i=1}^{n} r_i^* Y_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} + (x_{n+1} - \bar{x}) a_i\right) Y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i + (x_{n+1} - \bar{x}) \sum_{i=1}^{n} a_i Y_i$$

$$\hat{Y}_{n+1}^{(r^*)} = \bar{Y}_n + (x_{n+1} - \bar{x}) A_n = A_n x_{n+1} + \bar{Y}_n - A_n \bar{x} = A_n x_{n+1} + B_n .$$

$$\hat{Y}_{n+1}^{(r^*)} = A_n x_{n+1} + B_n .$$

Q13 a) 1°/ $Y_{n+1} - (A_n x_{n+1} + B_n) = Y_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} r_i^* Y_i = Y_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} (-r_i^*) Y_i = \sum_{i=1}^{n} (-r_i^*) Y_i + Y_{n+1}$

2°/ $Y_i \hookrightarrow \mathcal{N}(ax_i + b, \sigma^2)$ pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$

3°/ $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, Y_{n+1}$ sont indépendantes

4°/ $(-r_1^*, -r_2^*, \dots, -r_n^*, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^{n+1}}$.

Alors $Y_{n+1} - (A_n x_{n+1} + B_n)$ suit une (!) loi normale.

$$E(Y_{n+1} - (A_n x_{n+1} + B_n)) = E(Y_{n+1}) - x_{n+1} E(A_n) - E(B_n) = a x_{n+1} + b - x_{n+1} a - b = 0 .$$

$Y_{n+1} - (A_n x_{n+1} + B_n) = \sum_{i=1}^{n} (-r_i^*) Y_i + Y_{n+1}$ et $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+1}$ sont indépendantes. Alors

$$V(Y_{n+1} - (A_n x_{n+1} + B_n)) = \sum_{i=1}^{n} (-r_i^*)^2 V(Y_i) + V(Y_{n+1}) = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i^{*2} + 1\right) \sigma^2 .$$

$$\sum_{i=1}^n r_i^{*2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} + (x_{n+1}-\bar{x})a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} + 2\times\frac{1}{n}(x_{n+1}-\bar{x})\underbrace{\sum_{i=1}^n a_i}_{=0} + (x_{n+1}-\bar{x})^2 \underbrace{\sum_{i=1}^n a_i^2}_{\frac{1}{n} S_x^2}$$

$$\sum_{i=1}^n r_i^{*} = \frac{1}{n} + (x_{n+1}-\bar{x})^2 \frac{1}{n} S_x^2 .$$

<u>Ainsi $Y_{n+1} - (A x_{n+1} + B_n)$ suit la loi normale d'espérance nulle et de variance</u>

<u>$\left(\frac{1}{n} + (x_{n+1}-\bar{x})^2 \frac{S_x^2}{n} + 1\right)\sigma^2$.</u>

<u>b)</u> Posons $D_n = Y_{n+1} - A_n x_{n+1} - B_n$ et $\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n} + (x_{n+1}-\bar{x})^2 \frac{S_x^2}{n} + 1}$.

$D_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0, (\sigma_n \sigma)^2)$. Alors $\frac{D_n}{\sigma_n \sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

$$\forall \delta \in \mathbb{R}_+,\quad P\left(\left|\frac{D_n}{\sigma_n\sigma}\right| \leq \delta\right) = P\left(-\delta \leq \frac{D_n}{\sigma_n\sigma} \leq \delta\right) = P\left(-\delta < \frac{D_n}{\sigma_n\sigma} \leq \delta\right) = \phi(\delta) - \phi(-\delta) \overset{\phi(-\delta) = 1-\phi(\delta)}{=} 2\phi(\delta) - 1$$

$\forall \delta \in \mathbb{R}_+$, $P\left(\left|\frac{D_n}{\sigma_n\sigma}\right| \leq \delta\right) = p \Leftrightarrow 2\phi(\delta) - 1 = p \Leftrightarrow \phi(\delta) = \frac{p+1}{2}$.

Or $\frac{p+1}{2} \in]\frac{1}{2}, 1[$ et ϕ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

Alors $\forall \delta \in \mathbb{R}_+$, $P\left(\left|\frac{D_n}{\sigma_n\sigma}\right| \leq \delta\right) = p \Leftrightarrow \delta = \phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)$. Notons que $\phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right) > 0$ car $\frac{p+1}{2} > \frac{1}{2}$.

Donc $P\left(\left|\frac{D_n}{\sigma_n\sigma}\right| \leq \phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)\right) = p$. $P\left(|D_n| \leq \sigma_n \phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)\sigma\right) = p$ car $\sigma_n \sigma > 0$.

Posons $d_n = \sigma_n \phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)$. <u>$d_n = \sqrt{\frac{1}{n} + (x_{n+1}-\bar{x})^2 \frac{S_x^2}{n} + 1}\ \phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)$ ne dépend pas de</u>

<u>a, b et σ^2 et $P\left(|Y_{n+1} - (A_n x_{n+1} + B_n)| \leq d_n \sigma\right) = p$.</u>

<u>Remarque</u>.. $d_n = \sqrt{\frac{1}{n} + (x_{n+1}-\bar{x})^2 \frac{S_x^2}{n} + 1}\ \phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)$.

Donc <u>d_n est strictement positif</u> comme produit de deux réels strictement positifs.

c) Posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2$. Q3c) nous a donné $P(S_n \geq c_n \sigma^2) = p$ avec $c_n > 0$.

donc $P(\sqrt{S_n} \geq \sqrt{c_n}\,\sigma) = p$ car $c_n > 0$, $\sigma > 0$ et S_n prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Q3 b) nous a donné $P(|D_n| \leq d_n \sigma) = p$ avec $d_n > 0$.

$\left(\left\{ \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} \geq \sigma \right\}, \left\{ \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} < \sigma \right\} \right)$ est un système complet d'événements.

de plus $P\left(\frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} \geq \sigma \right) = p$ et $P\left(\frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} < \sigma \right) = 1-p$. La formule des probabilités totales donne alors :

$$p = P(|D_n| \leq d_n\sigma) = P\left(\{|D_n| \leq d_n \sigma\} \cap \left\{ \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} \geq \sigma \right\} \right) + P\left(\{|D_n| \leq d_n \sigma\} \cap \left\{ \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} < \sigma \right\} \right).$$

notons alors que $\{|D_n| \leq d_n \sigma\} \cap \left\{ \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} \geq \sigma \right\} \subset \left\{ |D_n| \leq d_n \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} \right\}$;

et $\{|D_n| \leq d_n \sigma\} \cap \left\{ \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} < \sigma \right\} \subset \left\{ \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} < \sigma \right\}$.

Par croissance de P il vient $p \leq P\left(|D_n| \leq d_n \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} \right) + P\left(\frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} < \sigma \right)$.

donc $p \leq P\left(|D_n| \leq d_n \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} \right) + 1 - p$; $\underline{2p-1 \leq P\left(|D_n| \leq d_n \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} \right)}$.

$$P\left(|D_n| \leq \frac{d_n}{\sqrt{c_n}} \sqrt{S_n}\right) = P\left(|Y_{n+1} - A_n x_{n+1} - B_n| \leq \frac{d_n}{\sqrt{c_n}} \sqrt{S_n} \right)$$

$$P\left(|D_n| \leq \frac{d_n}{\sqrt{c_n}} \sqrt{S_n}\right) = P\left(A_n x_{n+1} + B_n - \frac{d_n}{\sqrt{c_n}} \sqrt{S_n} \leq Y_{n+1} \leq A_n x_{n+1} + B_n + \frac{d_n}{\sqrt{c_n}} \sqrt{S_n} \right)$$

donc $\underline{P\left(Y_{n+1} \in \left[A_n x_{n+1} + B_n - \frac{d_n}{\sqrt{c_n}} \sqrt{S_n} , A_n x_{n+1} + B_n + \frac{d_n}{\sqrt{c_n}} \sqrt{S_n} \right] \right) \geq 2p-1}$.

Rappelons que $S_n = \sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - x_i A_n - B_n)^2$ car $\hat{U} = Y - \Pi \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$.

de plus $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \bar{x}}{n s_x^2} Y_i$ et $B_n = \bar{Y}_n - A_n \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i - \bar{x} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \bar{x}}{n s_x^2} Y_i$

Donc les variables aléatoires $A_n x_{n+1} + B_n - \frac{d_n}{\sqrt{c_n}} \sqrt{S_n}$ et $A_n x_{n+1} + B_n + \frac{d_n}{\sqrt{c_n}} \sqrt{S_n}$

ne dépendent que des $(Y_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$, des $(x_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ de c_n et d_n.

Ainsi l'intervalle $\left[A_n x_{n+1} + B_n - \frac{d_n}{\sqrt{c_n}} \sqrt{S_n}, A_n x_{n+1} + B_n + \frac{d_n}{\sqrt{c_n}} \sqrt{S_n}\right]$ est solution

du problème posé.

Non il ne s'agit pas d'un intervalle de confiance usuel. car ici Y_{n+1} n'est pas une

constante mais une variable aléatoire.

<u>Remarque</u>.. Auriez ici on avait plutôt envie de lui répondre au concepteur(*)

qu'il s'agissait plutôt d'un intervalle de con-fiance ... la fatigue sans doute.

(*) en consultant ici ... encore que ...