



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2009

Conceptions : H.E.C. – E.S.C.P. – E.A.P

283

OPTION SCIENTIFIQUE

CCIP_M2_S

MATHÉMATIQUES II

Mardi 5 mai 2009, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Dans tout le problème, N désigne un entier supérieur ou égal à 1.

On note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement, l'espérance et la variance lorsqu'elles existent, de toute variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé.

Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi uniforme discrète sur $[1, N]$.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \sup(U_1, U_2, \dots, U_n)$ et $Z_n = \inf(U_1, U_2, \dots, U_n)$. On admet que T_n et Z_n sont des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Ainsi, pour tout ω de Ω , on a :

$$T_n(\omega) = \max(U_1(\omega), U_2(\omega), \dots, U_n(\omega)) \text{ et } Z_n(\omega) = \min(U_1(\omega), U_2(\omega), \dots, U_n(\omega))$$

On rappelle que si C désigne un élément de $\mathcal{A}$, on note 1_C la variable aléatoire indicatrice de l'événement C , définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par :

$$1_C(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in C \\ 0 & \text{si } \omega \notin C \end{cases}$$

$$\text{On pose, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^* : d_n(N) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si } N \geq 2 \\ 0 & \text{si } N = 1 \end{cases}$$

Préliminaire

1. Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $[1, N]$. Établir les deux relations suivantes :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} P([Y > k]) \quad \text{et} \quad E(Y^2) = \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)P([Y > k])$$

Partie I. Inf et Sup

2. Rappeler, sans démonstration, les valeurs respectives de $E(U_1)$ et de $V(U_1)$.
3. a) Calculer, pour tout k de $[1, N]$, $P([T_n \leq k])$.
b) En déduire la loi de probabilité de T_n .
4. a) Montrer que la suite $(d_n(N))_{n \geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.
b) Exprimer $E(T_n)$ en fonction de N et $d_n(N)$. En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n)$.
c) Établir la formule suivante : $V(T_n) = (2N - 1)d_n(N) - 2Nd_{n+1}(N) - d_n^2(N)$.
En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(T_n)$.
d) Montrer que si $N \geq 2$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} = 1 - \frac{1}{N}$; en déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$, on a : $V(T_n) \sim d_n(N)$.
5. Déterminer la loi de Z_n . Calculer $E(Z_n)$ et $V(Z_n)$.
6. On rappelle que la fonction Pascal `random(N)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, N - 1]$. Écrire une fonction Pascal d'en-tête `simulmax(n : integer) : integer` qui simule la variable aléatoire T_n .

Partie II. Couple (Inf, Sup)

7. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout couple (k, ℓ) de $\mathbb{N}^2$: $\phi_n(k, \ell) = P([T_n \leq k] \cap [Z_n \leq \ell])$.
a) Montrer, pour tout (k, ℓ) de $[1, N]^2$, la relation suivante :

$$\phi_n(k, \ell) = \begin{cases} \left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si } k \leq \ell \\ \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n & \text{si } k > \ell \end{cases}$$

- b) Établir, pour tout (k, ℓ) de $[1, N]^2$, la formule suivante :

$$P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = \phi_n(k, \ell) + \phi_n(k-1, \ell-1) - \phi_n(k-1, \ell) - \phi_n(k, \ell-1)$$

- c) En déduire, en distinguant les trois cas $k < \ell$, $k = \ell$ et $k > \ell$, l'expression de $P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell])$ en fonction de k et ℓ .

8. On donne, pour tout couple (m, n) de $(\mathbb{N}^*)^2$, les deux relations suivantes :

$$\text{i) } \sum_{j=1}^m [(j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n] = (m+1)^n - m^n - 1;$$

$$\text{ii) } \sum_{j=1}^m j[(j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n] = m(m+1)^n - (m+1)m^n.$$

- a) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la formule suivante : $E(T_n Z_n) = N(1 + d_{n+1}(N))$.

- b) On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, ρ_n le coefficient de corrélation linéaire entre T_n et Z_n .

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n$ lorsque $N \geq 2$.

9. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout couple (k, ℓ) de $[1, N]^2$, calculer la probabilité conditionnelle $P_{[T_n=k]}([Z_n = \ell])$.

- b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout k de $[1, N]$, l'expression de l'espérance conditionnelle $E(Z_n/[T_n = k])$ de Z_n sachant $[T_n = k]$.

Partie III. Prévision

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on dispose d'un $(n+1)$ -échantillon indépendant identiquement distribué (i.i.d.) $(U_1, U_2, \dots, U_{n+1})$ de la loi uniforme sur $[1, N]$.

On pose : $T_n = \sup(U_1, U_2, \dots, U_n)$ et $T_{n+1} = \sup(U_1, U_2, \dots, U_{n+1}) = \sup(T_n, U_{n+1})$.

Pour tout $t = (t_1, t_2, \dots, t_N)$ de $\mathbb{R}^N$, on pose : $W_t(T_n) = \sum_{k=1}^N t_k \times \mathbf{1}_{[T_n=k]}$.

Dans cette partie, on se propose de déterminer la valeur de t pour laquelle les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- i) $E(W_t(T_n)) = E(T_{n+1})$;
- ii) $E[(T_{n+1} - W_t(T_n))^2]$ est minimale.

10. Montrer, pour tout k de $[1, N]$, la relation : $P([W_t(T_n) = t_k]) = P([T_n = k])$.

11.  tablir, pour tout k de $[1, N]$, la formule suivante :

$$E(T_{n+1} \times \mathbf{1}_{[T_n=k]}) = E(T_{n+1}/[T_n = k]) \times P([T_n = k])$$

12. a) Calculer, pour tout couple (k, j) de $[1, N]^2$, $P([T_n = k] \cap [T_{n+1} = j])$.

b) En déduire, pour tout couple (k, j) de $[1, N]^2$, la probabilité conditionnelle $P_{[T_n=k]}([T_{n+1} = j])$.

c) Déterminer, pour tout k de $[1, N]$, l'expression de l'espérance conditionnelle $E(T_{n+1}/[T_n = k])$ de T_{n+1} sachant $[T_n = k]$.

d) En appliquant la formule de l'espérance totale, déduire de la question précédente la relation suivante :

$$E(T_{n+1}) = \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N} (E(T_n^2) - E(T_n))$$

13.  tablir l'égalité suivante : $(W_t(T_n))^2 = \sum_{k=1}^N t_k^2 \times \mathbf{1}_{[T_n=k]}$.

14. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^N$ à valeurs réelles par :

$$g(t_1, t_2, \dots, t_N) = E[(T_{n+1} - W_t(T_n))^2]$$

a)   l'aide des résultats des questions 11, 12 et 13, expliciter g en fonction des variables $t_1, t_2, \dots, t_N$.

b) Montrer que g admet un minimum global sur $\mathbb{R}^N$ atteint en un point $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ que l'on déterminera en fonction de $E(T_{n+1}/[T_n = 1]), E(T_{n+1}/[T_n = 2]), \dots, E(T_{n+1}/[T_n = N])$.

15.  tablir les deux relations suivantes :

$$E(W_\theta(T_n)) = E(T_{n+1}) \quad \text{et} \quad V(W_\theta(T_n)) \leq V(T_{n+1})$$

16. a)  tablir, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, l'égalité suivante : $\sum_{k=1}^N k^i \times \mathbf{1}_{[T_n=k]} = (T_n)^i$.

b) En déduire la relation suivante : $W_\theta(T_n) = \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N} (T_n^2 - T_n)$.

Partie IV. Estimation

Soit U une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi uniforme discrète sur $[1, N]$. On suppose que le paramètre N est inconnu.

Cette partie a pour objet la détermination d'un estimateur ponctuel de N , sans biais et de variance minimale.

Pour n entier supérieur ou égal à 1, soit $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ un n -échantillon i.i.d. de la loi de U .

17. Soit ε un réel strictement positif. On pose :

$$A_n(\varepsilon) = [|T_n - N| \geq \varepsilon] \text{ et } B_n(\varepsilon) = [|T_n - E(T_n)| + |d_n(N)| \geq \varepsilon]$$

- Peut-on dire que $T_n + d_n(N)$ est un estimateur sans biais de N ?
- Montrer que la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'estimateurs asymptotiquement sans biais du paramètre N .
- Montrer que $A_n(\varepsilon) \subset B_n(\varepsilon)$ et qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout $n > n_0$, on a : $B_n(\varepsilon) \subset [|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon/2]$.
- En déduire que la suite d'estimateurs $(T_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

18. a) Calculer, pour tout n -uplet $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de $[1, N]^n$, $P\left(\bigcap_{i=1}^n [U_i = u_i]\right)$.

b) En déduire que, pour tout k de $[1, N]$, la loi conditionnelle du vecteur aléatoire $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ sachant $[T_n = k]$ est donnée par :

$$P_{[T_n=k]}\left(\bigcap_{i=1}^n [U_i = u_i]\right) = \begin{cases} \frac{1}{k^n - (k-1)^n} & \text{si pour tout } i \text{ de } [1, n], 1 \leq u_i \leq N \text{ et } \max_{1 \leq i \leq n} (u_i) = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarquera que cette loi conditionnelle ne dépend pas du paramètre N .

19. On pose, pour n entier de $\mathbb{N}^*$: $S_n = T_n + Z_n - 1$ et, pour tout k de $[1, N]$: $\psi_n(k) = \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{k^n - (k-1)^n}$.

- Montrer que S_n est un estimateur sans biais de N .
- Établir, pour tout k de $[1, N]$, l'égalité : $\psi_n(k) = E(S_n/[T_n = k])$.
- En déduire que $\psi_n(T_n)$ est un estimateur sans biais de N .
- On pose, pour tout k de $[1, N]$: $\varphi_n(k) = E(S_n^2/[T_n = k])$. Établir, pour tout k de $[1, N]$, l'inégalité : $\psi_n^2(k) \leq \varphi_n(k)$ (on pourra utiliser la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\lambda \mapsto E((S_n - \lambda)^2/[T_n = k])$). En déduire que $V(\psi_n(T_n)) \leq V(S_n)$.
- Calculer $V(S_n)$. En déduire que $\psi_n(T_n)$ est un estimateur convergent de N .

20. Soit, pour n entier de $\mathbb{N}^*$, un estimateur sans biais R_n du paramètre N .

On pose, pour tout k de $[1, N]$: $f_n(k) = E(R_n/[T_n = k])$.

- En utilisant une méthode analogue à celle de la question 19.d, montrer que : $V(f_n(T_n)) \leq V(R_n)$.
- Soit F une fonction réelle. Montrer que, pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$, la condition « pour tout N de $\mathbb{N}^*$, $E(F(T_n)) = N$ » est vérifiée, si et seulement si, pour tout k de $[1, N]$, on a : $F(k) = \psi_n(k)$.
- En déduire que dans l'ensemble des estimateurs sans biais de N , l'estimateur $\psi_n(T_n)$ est optimal, dans le sens où $V(\psi_n(T_n))$ est minimale.

La partie IV constitue une démonstration du théorème de Lehmann-Scheffé dans le cas particulier d'une loi uniforme sur $[1, N]$, avec N inconnu.

Préliminaire

$$\textcircled{Q1} \quad E(Y) = \sum_{k=1}^N k P(Y=k) = \sum_{k=1}^N k (P(Y \geq k-1) - P(Y \geq k)) = \sum_{k=1}^N k P(Y \geq k-1) - \sum_{k=1}^N k P(Y \geq k)$$

$\uparrow$
 $P(Y \geq N) = 0$

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) P(Y \geq k) - \sum_{k=0}^{N-1} k P(Y \geq k)$$

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{E(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} P(Y \geq k)}}.$$

le même raisonnement donne : $E(Y^2) = \sum_{k=1}^N k^2 P(Y=k)$.

$$E(Y^2) = \sum_{k=1}^N k^2 (P(Y \geq k-1) - P(Y \geq k)) = \sum_{k=1}^N k^2 P(Y \geq k-1) - \sum_{k=1}^N k^2 P(Y \geq k)$$

$$E(Y^2) = \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)^2 P(Y \geq k) - \sum_{k=0}^{N-1} k^2 P(Y \geq k) = \sum_{k=0}^{N-1} (k^2 + (k+1 - k^2) P(Y \geq k))$$

$$\underline{\underline{E(Y^2) = \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) P(Y \geq k)}}.$$

Partie I Inf et Sup

$$\textcircled{Q2} \quad \underline{\underline{E(U_1) = \frac{N+1}{2}}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{V(U_1) = \frac{N^2-1}{12}}}.$$

$$\textcircled{Q3} \quad \text{a) Soit } k \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad P(T_n \leq k) = P(\sup(U_1, U_2, \dots, U_n) \leq k)$$

$$P(T_n \leq k) = P(\bigcap_{i=1}^n \{U_i \leq k\}) = \prod_{i=1}^n P(U_i \leq k) \quad \text{car } U_1, U_2, \dots, U_n \text{ sont indépendantes.}$$

$$P(T_n \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n. \quad \text{Noter que ceci vaut pour } k=0.$$

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, P(T_n \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n}}.$$

$$k \in \llbracket 1, N \rrbracket \text{ et } k-1 \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$$

$$\text{b) Notons que : } \underline{\underline{T_n \in \llbracket 1, N \rrbracket}}.$$

$$\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad P(T_n = k) = P(T_n \leq k) - P(T_n \leq k-1) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n$$

$$\underline{\underline{\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P(T_n = k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n}}.$$

Q4 a) si $N=1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_n(N)=0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(N) = 0$.

Supposons $N \geq 2$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_N(n) = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$. $\forall k \in [1, N-1]$, $\left|\frac{k}{N}\right| < 1$ donc

$\forall k \in [1, N-1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{k}{N}\right)^n = 0$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(N) = 0$.

Donc les deux cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(N) = 0$.

b) Soit $N \in [2, +\infty[$. $E(T_n) = \sum_{k=0}^{N-1} P(T_n > k) = \sum_{k=0}^{N-1} (1 - P(T_n \leq k)) = N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$.

$E(T_n) = N - d_n(N)$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n) = N$ ce qui vaut encore pour $N=1$

c) Soit $N \in [2, +\infty[$. $E(T_n^2) = \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) P(T_n > k) = \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) [1 - P(T_n \leq k)]$

$E(T_n^2) = \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) - \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) \left(\frac{k}{N}\right)^n = N \times \frac{(2N+1) + (2(N-1)+1)}{2} - 2N \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$

$E(T_n^2) = N \times \frac{2N}{2} - 2N d_{n+1}(N) - d_n(N) = N^2 - 2N d_{n+1}(N) - d_n(N)$.

Alors $V(T_n) = E(T_n^2) - (E(T_n))^2 = N^2 - 2N d_{n+1}(N) - d_n(N) - (N - d_n(N))^2$.

$V(T_n) = N^2 - 2N d_{n+1}(N) - d_n(N) - N^2 + 2N d_n(N) - (d_n(N))^2$.

$V(T_n) = (2N-1)d_n(N) - 2N d_{n+1}(N) - d_n^2(N)$... à vérifier pour $N=1$...

$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(N) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d_{n+1}(N) = 0$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(T_n) = 0$.

Exercice ... prouver que la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à N .

d) Soit $N \in [2, +\infty[$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_n(N) = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N-1}\right)^n$

→ on aura même que $d_n(N) \sim \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$, logique !?

$$\forall k \in [1, N-2], \left| \frac{k}{N-1} \right| < 1 \text{ et } \text{car } k=N-1: \frac{k}{N-1} = 1!$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N-1} \right)^n = 1 \text{ et } 1 \neq 0!!$$

$$\text{Alors } d_n(N) = \left(\frac{N-1}{N} \right)^n \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N-1} \right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{N-1}{N} \right)^{n+1} = \left(\frac{N-1}{N} \right)^{n+1}$$

$$\underline{\underline{d_n(N) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{N-1}{N} \right)^{n+1}}}$$

$$\text{Alors } \frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{N-1}{N} \right)^{n+2}}{\left(\frac{N-1}{N} \right)^{n+1}} = \frac{N-1}{N} \quad \text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} = 1 - \frac{1}{N}.$$

$$\frac{V(T_n)}{d_n(N)} = 2N-1 - 2N \frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} = d_n^2(N). \quad \text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} = 1 - \frac{1}{N} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(N) = 0.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V(T_n)}{d_n(N)} = 2N-1 - 2N \left(1 - \frac{1}{N} \right) = 0^2 = 1N-1 - (2N-2) = 1.$$

$$\text{Alors } \underline{\underline{V(T_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} d_n(N)}}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

(Q5) Pour éviter de refaire des calculs nous allons montrer que la loi de Z_n est celle de $N+1-T_n$. Posons $V_n = N+1-T_n$.

Noter que $Z_n \in [1, N]$ et que $V_n \in [1, N]$ car $T_n \in [1, N]$.

$$\underline{\underline{V_1}} \quad Z_1 = \inf \{U_1, U_2, \dots, U_n\} = -\sup \{-U_1, -U_2, \dots, -U_n\}. \quad \leftarrow \text{Attention!}$$

$$Z_n = (N+1) - ((N+1) + \sup \{-U_1, -U_2, \dots, -U_n\}) = N+1 - \sup \{N+1-U_1, N+1-U_2, \dots, N+1-U_n\}.$$

$$\underline{\underline{Z_n = N+1 - \sup \{N+1-U_1, N+1-U_2, \dots, N+1-U_n\}}}$$

Noter que pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$, $N+1-U_i$ suit également une loi uniforme sur $[1, N]$. Or pour $N+1-U_1, N+1-U_2, \dots, N+1-U_n$ sont mutuellement indépendants.

Alors la loi de $\sup\{N+1-U_1, N+1-U_2, \dots, N+1-U_n\}$ est celle de T_n .

Donc la loi de Z_n est celle de $N+1-T_n$.

Indépendance de $U_1, U_2, \dots, U_n$

$\forall$ Soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

$$P(Z_n \geq k) = P(\sup\{U_1, U_2, \dots, U_n\} \geq k) = P\left(\bigcap_{i=1}^n (U_i \geq k)\right) \stackrel{\text{ind.}}{=} \prod_{i=1}^n P(U_i \geq k).$$

$$P(Z_n \geq k) = \prod_{i=1}^n (1 - P(U_i < k)) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{k-1}{N}\right) = \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n.$$

$$P(Z_n \geq k) = \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n \text{ pour tout } k \in \llbracket 1, N \rrbracket \text{ et même pour tout } k \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket!$$

et $\llbracket 1, N \rrbracket \cup \{N+1\} = \llbracket 1, N+1 \rrbracket$

$$\text{Mais } \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P(Z_n = k) = P(Z_n \geq k) - P(Z_n \geq k+1) = \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n.$$

$$\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P(Z_n = k) = \left(\frac{N+1-k}{N}\right)^n - \left(\frac{N+1-k-1}{N}\right)^n = P(T_n = N+1-k).$$

Donc $\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P(Z_n = k) = P(N+1 - T_n = k)$. A retrouver de manière générale.

Remarque... $\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P(Z_n = k) = \left(\frac{N+1-k}{N}\right)^n - \left(\frac{N-k}{N}\right)^n$.

Donc ces conditions $E(Z_n) = N+1 - E(T_n)$ et $V(Z_n) = (-1)^2 V(T_n) = V(T_n)$.

Alors $E(Z_n) = N+1 - (N - d_n(N))$ et $V(Z_n) = V(T_n)$

$$\underline{E(Z_n) = 1 + d_n(N)} \text{ et } \underline{V(Z_n) = (2N-1)d_n(N) - 2Nd_{n+1}(N) - d_n^2(N)}.$$

Remarque. - En $E(Z_n) = 1$, En $V(Z_n) = 0$, $V(Z_n) \sim d_n(N)$ et $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge

à loi vers la variable certaine égale à 1.

⑥ Bravo le concepteur. n, N, m En Pascal $n = N$.

Et puis il faut donner la valeur de N à la fonction.

Noter coder GN et N !

```
function simulmax(GN,n:integer):integer;
```

(V1)

P5

```
var k,max,s:integer;
```

```
begin
```

```
max:=random(GN);
```

```
For k:=2 to n do
```

```
begin
```

```
s:=random(GN);
```

```
If s>max then max:=s;
```

```
end;
```

```
simulmax:=s+1;
```

```
end;
```

```
function simulmax2(GN,n:integer):integer;
```

(V2)

```
var k,max,s:integer;
```

```
begin
```

```
max:=random(GN)+1;
```

```
For k:=2 to n do
```

```
begin
```

```
s:=random(GN)+1;
```

```
If s>max then max:=s;
```

```
end;
```

```
simulmax2:=s;
```

```
end;
```

v2 a la vuia naturelle

v3 érite des additions.

elle repare sur

$$T_n = \sup(U_{j-1}, U_{j-2}, \dots, U_{n-1}) + 1.$$

PARTIE II couple (Inf, sup).

(Q7) Pour toute cette question $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit $(r, e) \in \mathbb{N}^2$

recor... $r \leq e$ l'élément $[T_n \leq r]$ et cela a pour l'élément $[Z_n \leq e]$
car $Z_n \leq T_n$ et $r \leq e$.

$$\text{Ainsi } [T_n \leq r] \cap [Z_n \leq e] = [T_n \leq r].$$

$$\text{Donc } \phi_n(r, e) = P(T_n \leq e) = \left(\frac{e}{n}\right)^n$$

2^{de} cas... $r > e$

$$P(T_n \leq r) = P([T_n \leq r] \cap [Z_n \leq e]) + P([T_n \leq r] \cap [Z_n \geq e+1]).$$

$$\text{Donc } \phi_n(r, e) = P(T_n \leq r) - P([T_n \leq r] \cap [Z_n \geq e+1])$$

$$\phi_n(r, e) = P(T_n \leq r) - P\left(\bigcap_{i=1}^n [U_i \leq r] \cap \bigcap_{i=1}^n [U_i \geq e+1]\right).$$

$$\phi_n(k, e) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - P\left(\bigcap_{i=1}^n [e+1 \leq u_i \leq k]\right) \stackrel{(*)}{=} \left(\frac{k}{N}\right)^n - \prod_{i=1}^n P(e+1 \leq u_i \leq k).$$

$u_1, u_2, \dots, u_n$ sont indépendantes

$$\phi_n(k, e) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \prod_{i=1}^n \left(\frac{k-e}{N}\right) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-e}{N}\right)^n.$$

$$\underline{\underline{\forall (k, e) \in [1, N]^2, \quad \phi_n(k, e) = \begin{cases} \left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si } k \leq e \\ \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-e}{N}\right)^n & \text{si } k > e \end{cases} \quad (*)}}$$

▲ Pourquoi... (*) est vraie car si $k \leq e$, ce qui veut dire que :

$$\forall (k, e) \in [1, N]^2, \quad \phi_n(k, e) = \begin{cases} \left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si } k \leq e \\ \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-e}{N}\right)^n & \text{si } k > e \end{cases}.$$

b) Soit $(k, e) \in [1, N]^2$.

$$P([T_n = k] \cap [Z_n = e]) = P([T_n \leq k] \cap [Z_n = e]) - P([T_n \leq k-1] \cap [Z_n = e]).$$

$$P([T_n = k] \cap [Z_n = e]) = P([T_n \leq k] \cap [Z_n \leq e]) - P([T_n \leq k] \cap [Z_n \leq e-1]) -$$

$$(P([T_n \leq k-1] \cap [Z_n \leq e]) - P([T_n \leq k-1] \cap [Z_n \leq e-1])).$$

$$\text{Ainsi } P([T_n = k] \cap [Z_n = e]) = \phi_n(k, e) - \phi_n(k, e-1) - (\phi_n(k-1, e) - \phi_n(k-1, e-1)).$$

$$\underline{\underline{\forall (k, e) \in [1, N]^2, \quad P([T_n = k] \cap [Z_n = e]) = \phi_n(k, e) + \phi_n(k-1, e-1) - \phi_n(k-1, e) - \phi_n(k, e-1).}}$$

c) Avant de continuer allons leur voir dans la suite que ▲

Notons que si $k=0$ ou $e=0$ alors $\phi_n(k, e) = P([T_n = k] \cap [Z_n = e]) = 0$.

Il n'est pas difficile alors de voir que l'on peut écrire :

$$\underline{\underline{\forall (k, e) \in [0, N]^2, \quad \phi_n(k, e) = \begin{cases} \left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si } k \leq e \\ \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-e}{N}\right)^n & \text{si } k > e \end{cases}}}$$

Reprenons (k, e) dans $[1, N]^2$. Alors $k-1$ et $e-1$ sont bien

largement dans $[0, N]$!

1^a Cas: $k < e$. Alors $P([T_n = k] \cap [Z_n = e]) = 0$ ($\forall \omega \in \mathcal{E}, T_n(\omega) \geq Z_n(\omega)$).

2^a Cas: $k = e$. $P([T_n = k] \cap [Z_n = e]) = P(\sup_{1 \leq i \leq n} (U_i, \dots, U_n) = \sup_{1 \leq i \leq n} (U_i, \dots, U_n) = k)$

$$P([T_n = k] \cap [Z_n = e]) = P(\bigcap_{i=1}^n [U_i = k]) = \prod_{i=1}^n P(U_i = k) = \left(\frac{1}{N}\right)^n$$

Indépendance

3^a Cas: $k > e$. Alors $k-1 \geq e-1, k-1 \geq e, k \geq e+1$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } P([T_n = k] \cap [Z_n = e]) &= \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-e}{N}\right)^n + \left(\frac{k-1}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1-(e-1)}{N}\right)^n - \left(\left(\frac{k-1}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1-e}{N}\right)^n\right) \\ &= \left(\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1-(e-1)}{N}\right)^n\right) = \left(\frac{k-1-e}{N}\right)^n + \left(\frac{k-e+1}{N}\right)^n - 2\left(\frac{k-e}{N}\right)^n. \end{aligned}$$

$$\text{Alors } \forall (k, e) \in \mathbb{J}_1, N \mathbb{J}_1^2, P([T_n = k] \cap [Z_n = e]) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < e \\ \left(\frac{1}{N}\right)^n & \text{si } k = e \\ \left(\frac{k-1-e}{N}\right)^n + \left(\frac{k-e+1}{N}\right)^n - 2\left(\frac{k-e}{N}\right)^n & \text{si } k > e \end{cases}$$

développement

(Q8) $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\sum_{j=1}^m [(j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n] = \sum_{j=1}^m [(j+1)^n - j^n] - \sum_{j=1}^m [j^n - (j-1)^n] \stackrel{\downarrow}{=} (m+1)^n - 1 - (1^n - 0).$$

$$\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \sum_{j=1}^m [(j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n] = (m+1)^n - m^n - 1.$$

Ces deux résultats s'obtiennent sans difficulté par récurrence. Mais la preuve proposée ne dispense de l'exercice...

2) soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, soit $j \in \mathbb{J}_1, m \mathbb{J}$

$$j [(j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n] = (j+1-1)(j+1)^n - 2j^{n+1} + (j-1+1)(j-1)^n.$$

$$j [(j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n] = (j+1)^{n+1} - 2j^{n+1} + (j-1)^{n+1} + (j-1)^n - (j+1)^n.$$

$$\sum_{j=1}^m j [(j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n] = \underbrace{\sum_{j=1}^m [(j+1)^{n+1} - 2j^{n+1} + (j-1)^{n+1}]}_{(m+1)^{n+1} - m^{n+1} - 1} + \underbrace{\sum_{j=1}^m [(j-1)^n - (j+1)^n]}_{\sum_{j=0}^{m-1} j^n - \sum_{j=2}^{n+1} j^n}$$

$$\sum_{j=1}^m j [(j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n] = (m+1)^{n+1} - m^{n+1} - 1 + 1 - m^n - (m+1)^n.$$

$$\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \sum_{j=1}^m j [(j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n] = m(m+1)^n - (m+1)m^n.$$

o) soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$E(T_n, Z_n) = \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^N k \ell \mathbb{P}((T_n = k) \cap (Z_n = \ell)).$$

$$E(T_n, Z_n) = \sum_{k=1}^N \left[\sum_{\ell=1}^{k-1} k \ell \left[\left(\frac{k-1-\ell}{N} \right)^n + \left(\frac{k-\ell+1}{N} \right)^n - 2 \left(\frac{k-\ell}{N} \right)^n \right] + k^2 \left(\frac{1}{N} \right)^n + \sum_{\ell=k_n}^N k \ell \times 0 \right]$$

multiplions à tous par N^n et effectuons le changement d'indice $j = k - \ell$ dans $\odot$

On a :

$$N^n E(T_n, Z_n) = \sum_{k=1}^N k \sum_{j=1}^{k-1} (k-j) \left[(j-1)^n + (j+1)^n - 2j^n \right] + \sum_{k=1}^N k^2.$$

$$N^n E(T_n, Z_n) = \sum_{k=1}^N k^2 \left[\sum_{j=1}^{k-1} [(j-1)^n + (j+1)^n - 2j^n] \right] = \sum_{k=1}^N k \left[\sum_{j=1}^{k-1} (j[(j-1)^n + (j+1)^n - 2j^n]) \right] + \sum_{k=1}^N k^2.$$

Appliquons alors ii) (avec $m = k-1$)

$$N^n E(T_n, Z_n) = \sum_{k=1}^N k^2 (k^n (k-1)^n - 1) = \sum_{k=1}^N k (k-1) k^n - k (k-1)^n + \sum_{k=1}^N k^2.$$

$$N^n E(T_n, Z_n) = \sum_{k=1}^N (k^2 k^n - k^2 (k-1)^n - k^2 + k (k-1) k^n + k^2 (k-1)^n + k^2).$$

$$N^n E(T_n, Z_n) = \sum_{k=1}^N (k^2 k^n - k^2 (k-1)^n - k^2 + k (k-1) k^n + k^2 (k-1)^n + k^2) = \sum_{k=1}^N k^{n+1}.$$

$$\text{Donc } E(T_n, Z_n) = N \sum_{k=1}^N \left(\frac{k}{N} \right)^{n+1}.$$

$$\text{Si } N \geq 2 : E(T_n, Z_n) = N \left[\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N} \right)^{n+1} + 1 \right] = N [d_{n+1}(N) + 1] = N(1 + d_{n+1}(N)).$$

$$\text{Si } N = 1 : E(T_n, Z_n) = N \sum_{k=1}^1 \left(\frac{k}{1} \right)^{n+1} = N \times 1 = N(1 + 0) = N(1 + d_{n+1}(N)).$$

$$\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}^*, E(T_n, Z_n) = N(1 + d_{n+1}(N)).$$

b) soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $N \geq 2$. Notons que $V(T_n) \neq 0$ et $V(Z_n) \neq 0$. $\leftarrow Z_n$ et T_n ne sont pas presque sûrement constants

$$\rho_n = \frac{\text{cov}(T_n, Z_n)}{\sqrt{V(T_n)} \sqrt{V(Z_n)}} = \frac{E(T_n Z_n) - E(T_n) E(Z_n)}{V(T_n)} = \frac{N(1 + d_{n+1}(N)) - (N - d_n(N))(1 + d_n(N))}{V(T_n)}$$

$V(T_n) = V(Z_n)$

$$\rho_n = \frac{1}{V(T_n)} [N d_{n+1}(N) + d_n(N) - N d_n(N) + d_n^2(N)]$$

$$\rho_n \sim \frac{1}{d_n(N)} [N d_{n+1}(N) + d_n(N) - N d_n(N) + d_n^2(N)]$$

$$\rho_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} N \frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} - (N-1) + d_n(N)$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(N \frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} - (N-1) + d_n(N) \right) = N \times \left(1 - \frac{1}{N} \right) - (N-1) + 0 = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0 \text{ lorsque } N \geq 2.$$

(99) a) soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(k, e) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$.

$$P([Z_n = e] | [T_n = k]) = \frac{P([Z_n = e] \cap [T_n = k])}{P(T_n = k)} = \begin{cases} \frac{(1/N)^n}{\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n} & \text{si } k = e \\ \frac{\left(\frac{k-1-e}{N}\right)^n + \left(\frac{k-e+1}{N}\right)^n - 2\left(\frac{k-e}{N}\right)^n}{\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n} & \text{si } k > e \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (k, e) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, P([Z_n = e] | [T_n = k]) = \begin{cases} \frac{1}{k^n - (k-1)^n} & \text{si } k = e \\ \frac{(k-1-e)^n + (k-e+1)^n - 2(k-e)^n}{k^n - (k-1)^n} & \text{si } k > e \end{cases}$$

b) soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

$$E(Z_n | [T_n = k]) = \sum_{e=1}^N e P_{[T_n=k]}([Z_n = e]) = \frac{1}{k^n - (k-1)^n} + \sum_{e=1}^{k-1} e \frac{(k-1-e)^n + (k-e+1)^n - 2(k-e)^n}{k^n - (k-1)^n}.$$

$$[l^n - (l-1)^n] E(Z_n / [T_n = l]) = l + \sum_{j=1}^{l-1} (l-j) (j-1^n + j+1^n - 2j^n) \quad \leftarrow j = l-1 \dots$$

$$[l^n - (l-1)^n] E(Z_n / [T_n = l]) = l + l \sum_{j=1}^{l-1} (j-1^n + j+1^n - 2j^n) - \sum_{j=1}^{l-1} j (j-1^n + j+1^n - 2j^n).$$

En appliquant les résultats de Q8 on vient :

$$[l^n - (l-1)^n] E(Z_n / [T_n = l]) = l + l (l^n - (l-1)^n - 1) - ((l-1) l^n - l(l-1)^n).$$

$$[l^n - (l-1)^n] E(Z_n / [T_n = l]) = l + (l - (l-1)) l^n + (-l + l) (l-1)^n - l = l^n.$$

Par conséquent
$$E(Z_n / [T_n = l]) = \frac{l^n}{l^n - (l-1)^n} \quad \text{et ceci pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } l \text{ dans } \{1, n\}.$$

Exercice 1. Retrouver à l'aide de ce résultat l'espérance de Z_n .

Exercice 2. Trouver la loi de T_n sachant que $[Z_n = l]$.

PARTIE III

Prévision

Q10 $\triangle$ Nous supposons ici que $t = (t_1, t_2, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$ et que $t_1, t_2, \dots, t_N$ sont deux à deux distincts (au moins de $\text{sgn } t$).

soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

notons que les événements $[W_t(T_n) = t_k]$ et $[T_n = k]$ sont égaux.

• soit $\omega \in [T_n = k]$. $T_n(\omega) = k$.

Comme $([T_n = i])_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ est un système complet d'événements, k est

l'unique élément de $\llbracket 1, N \rrbracket$ tel que $\omega \in [T_n = k]$.

Ainsi $\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\mathbb{1}_{[T_n = i]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$$\text{Mais } W_t(T_n)(\omega) = \sum_{i=1}^N t_i \mathbb{1}_{[T_n = i]}(\omega) = t_k \times 1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N t_i \times 0 = t_k.$$

Ainsi $\omega \in [W_t(T_n) = t_k]$.

• Réciproquement soit ω un élément de $[W_t(T_n) = t_k]$.

$\exists ! k_0 \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\omega \in [T_n = k_0]$. même calcul que plus haut.

$$\text{Mais } W_t(T_n)(\omega) = \sum_{i=1}^N t_i \mathbb{1}_{[T_n = i]}(\omega) = t_{k_0}.$$

Or $W_t(T_n)(\omega) = t_k$. Mais $t_k = t_{k_0}$ d'où $k = k_0$ car $t_1, t_2, \dots, t_N$ sont

deux à deux distincts. Ainsi $[T_n = k] = [T_n = k_0]$. Or $\omega \in [T_n = k_0]$,

d'où $\omega \in [T_n = k]$.

Ceci achève de mettre l'égalité des événements $[W_t(T_n) = t_k]$ et $[T_n = k]$.

Donc $P(W_t(T_n) = t_k) = P(T_n = k)$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et pour

tout k dans $\llbracket 1, N \rrbracket$.

(Q11) Soit $n \in \mathbb{N}^p$ et soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Noton que $P(T_n = k) \neq 0$.

Noton que $T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}$ prend ses valeurs dans $\llbracket 0, N \rrbracket$.

$$E(T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}) = \sum_{i=0}^N i P(T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]} = i) = \sum_{i=1}^N i P(T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]} = i)$$

$$E(T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}) = \sum_{i=1}^N i P([T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]} = i] \cap [T_n=k]) + \sum_{i=1}^N i P([T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]} = i] \cap [T_n \neq k])$$

$([T_n=k], [T_n \neq k])$ est un système complet d'événements

Noton que pour tout i dans $\llbracket 1, N \rrbracket$, $[T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]} = i] \cap [T_n=k] = [T_{n+1}=i] \cap [T_n=k]$

et $[T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]} = i] \cap [T_n \neq k] = \emptyset$ car si $T_n \neq k$ et si $\mathbb{1}_{[T_n=k]}$ prend la valeur 1 et si $\mathbb{1}_{[T_n=k]}$ prend la valeur 0.

$$\text{Alors } E(T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}) = \sum_{i=1}^N i P([T_{n+1}=i] \cap [T_n=k]) = \sum_{i=1}^N i P_{[T_n=k]}(T_{n+1}=i) P(T_n=k)$$

avec $E(T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}) = E(T_{n+1} / [T_n=k]) P(T_n=k)$ et ceci pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^p$

(Q12) a) Soit $n \in \mathbb{N}^p$ et soit $(k, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$.

Pour k, j , $T_{n+1}(\omega) \geq T_n(\omega)$ donc $P([T_n=k] \cap [T_{n+1}=j]) = 0$ si $j < k$.

Supposons $j \geq k$.

• Supposons $j = k$

$$P([T_n=k] \cap [T_{n+1}=j]) = P([T_n=k] \cap [\text{Sup}(T_n, U_{n+1}) = k])$$

$$P([T_n=k] \cap [T_{n+1}=j]) = P([T_n=k] \cap [U_{n+1} \leq k]).$$

$U_1, U_2, \dots, U_n$ et U_{n+1} sont indépendantes donc $T_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ et U_{n+1} sont indépendantes.

$$\text{Alors } P([T_n=k] \cap [T_{n+1}=j]) = P(T_n=k) P(U_{n+1} \leq k) = P(T_n=k) \frac{k}{N} = \frac{k}{N} P(T_n=k).$$

Supposons $j > k$.

$j > k$

$$P([T_n = k] \cap [T_{n+1} = j]) = P([T_n = k] \cap [\text{Sup}(T_n, U_{n+1}) = j]) \stackrel{!}{=} P([T_n = k] \cap [U_{n+1} = j])$$

Pour indépendance d'indices: $P([T_n = k] \cap [T_{n+1} = j]) = P(T_n = k | U_{n+1} = j) = \frac{1}{N} P(T_n = k)$.

Finalement:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (k, j) \in [1, N]^2, P([T_n = k] \cap [T_{n+1} = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < k \\ \frac{k}{N} P(T_n = k) & \text{si } j = k \\ \frac{1}{N} P(T_n = k) & \text{si } j > k \end{cases}$$

ou

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (k, j) \in [1, N]^2, P([T_n = k] \cap [T_{n+1} = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < k \\ \frac{k}{N} \left[\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n \right] & \text{si } j = k \\ \frac{1}{N} \left[\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n \right] & \text{si } j > k \end{cases}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall k \in [1, N]$, $P(T_n = k) \neq 0$.

$$\text{Or } \forall (k, j) \in [1, N]^2, P(T_{n+1} = j | T_n = k) = \frac{P([T_n = k] \cap [T_{n+1} = j])}{P(T_n = k)} = \begin{cases} 0 & \text{si } j < k \\ \frac{k}{N} & \text{si } j = k \\ \frac{1}{N} & \text{si } j > k \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (k, j) \in [1, N]^2, P_{[T_n = k]}(T_{n+1} = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < k \\ \frac{k}{N} & \text{si } j = k \\ \frac{1}{N} & \text{si } j > k \end{cases}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [1, N]$. T_{n+1} prend un nombre fini de valeurs.

Ainsi $E(T_{n+1} | [T_n = k])$ existe.

$$E(T_{n+1} | [T_n = k]) = \sum_{j=1}^N j \cdot P(T_{n+1} = j | T_n = k) = \sum_{j=1}^{k-1} j \cdot 0 + k \cdot \frac{k}{N} + \sum_{j=k+1}^N j \cdot \frac{1}{N} = \frac{k^2}{N} + \frac{1}{N} \sum_{j=k+1}^N j$$

à quelques choses près...

$$E(T_{n+1} | [T_n = k]) = \frac{k^2}{N} + \frac{1}{N} \times (N-k) \times \frac{k+1+N}{2} = \frac{1}{2N} [2k^2 + Nk + N + N^2 - k^2 - k - Nk]$$

$$E(T_{n+1} / [T_n = \ell]) = \frac{1}{2N} [\ell^2 - \ell + N(N+1)] = \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N} (\ell^2 - \ell).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \ell \in \{1, N\}, E(T_{n+1} / [T_n = \ell]) = \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N} (\ell^2 - \ell).$$

d) soit $n \in \mathbb{N}^*$. $E(T_{n+1}) = \sum_{\ell=1}^N E(T_{n+1} / [T_n = \ell]) P(T_n = \ell).$

$$E(T_{n+1}) = \sum_{\ell=1}^N \left[\frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N} (\ell^2 - \ell) \right] P(T_n = \ell).$$

$$E(T_{n+1}) = \frac{N+1}{2} \sum_{\ell=1}^N P(T_n = \ell) + \frac{1}{2N} \sum_{\ell=1}^N \ell^2 P(T_n = \ell) - \frac{1}{2N} \sum_{\ell=1}^N \ell P(T_n = \ell).$$

$$E(T_{n+1}) = \frac{N+1}{2} \times 1 + \frac{1}{2N} E(T_n^2) - \frac{1}{2N} E(T_n).$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, E(T_{n+1}) = \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N} (E(T_n^2) - E(T_n)).$$

Q13) soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t = (t_1, t_2, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$.

Il n'est pas nécessaire ici de supposer $t_1, t_2, \dots, t_N$ deux à deux distincts.

$$(W_t(T_n))^2 = \left(\sum_{k=1}^N t_k \mathbb{1}_{[T_n = k]} \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^N t_k \mathbb{1}_{[T_n = k]} \right) \left(\sum_{j=1}^N t_j \mathbb{1}_{[T_n = j]} \right).$$

$$(W_t(T_n))^2 = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N t_k t_j \mathbb{1}_{[T_n = k]} \mathbb{1}_{[T_n = j]} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N t_k t_j \mathbb{1}_{[T_n = k] \cap [T_n = j]}.$$

$$\forall (k, j) \in \{1, N\}^2, [T_n = k] \cap [T_n = j] = \begin{cases} [T_n = k] & \text{si } k=j \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Noton } \mathbb{1}_{\emptyset} = 0_{\mathcal{B}(\mathbb{R}, \{0,1\})}.$$

$$\text{Rat } (W_t(T_n))^2 = \sum_{k=1}^N t_k^2 \mathbb{1}_{[T_n = k]}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t = (t_1, t_2, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N, (W_t(T_n))^2 = \sum_{k=1}^N t_k^2 \mathbb{1}_{[T_n = k]}.$$

Q14) a) soit $n \in \mathbb{N}^*$. soit $t = (t_1, t_2, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$ (... et par plus).

$$g(t) = E[(T_{n+1} - W_t(T_n))^2] = E(T_{n+1}^2 - 2T_{n+1}W_t(T_n) + (W_t(T_n))^2)$$

$$g(t) = E(T_{n+1}^2) - 2E(T_{n+1}W_t(T_n)) + E((W_t(T_n))^2)$$

↑
toutes les espérances portant sur des variables aléatoires indépendantes satisfaites. $\downarrow$

$$\bullet E(T_{n+1}W_t(T_n)) = E\left(T_{n+1} \sum_{k=1}^N t_k \mathbb{1}_{[T_n=k]}\right) = \sum_{k=1}^N t_k E(T_{n+1} \mathbb{1}_{[T_n=k]})$$

$$E(T_{n+1}W_t(T_n)) = \sum_{k=1}^N t_k E(T_{n+1} | [T_n=k]) P(T_n=k).$$

$$\bullet E((W_t(T_n))^2) = E\left(\sum_{k=1}^N t_k^2 \mathbb{1}_{[T_n=k]}\right) = \sum_{k=1}^N t_k^2 E(\mathbb{1}_{[T_n=k]}) = \sum_{k=1}^N t_k^2 P(T_n=k).$$

$$\text{Alors } g(t) = E(T_{n+1}^2) - 2 \sum_{k=1}^N t_k E(T_{n+1} | [T_n=k]) P(T_n=k) + \sum_{k=1}^N t_k^2 P(T_n=k).$$

On peut en cas évine, en remarquant que $\sum_{k=1}^N P(T_n=k) = 1$:

$$g(t) = \sum_{k=1}^N [t_k^2 - 2E(T_{n+1} | [T_n=k]) t_k + E(T_{n+1}^2)] P(T_n=k).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t = (t_1, t_2, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N, g(t) = \sum_{k=1}^N [t_k^2 - 2E(T_{n+1} | [T_n=k]) t_k + E(T_{n+1}^2)] P(T_n=k).$$

soit $n \in \mathbb{N}^*$

b) pour $\forall k \in \{1, \dots, N\}$, $\theta_k = E(T_{n+1} | [T_n=k])$. Posons $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$.

soit $t = (t_1, t_2, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$.

$$g(t) = \sum_{k=1}^N (t_k^2 - 2\theta_k t_k + E(T_{n+1}^2)) P(T_n=k)$$

$$g(t) = \sum_{k=1}^N (t_k - \theta_k)^2 P(T_n=k) + \sum_{k=1}^N (E(T_{n+1}^2) - \theta_k^2) P(T_n=k).$$

Notons que $g(\theta) = \sum_{k=1}^N (E(T_{n+1}^2) - \theta_k^2) P(T_n=k)$ (faire $t = \theta$ dans ce qui précède).

$$\text{Alors } g(t) - g(\theta) = \sum_{k=1}^N (t_k - \theta_k)^2 P(T_n=k) \geq 0.$$

Supposons que t soit différent de θ .

$\exists \ell_0 \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $t_{\ell_0} \neq \theta_{\ell_0}$. Rappelons que $P(T_n = \ell_0) > 0$.

Ainsi $(t_{\ell_0} - \theta_{\ell_0})^2 P(T_n = \ell_0) > 0$ et $\forall \ell \in \llbracket 1, N \rrbracket - \{\ell_0\}$, $(t_{\ell} - \theta_{\ell})^2 P(T_n = \ell) \geq 0$.

Alors $g(t) - g(\theta) = \sum_{\ell=1}^N (t_{\ell} - \theta_{\ell})^2 P(T_n = \ell) > 0$.

Donc $\forall t \in \mathbb{R} - \{\theta\}$, $g(t) > g(\theta)$. g admet un minimum global strict sur $\mathbb{R}^N$ atteint à θ .

1° g admet un minimum global strict sur $\mathbb{R}^N$ $\left| \text{car } E(T_{n+1}) = \sum_{\ell=1}^N (E(T_{n+1} / [T_n = \ell])) P(T_n = \ell) \right|$
 2° ce minimum est atteint à $\theta = (E(T_{n+1} / [T_n = 1]), \dots, E(T_{n+1} / [T_n = N]))$
 3° ce minimum vaut : $\sum_{\ell=1}^N (E(T_{n+1}) - (E(T_{n+1} / [T_n = \ell]))^2) P(T_n = \ell)$

(Q15) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit alors $\theta = (E(T_{n+1} / [T_n = 1]), \dots, E(T_{n+1} / [T_n = N]))$.

$$E(W_{\theta}(T_n)) = E\left(\sum_{\ell=1}^N E(T_{n+1} / [T_n = \ell]) \mathbb{1}_{[T_n = \ell]}\right) = \sum_{\ell=1}^N E(T_{n+1} / [T_n = \ell]) \underbrace{E(\mathbb{1}_{[T_n = \ell]})}_{P(T_n = \ell)}$$

$$E(W_{\theta}(T_n)) = \sum_{\ell=1}^N E(T_{n+1} / [T_n = \ell]) P(T_n = \ell) = E(T_{n+1}).$$

$$\underline{E(W_{\theta}(T_n)) = E(T_{n+1}).}$$

$$V(W_{\theta}(T_n)) = E((W_{\theta}(T_n))^2) - (E(W_{\theta}(T_n)))^2 = E((W_{\theta}(T_n))^2) - (E(T_{n+1}))^2$$

$$\text{or } V(T_{n+1}) = E(T_{n+1}^2) - (E(T_{n+1}))^2$$

Pour montrer que $V(W_{\theta}(T_n)) \leq V(T_{n+1})$ il suffit de montrer que $E((W_{\theta}(T_n))^2) \leq E(T_{n+1}^2)$

$$\text{Notons que } E((W_{\theta}(T_n))^2) = E\left(\sum_{\ell=1}^N (E(T_{n+1} / [T_n = \ell]))^2 \mathbb{1}_{[T_n = \ell]}\right)$$

Q13

$$E((W_{\theta}(T_n))^2) = \sum_{\ell=1}^N (E(T_{n+1} / [T_n = \ell]))^2 E(\mathbb{1}_{[T_n = \ell]}) = \sum_{\ell=1}^N (E(T_{n+1} / [T_n = \ell]))^2 P(T_n = \ell)$$

$$\text{Ainsi } E((W_0(T_n))^2) = \sum_{\ell=1}^N (E(T_{n+1} | [T_n = \ell]))^2 P(T_n = \ell).$$

$$\text{Notamment } E(T_{n+1}) = \sum_{\ell=1}^N E(T_{n+1} | [T_n = \ell]) P(T_n = \ell) !$$

$$\text{Alors } E(T_{n+1}) - E((W_0(T_n))^2) = \sum_{\ell=1}^N (E(T_{n+1} | [T_n = \ell]) - (E(T_{n+1} | [T_n = \ell]))^2) P(T_n = \ell)$$

$$\text{donc } E(T_{n+1}) - E((W_0(T_n))^2) = g(0) = E((T_{n+1} - W_0(T_n))^2) \geq 0$$

(à effet $(T_{n+1} - W_0(T_n))^2 \geq 0$) + variance de l'espérance ↗

$$\text{donc } E(T_{n+1}) \geq E((W_0(T_n))^2)$$

$$\text{Alors } V(T_{n+1}) \geq V(W_0(T_n)) \text{ car } (E(T_{n+1}))^2 \geq (E(W_0(T_n)))^2.$$

$$\underline{V(W_0(T_n)) \leq V(T_{n+1}).}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $i \in \mathbb{N}$

Q16) $\omega \in \Omega$ soit $\omega \in \Omega$, $\exists ! \ell_0 \in \{1, N\}$, $T_n(\omega) = \ell_0$.

$$\text{Alors } \forall \ell \in \{1, N\}, \mathbb{1}_{[T_n = \ell]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = \ell_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{donc } \left(\sum_{\ell=1}^N \ell^i \mathbb{1}_{[T_n = \ell]} \right)(\omega) = \sum_{\ell=1}^N \ell^i \mathbb{1}_{[T_n = \ell]}(\omega) = \ell_0^i = (T_n(\omega))^i.$$

$$\forall \omega \in \Omega, \left(\sum_{\ell=1}^N \ell^i \mathbb{1}_{[T_n = \ell]} \right)(\omega) = (T_n(\omega))^i.$$

$$\text{donc } \sum_{\ell=1}^N \ell^i \mathbb{1}_{[T_n = \ell]} = T_n^i.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \mathbb{N}, \sum_{\ell=1}^N \ell^i \mathbb{1}_{[T_n = \ell]} = T_n^i.$$

Bien noter la puissance i dans $\mathbb{N}$ et pas dans $\mathbb{N}^*$...

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$W_0(T_n) = \sum_{\ell=1}^N E(T_{n+1} | [T_n = \ell]) \mathbb{1}_{[T_n = \ell]} \stackrel{\text{Q12c)}}{=} \sum_{\ell=1}^N \left(\frac{n+1}{2} + \frac{1}{2N} (\ell - 1) \right) \mathbb{1}_{[T_n = \ell]}.$$

$$W_\theta(T_n) = \frac{N+1}{2} \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{[T_n=k]} + \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N k^2 \mathbb{1}_{[T_n=k]} - \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N k \mathbb{1}_{[T_n=k]}$$

d'après a) on a : $W_\theta(T_n) = \frac{N+1}{2} T_n^0 + \frac{1}{2N} T_n^2 - \frac{1}{2N} T_n.$

Donc $W_\theta(T_n) = \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N} (T_n^2 - T_n).$

Remarque : $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ et $\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\theta_k = E(T_{n+1} | [T_n=k])$.

Par $\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\theta_k = \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N} (k^2 - k).$

La fonction $u: x \mapsto x^2 - x$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ ($\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x - 1$!).

Par $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N.$

Ainsi comme nous, grâce à $\varphi \geq 0$: $\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $P(W_\theta(T_n) = \theta_k) = P(T_n = k).$

Partie IV. Estimation

Q17) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$E(T_n)$ existe et vaut $N \cdot d_n(N)$.

Or $E(T_n + d_n(N))$ existe et vaut $E(T_n) + d_n(N)$ d'où $N \dots$ sauf que $T_n + d_n(N)$ dépend de ce que l'on cherche à estimer : N . $T_n + d_n(N)$ n'est pas un estimateur.

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} E(T_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (N - d_n(N)) = N \text{ car } \lim_{n \rightarrow \infty} d_n(N) = 0 \text{ (Iq 4.0)}$$

$(T_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'estimateurs asymptotiquement sans biais du

paramètre N .

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\omega \in A_n(\varepsilon)$.

$$|T_n(\omega) - N| \geq \varepsilon. \quad \varepsilon \leq |T_n(\omega) - N| = |T_n(\omega) - (N - d_n(N)) - d_n(N)|$$

$$\varepsilon \leq |T_n(\omega) - (N - d_n(N))| + |d_n(N)|$$

$$\varepsilon \leq |T_n(\omega) - E(T_n)| + |d_n(N)|; \text{ d'où } \omega \in B_n(\varepsilon).$$

$$\forall \omega \in A_n(\varepsilon), \omega \in B_n(\varepsilon) \text{ d'où } A_n(\varepsilon) \subset B_n(\varepsilon).$$

$$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, A_n(\varepsilon) \subset B_n(\varepsilon).}}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n(N) = 0$. Ainsi il existe un élément n_0 de $\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 \Rightarrow |d_n(N)| < \varepsilon/2$$

soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > n_0$.

$$\text{Soit } \omega \in B_n(\varepsilon). \quad |T_n(\omega) - E(T_n)| + |d_n(N)| \geq \varepsilon$$

$$\text{d'où } \varepsilon \leq |T_n(\omega) - E(T_n)| + \varepsilon/2; \quad |T_n(\omega) - E(T_n)| \geq \varepsilon/2.$$

$$\text{d'où } \omega \in [|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon/2]. \text{ Ainsi}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 \Rightarrow B_n(\varepsilon) \subset [|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon/2].$$

d'où il existe un entier naturel n_0 tel que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 \Rightarrow B_n(\varepsilon) \subset [|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon/2]$

d) Soit ε un élément de $\mathbb{R}_+^*$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 \Rightarrow A_n(\varepsilon) \subset B_n(\varepsilon) \subset \{|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon/k\}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $n > n_0$.

$$0 \leq P(A_n(\varepsilon)) \leq P(B_n(\varepsilon)) \leq P(|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon/k)$$

La T_n possède une variance. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors :

$$0 \leq P(A_n(\varepsilon)) \leq \frac{V(T_n)}{(\varepsilon/k)^2}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 \Rightarrow 0 \leq P(A_n(\varepsilon)) \leq \frac{V(T_n)}{(\varepsilon/k)^2}.$$

Car $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(T_n) = 0$ (I § 4. c)). Par conséquent on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n(\varepsilon)) = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|T_n - N| \geq \varepsilon) = 0$ pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

La suite $(T_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à N .

Ainsi la suite d'estimateurs $(T_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

(Q18) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \llbracket 1, N \rrbracket^n$.

Rappelons que $U_1, U_2, \dots, U_n$ sont indépendantes.

$$\text{Alors } P\left(\bigcap_{i=1}^n [U_i = u_i]\right) = \prod_{i=1}^n P(U_i = u_i) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{N}\right) = \left(\frac{1}{N}\right)^n.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \llbracket 1, N \rrbracket^n, P\left(\bigcap_{i=1}^n [U_i = u_i]\right) = \left(\frac{1}{N}\right)^n.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \llbracket 1, N \rrbracket^n$ et soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

$$\text{Si } \max_{1 \leq i \leq n} u_i \neq k : \left[\bigcap_{i=1}^n [U_i = u_i] \right] \cap [T_n = k] = \emptyset.$$

$$\text{Si } \max_{1 \leq i \leq n} u_i = k : \left[\bigcap_{i=1}^n [U_i = u_i] \right] \cap [T_n = k] = \bigcap_{i=1}^n [U_i = u_i].$$

$$\text{Alors } P\left(\bigcap_{i=1}^n [U_i = u_i] \cap [T_n = k]\right) = \begin{cases} \left(\frac{1}{N}\right)^n & \text{si } \max_{1 \leq i \leq n} u_i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Donc } P_{[T_n=k]} \left(\bigcap_{i=1}^n [U_i = u_i] \right) = \frac{P\left(\bigcap_{i=1}^n [U_i = u_i] \cap [T_n = k]\right)}{P(T_n = k)} = \begin{cases} \frac{\left(\frac{1}{N}\right)^n}{\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n} & \text{si } \max_{1 \leq i \leq n} u_i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{donc } \underline{\underline{P_{[T_n=k]} \left(\bigcap_{i=1}^n [U_i = u_i] \right) = \begin{cases} \frac{1}{k^n - (k-1)^n} & \text{si } \max_{1 \leq i \leq n} u_i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et}}}$$

ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, pour tout $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in [1, N]^n$ et pour tout $k \in [1, N]$.

Q19 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $E(T_n)$ (resp. $E(Z_n)$) existe et vaut $N - d_n(N)$ (resp. $1 + d_n(N)$)

donc $E(T_n + Z_n - 1)$ existe et vaut $N - d_n(N) + 1 + d_n(N) - 1$ c'est-à-dire N .

pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $T_n + Z_n - 1$ est un estimateur sans biais de N .

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [1, N]$.

$$E(T_n / [T_n = k]) = \sum_{i=1}^N i \cdot P_{[T_n=k]}(T_n = i) = \sum_{i=1}^N i \cdot \frac{P([T_n=i] \cap [T_n=k])}{P(T_n=k)}$$

$$\forall k \in [1, N], P([T_n=i] \cap [T_n=k]) = \begin{cases} P(T_n=k) & \text{si } i=k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Alors } E(T_n / [T_n=k]) = k \cdot \frac{P(T_n=k)}{P(T_n=k)} = k.$$

$$E(Z_n / [T_n=k]) = \frac{k^n}{k^n - (k-1)^n} \text{ d'après II 9.9. b).}$$

$$\text{Ainsi } E(T_n + Z_n - 1 / [T_n=k]) \text{ existe et vaut } k + \frac{k^n}{k^n - (k-1)^n} - 1$$

$$\text{Donc } E(S_n / [T_n=k]) = \frac{k^{n+1} - k(k-1)^n + k^n - k^n + (k-1)^n}{k^n - (k-1)^n} = \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{k^n - (k-1)^n}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, E(S_n | [T_n = k]) = \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{k^n - (k-1)^n} = \psi_n(k).$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. T_n est une variable aléatoire finie qui prend ses valeurs dans $\llbracket 1, N \rrbracket$ et $\llbracket 1, N \rrbracket$ est contenu dans le domaine de définition de ψ_n .
 Le théorème de transfert nous assure que $E(\psi_n(T_n))$ possède une espérance qui vaut $\sum_{k=1}^N \psi_n(k) P(T_n = k)$.

$$E(\psi_n(T_n)) = \sum_{k=1}^N \psi_n(k) P(T_n = k) = \sum_{k=1}^N E(S_n | [T_n = k]) P(T_n = k) = E(S_n) = N.$$

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\psi_n(T_n)$ est un estimateur sans biais de N .

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\text{Pour } \forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) = E((S_n - \lambda)^2 | [T_n = k]).$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) = E(S_n^2 - 2\lambda S_n + \lambda^2 | [T_n = k]) = E(S_n^2 | [T_n = k]) - 2\lambda E(S_n | [T_n = k]) + \lambda^2.$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq E((S_n - \lambda)^2 | [T_n = k]) = P(\lambda) = (\lambda - E(S_n | [T_n = k]))^2 + E(S_n^2 | [T_n = k]) - (E(S_n | [T_n = k]))^2.$$

$\uparrow$
 $(S_n - \lambda)^2$ ne prend que des valeurs positives ou nulles

$$\text{En posant } \lambda = E(S_n | [T_n = k]) \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket : 0 \leq E(S_n^2 | [T_n = k]) - (E(S_n | [T_n = k]))^2$$

$$\text{Alors } 0 \leq \psi_n(k) - (\psi_n(k))^2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, (E(S_n | [T_n = k]))^2 = (\psi_n(k))^2 \leq \psi_n(k) = E(S_n^2 | [T_n = k]).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\psi_n(T_n)$ et S_n sont des variables aléatoires finies donc elles possèdent une espérance.

$$V(S_n - \psi_n(T_n)) = E(S_n^2) - N^2 - E((\psi_n(T_n))^2) + N^2 = E(S_n^2) - E((\psi_n(T_n))^2).$$

$\uparrow$
 $E(S_n) = E(\psi_n(T_n)) = N$

$$E(S_n) = E(\psi_n(T_n)) = N$$

$$\forall \ell \in \{1, N\}, \quad \psi_n^{\ell}(\ell) \leq \psi_n(\ell) \text{ et } P(T_n = \ell) \geq 0.$$

$$\text{Donc } \forall \ell \in \{1, N\}, \quad \psi_n^{\ell}(\ell) P(T_n = \ell) \leq \psi_n(\ell) P(T_n = \ell) = E(S_n^2 / [T_n = \ell]) P(T_n = \ell)$$

$$\text{Alors } E((\psi_n(T_n))^2) = \sum_{\ell=1}^N \psi_n^{\ell}(\ell) P(T_n = \ell) \leq \sum_{\ell=1}^N E(S_n^2 / [T_n = \ell]) P(T_n = \ell) = E(S_n^2)$$

↑
relation de covariance
↑
formule de l'espérance totale

$$\text{Donc } V(S_n) - V(\psi_n(T_n)) = E(S_n^2) - E((\psi_n(T_n))^2) \geq 0.$$

$$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V(\psi_n(T_n)) \leq V(S_n)}}.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n = T_n + Z_n - 1$ possède une variance car T_n et Z_n possèdent une variance.

$$V(S_n) = V(T_n + Z_n) = V(T_n) + V(Z_n) + 2\text{Cov}(T_n, Z_n).$$

$$V(S_n) = 2V(T_n) + 2(E(T_n Z_n) - E(T_n)E(Z_n)).$$

$$\uparrow$$

$$V(Z_n) = V(T_n)$$

$$V(S_n) = 2[(2N-1)d_n(N) - 2Nd_{n+1}(N) - d_n^2(N)] + 2[N(1+d_{n+1}(N)) - (N-d_n(N))(1+d_n(N))]$$

↑ I et II !!

$$V(S_n) = 2[(2N-1)d_n(N) - 2Nd_{n+1}(N) - d_n^2(N) + N + Nd_{n+1}(N) - N - Nd_n(N) + d_n(N) + d_n^2(N)]$$

$$V(S_n) = 2[Nd_n(N) - Nd_{n+1}(N)] = 2N[d_n(N) - d_{n+1}(N)].$$

$$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V(S_n) = 2N[d_n(N) - d_{n+1}(N)]}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(N) = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} d_{n+1}(N) = 0. \text{ Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} V(S_n) = 0.$$

$$\text{A } \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } V(\psi_n(T_n)) \leq V(S_n). \text{ Par conséquent il vient } \lim_{n \rightarrow +\infty} V(\psi_n(T_n)) = 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\Psi_n(T_n)$ possède une variance. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq P(|\Psi_n(T_n) - E(\Psi_n(T_n))| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\Psi_n(T_n))}{\varepsilon^2}.$$

A la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(\Psi_n(T_n)) = 0$. Par conséquent on dit que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\Psi_n(T_n) - E(\Psi_n(T_n))| \geq \varepsilon) = 0$$

Soit encore $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\Psi_n(T_n) - N| \geq \varepsilon) = 0$.

Ainsi $\Psi_n(T_n)$ est une estimation convergente de N .

Q20 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous supposons que $V(R_n)$ existe.

Noter que $E(R_n) = N$.

T_n prend ses valeurs dans $\llbracket 1, N \rrbracket$ et f_n est définie sur $\llbracket 1, N \rrbracket$ d'ac

$E(f_n(T_n))$ et $V(f_n(T_n))$ existent.

$$E(f_n(T_n)) = \sum_{k=1}^N f_n(k) P(T_n = k) = \sum_{k=1}^N E(R_n | T_n = k) P(T_n = k) = E(R_n) = N.$$

Relation de transfert

$$\text{Alors } V(R_n) - V(f_n(T_n)) = E(R_n^2) - N^2 - E((f_n(T_n))^2) + N^2 = E(R_n^2) - E((f_n(T_n))^2).$$

Noter que $V(f_n(T_n)) \leq V(R_n)$ revient à prouver que $E(R_n^2) - E((f_n(T_n))^2) \geq 0$.
Soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Pour $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda) = E((R_n - \lambda)^2 | T_n = k)$. (cette espérance existe car

$E((R_n - \lambda)^4)$ existe puis que R_n possède une variance d'ac des moments d'ordre 4 et 2.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq E((R_n - \lambda)^2 | T_n = k) = E(R_n^2 | T_n = k) - 2\lambda E(R_n | T_n = k) + \lambda^2 = \varphi(\lambda).$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \varphi(\lambda) = (\lambda - E(R_n | T_n = k))^2 + E(R_n^2 | T_n = k) - (E(R_n | T_n = k))^2.$$

En posant $\lambda = E(R_k | T_k = j)$ on obtient $0 \leq E(R_k^2 | T_k = j) - (E(R_k | T_k = j))^2$

En multipliant par $P(T_k = j)$ qui est positif et en sommant on obtient :

$$0 \leq \sum_{k=1}^N E(R_k^2 | T_k = k) P(T_k = k) - \sum_{k=1}^N (\psi_k(k))^2 P(T_k = k).$$

Donc $0 \leq E(R_k^2) - E((\psi_k(T_k))^2)$. Alors $V(\psi_k(T_k)) \leq V(R_k)$.

$$\underline{\underline{V_k \in \mathbb{N}^p, \quad V(\psi_k(T_k)) \leq V(R_k)}}.$$

d) * Si $\forall N \in \mathbb{N}^p, \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, F(k) = \psi_k(k)$ on a : $\forall N \in \mathbb{N}^p, E(F(T_k)) = E(\psi_k(T_k)) = N$

* Réciproquement supposons que $\forall N \in \mathbb{N}^p, E(F(T_k)) = N$.

$$\text{Alors } \forall N \in \mathbb{N}^p, N = \sum_{k=1}^N F(k) P(T_k = k) = \sum_{k=1}^N F(k) \frac{k^N - (k-1)^N}{N^N}.$$

$$\text{A } \forall N \in \mathbb{N}^p, N = \sum_{k=1}^N \psi_k(k) P(T_k = k) = \sum_{k=1}^N \psi_k(k) \frac{k^N - (k-1)^N}{N^N}.$$

$$\text{Ce qui donne } \forall N \in \mathbb{N}^p, \sum_{k=1}^N F(k) [k^N - (k-1)^N] = \sum_{k=1}^N [\psi_k(k) [k^N - (k-1)^N]] \text{ ou :}$$

$$\underline{\underline{\forall N \in \mathbb{N}^p, \sum_{k=1}^N (F(k) - \psi_k(k)) [k^N - (k-1)^N] = 0}}$$

$$\text{Pour } N=1 \text{ on obtient } (F(1) - \psi_1(1)) [1^N - 0^N] = 0 \text{ donc } F(1) = \psi_1(1) = 0.$$

$$\text{Ainsi } F(1) = \psi_1(1).$$

Soit $N \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$.

$$0 = \sum_{k=1}^N (F(k) - \psi_k(k)) [k^N - (k-1)^N] = \sum_{k=1}^{N-1} (F(k) - \psi_k(k)) [k^N - (k-1)^N].$$

$$\uparrow$$

$0 = 0 - 0$!

$$\text{Alors } 0 = (F(N) - \psi_N(N)) [N^N - (N-1)^N] \text{ et } N^N - (N-1)^N \neq 0 \text{ donc } F(N) = \psi_N(N).$$

$$\text{Finalement : } F(1) = \psi_1(1) \text{ et } \forall N \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, F(N) = \psi_N(N).$$

$$\text{Ce qui donne clairement } \forall N \in \mathbb{N}^p, \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, F(k) = \psi_k(k).$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ $E(P(T_n)) = N$ et vérifié si et seulement si

$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [1, N], P(k) = \varphi_k(k)$ ou $\forall R \in \mathbb{N}^*, F(R) = \varphi_R(R)$.

C) Soit P_n un estimateur sans biais de N pour tout n dans $\mathbb{N}^*$

Alors $\varphi_n(T_n)$ est un estimateur sans biais de N tel que $V(\varphi_n(T_n)) \leq V(P_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

D) permet alors de dire que $P_n = \varphi_n$ et que' alors $V(\varphi_n(T_n)) \leq V(P_n)$.

Donc $\varphi_n(T_n)$ est un estimateur sans biais de N tel que $V(\varphi_n(T_n)) \leq V(P_n)$.

Ainsi dans l'ensemble des estimateurs sans biais de N , l'estimateur

$\varphi_n(T_n)$ est optimal dans le sens où $V(\varphi_n(T_n))$ est minimal.