

D.M. 10

Pour Lundi 14 mars 2011

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle X quelconque. Pour toute variable aléatoire réelle X admettant une densité sur $\mathbb{R}$, notée f_X , on note $\mathcal{D}_X$ l'ensemble des réels s pour lesquels la variable aléatoire e^{sX} admet une espérance, et on note Φ_X la fonction définie sur $\mathcal{D}_X$ par : $\Phi_X(s) = E(e^{sX})$.

On admet les résultats suivants :

- si deux variables aléatoires X et Y sont telles que Φ_X et Φ_Y coïncident sur un intervalle ouvert non vide, alors X et Y ont la même loi ;
- si n est un entier naturel non nul, et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles quelconques, mutuellement indépendantes, alors, pour tout entier p de $[1, n-1]$ et pour toutes fonctions réelles continues φ_1 et φ_2 , les variables aléatoires $\varphi_1(X_1, \dots, X_p)$ et $\varphi_2(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes ;
- si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors XY admet une espérance, et $E(XY) = E(X)E(Y)$.

La fonction exponentielle est également notée $\exp$. On rappelle que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi}$.

Dans tout le problème, U désigne une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Préliminaire

On rappelle que, pour tout s de $\mathcal{D}_X$, on a : $\Phi_X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(sx) f_X(x) dx$.

1. Soit a un réel non nul et b un réel quelconque.

a) Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2) dx$ est convergente si et seulement si $a > 0$, et vaut alors $\sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

b) En déduire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2 + bx) dx$ est convergente si et seulement si $a > 0$, puis montrer que dans ces conditions, on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2 + bx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)$.

2. a) Déterminer $\mathcal{D}_U$; pour tout s de $\mathcal{D}_U$, calculer $\Phi_U(s)$.

b) On pose : $Z = U^2$. Établir que : $\mathcal{D}_Z =]-\infty, \frac{1}{2}[$; montrer, à l'aide du théorème de transfert, que pour tout réel s de $\mathcal{D}_Z$, on a : $\Phi_Z(s) = (1 - 2s)^{-1/2}$.

3. Soit X une variable aléatoire réelle à densité, et soit μ et β deux réels quelconques.

a) Montrer qu'un réel s appartient à $\mathcal{D}_{\mu X + \beta}$ si et seulement si μs appartient à $\mathcal{D}_X$, et que dans ce cas, on a : $\Phi_{\mu X + \beta}(s) = \exp(\beta s) \Phi_X(\mu s)$.

b) On suppose que X suit une loi γ de paramètre ν , où ν est un réel strictement positif.

Montrer que : $\mathcal{D}_X =]-\infty, 1[$; pour tout s de $\mathcal{D}_X$, établir la formule : $\Phi_X(s) = (1 - s)^{-\nu}$. De même, déterminer $\mathcal{D}_{2X}$; pour tout s de $\mathcal{D}_{2X}$, calculer $\Phi_{2X}(s)$.

Partie I. Loi du χ^2 centré

Soit r un entier supérieur ou égal à 1. On considère une variable aléatoire X_r suivant la loi Γ de paramètres $(2, \frac{r}{2})$, c'est-à-dire que X_r possède une densité f_{X_r} donnée par :

$$f_{X_r}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \times \Gamma(\frac{r}{2})} \times x^{\frac{r}{2}-1} \times \exp\left(-\frac{x}{2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

On dit que X_r suit une loi du χ^2 (« chi deux ») centré à r degrés de liberté, et on note : $X_r \hookrightarrow \chi^2(r)$.

1. Étudier les variations de f_{X_r} et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

2. a) Montrer que la variable aléatoire $\frac{X_r}{2}$ suit une loi γ de paramètre $\frac{r}{2}$. En déduire $E(X_r)$ et $V(X_r)$.

b) Déterminer $\mathcal{D}_{X_r}$; pour tout s de $\mathcal{D}_{X_r}$, calculer $\Phi_{X_r}(s)$.

3. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires indépendantes $U_1, U_2, \dots, U_n$ de même loi que U . Pour tout i de $[[1, n]]$, on pose : $Z_i = U_i^2$.

a) Vérifier que X_1 et U^2 sont de même loi.

b) On pose : $W_n = \sum_{i=1}^n Z_i$. Quelle est la loi de probabilité de W_n ?

c) Déterminer $\mathcal{D}_{W_n}$, et pour tout s de $\mathcal{D}_{W_n}$, exprimer $\Phi_{W_n}(s)$ en fonction de s et de n . Établir une relation entre $\Phi_{W_n}(s)$ et $\Phi_{Z_1}(s), \Phi_{Z_2}(s), \dots, \Phi_{Z_n}(s)$.

4. Soit T une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée, de variance σ^2 inconnue, σ étant un réel strictement positif. Pour n entier supérieur ou égal à 2, on dispose d'un n -échantillon indépendant, identiquement distribué (i.i.d.), $T_1, T_2, \dots, T_n$ de la loi de T . On considère la variable aléatoire S_n définie

$$\text{par : } S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^2.$$

a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais et convergent du paramètre σ^2 .

b) Soit α un réel vérifiant : $0 < \alpha < 1$, et soit k_α le réel strictement positif tel que : $P([W_n \geq k_\alpha]) = 1 - \alpha$. Montrer que l'intervalle $\left]0, \frac{nS_n}{k_\alpha}\right]$ est un intervalle de confiance de σ^2 au risque α .

Partie II. Loi du χ^2 décentré

On considère une suite $(M_j)_{j \geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, telles que pour tout j de $\mathbb{N}^*$, M_j suive la loi normale d'espérance m_j ($m_j \in \mathbb{R}$) et de variance égale à 1.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on pose : $Y_n = \sum_{j=1}^n M_j^2$ et $\lambda_n = \sum_{j=1}^n m_j^2$.

On dit que Y_n suit une loi du χ^2 décentré à n degrés de liberté, de paramètre de décentrage λ_n , et on note : $Y_n \hookrightarrow \chi^2(n, \lambda_n)$.

1. Dans cette question *uniquement*, on suppose que l'entier n est égal à 1.

a) Montrer les deux égalités suivantes : $E(U^3) = 0$ et $E(U^4) = 3$.

b) En déduire, en fonction de λ_1 , les valeurs respectives de $E(Y_1)$ et de $V(Y_1)$.

c) Montrer que : $\mathcal{D}_{Y_1} =]-\infty, \frac{1}{2}[$ et établir, pour tout réel s de $\mathcal{D}_{Y_1}$, la formule suivante :

$$\Phi_{Y_1}(s) = (1 - 2s)^{-1/2} \times \exp\left(\frac{s\lambda_1}{1 - 2s}\right)$$

2. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$.

a) Calculer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$ en fonction de n et λ_n .

b) On admet que l'on a : $\mathcal{D}_{Y_n} =]-\infty, \frac{1}{2}[$. Pour tout s de $\mathcal{D}_{Y_n}$, exprimer $\Phi_{Y_n}(s)$ en fonction de s, n et λ_n .

Partie III. Nombre aléatoire de degrés de liberté

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant une espérance $E(X)$, et une variable aléatoire K à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note N_K l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $P([K = k]) > 0$, et on suppose que pour tout entier k de N_K , la variable aléatoire X admet une espérance pour la probabilité conditionnelle $P_{[K=k]}$, notée $E(X/K = k)$.

On admet alors l'égalité suivante : $(*) E(X) = \sum_{k \in N_K} E(X/K = k)P([K = k])$

Soit g l'application définie sur $\mathbb{N}$ par : $g(k) = \begin{cases} E(X/K = k) & \text{si } k \in N_K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Vérification de la formule $(*)$ sur un exemple.

Soit $(J_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on pose : $X_k = \sup_{1 \leq i \leq k} (J_i)$; autrement dit, pour tout ω de Ω ,

$X_k(\omega) = \max_{1 \leq i \leq k} J_i(\omega)$. Soit K une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme discrète sur $[1, n]$ ($n \in \mathbb{N}^*$). On suppose que K est indépendante des variables aléatoires de la suite $(J_i)_{i \geq 1}$.

Pour tout ω de Ω , on pose : $X(\omega) = \max_{1 \leq i \leq K(\omega)} J_i(\omega)$, et on admet que X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Établir, pour tout entier k de $[1, n]$ et pour tout réel x , la relation : $P_{[K=k]}([X \leq x]) = P([X_k \leq x])$.

b) Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X .

c) En déduire que X est une variable aléatoire à densité, qui admet une espérance $E(X)$ que l'on exprimera en fonction de $\sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1}$.

d) Vérifier l'égalité $(*)$: $E(X) = E(g(K))$.

2. Soit $(U_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi normale centrée réduite. Soit K une variable aléatoire indépendante des variables aléatoires de la suite $(U_i)_{i \geq 1}$, qui suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{2}$ strictement positif.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_{n+2K}^2$. On admet que H_n est une variable aléatoire à densité à valeurs positives, et que $\mathcal{D}_{H_n} =]-\infty, \frac{1}{2}[$.

Soit s un réel de $] -\infty, \frac{1}{2}[$.

a) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de H_n sachant $[K = k]$ est la loi de la variable aléatoire W_{n+2k} définie dans la question I.3.b.

b) En posant : $X = e^{sH_n}$, déterminer, pour tout entier k de $\mathbb{N}$, l'expression de $g(k)$ en fonction de k .

c) Établir la formule suivante :

$$E(g(K)) = (1 - 2s)^{-n/2} \times \exp\left(\frac{\lambda s}{1 - 2s}\right)$$

d) En utilisant l'égalité (*), admise au début de cette partie, avec $X = e^{sH_n}$, déterminer la loi de H_n .

e) À l'aide de la question III.2.a, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a :

$$E\left(\frac{1}{H_n}\right) = E\left(\frac{1}{n - 2 + 2K}\right)$$

Partie IV. Estimateur de James-Stein

Soit p un entier supérieur ou égal à 3. On suppose qu'un modèle aléatoire défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ comporte p paramètres réels inconnus $\theta_1, \dots, \theta_p$ non tous nuls. Un échantillon d'observations statistiques permet d'exhiber des estimateurs $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p$ sans biais des paramètres $\theta_1, \dots, \theta_p$ respectivement. On suppose que les variables aléatoires $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p$ sont indépendantes et suivent une loi normale de variance égale à 1.

On pose : $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$, $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p)$, $B_p = \sum_{j=1}^p \hat{\theta}_j^2$ et $b_p = \sum_{j=1}^p \theta_j^2$.

On dit que le vecteur aléatoire $\hat{\theta}$ est un estimateur sans biais du paramètre vectoriel θ , et $E(\hat{\theta})$ est alors le vecteur θ .

On définit le risque quadratique scalaire d'un estimateur θ^* de θ , noté $R(\theta^*, \theta)$, par :

$$R(\theta^*, \theta) = E\left(\sum_{j=1}^p (\theta_j^* - \theta_j)^2\right)$$

Dans cette partie, on cherche un estimateur θ^* de θ , représenté par un vecteur aléatoire $(\theta_1^*, \dots, \theta_p^*)$, dont le risque $R(\theta^*, \theta)$ est strictement inférieur à $R(\hat{\theta}, \theta)$.

1. Justifier que la variable aléatoire B_p suit la loi $\chi^2(p, b_p)$, et qu'elle constitue un estimateur biaisé de b_p .

2. On pose : $\theta^* = \left(1 - \frac{c}{B_p}\right) \times \hat{\theta}$, où c est un paramètre réel strictement positif. Soit K une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{b_p}{2}$.

a) En admettant que l'on a : $E\left(\frac{1}{B_p} \sum_{j=1}^p \theta_j \hat{\theta}_j\right) = E\left(\frac{2K}{p - 2 + 2K}\right)$, établir l'égalité suivante :

$$R(\theta^*, \theta) - R(\hat{\theta}, \theta) = (c^2 - 2c(p - 2)) \times E\left(\frac{1}{p - 2 + 2K}\right)$$

b) Montrer que l'inégalité : $R(\theta^*, \theta) < R(\hat{\theta}, \theta)$, est vérifiée si et seulement si : $0 < c < 2(p - 2)$.

Déterminer en fonction de p , la valeur de c pour laquelle $R(\theta^*, \theta) - R(\hat{\theta}, \theta)$ est minimale.

Comment s'écrit alors l'estimateur θ^* ?

PRÉLIMINAIRE

(Q1) a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_a(x) = e^{-ax^2}$. h_a est continue sur $\mathbb{R}$.

1^{re} Cas... $0 \leq 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_0(x) = e^{-0x^2} \geq 1 = \frac{1}{x^0} \geq 0$

$\cdot \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^0}$ diverge car $0 \leq 1$.

Alors les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} h_0(x) dx$ diverge. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} h_0(x) dx$ diverge.

2^{de} Cas... $a > 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_a(x) = e^{-ax^2} = e^{-\frac{x^2}{(\frac{1}{\sqrt{a}})^2}}$. Posons $\sigma = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h_a(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \sqrt{2\pi}\sigma \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} \right)$.

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}$ est une densité d'une variable aléatoire à densité qui suit la

loi normale de paramètres 0 et σ^2 . Or $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$ converge et vaut 1.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} h_a(x) dx$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}\sigma$. Noter que $\sqrt{2\pi}\sigma = \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Ainsi 1^{er} $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx$ converge si et seulement si $a > 0$.

2^e Si $a > 0$: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ell_{a,b}(x) = e^{-ax^2+bx}$. $\ell_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $A \in \mathbb{R}$. $\int_0^A \ell_{a,b}(u) du = \int_0^A e^{-a(u^2 - \frac{b}{a}u)} du = \int_0^A e^{-a[(u - \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}]} du$

$x \mapsto x - \frac{b}{2a}$ est de classe $\mathcal{B}^1$ sur $\mathbb{R}$ ce qui autorise le changement de variable

$u = x - \frac{b}{2a}$ dans ce qui suit.

$$\int_0^A p_{a,b}(x) dx = \int_{-\frac{b}{2a}}^{A - \frac{b}{2a}} e^{-a(u^2 - \frac{b^2}{4a^2})} du = e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\frac{b}{2a}}^{A - \frac{b}{2a}} e^{-au^2} du.$$

On a également : $\int_A^0 p_{a,b}(x) dx = e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{A - \frac{b}{2a}}^{-\frac{b}{2a}} e^{-au^2} du.$

lim $(A - \frac{b}{2a}) = +\infty$. Ainsi $\int_0^{+\infty} p_{a,b}(x) dx$ est de même nature que $\int_{-\frac{b}{2a}}^{+\infty} e^{-au^2} du$ ou que $\int_0^{+\infty} e^{-au^2} du$. Donc si $a > 0$: $\int_0^{+\infty} p_{a,b}(x) dx$ diverge. $\int_{-\infty}^0 p_{a,b}(x) dx$ diverge également.

Supposons $a > 0$. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-au^2} du$ converge. $\int_{-\frac{b}{2a}}^{+\infty} e^{-au^2} du$ et $\int_{-\infty}^{-\frac{b}{2a}} e^{-au^2} du$ convergent.

Donc lim $\int_0^A p_{a,b}(x) dx = e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\frac{b}{2a}}^{+\infty} e^{-au^2} du$ et

lim $\int_A^0 p_{a,b}(x) dx = e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{-\frac{b}{2a}} e^{-au^2} du.$

Ainsi $\int_0^{+\infty} p_{a,b}(x) dx$ et $\int_{-\infty}^0 p_{a,b}(x) dx$ convergent. Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} p_{a,b}(x) dx$ converge.

De plus $\int_{-\infty}^{+\infty} p_{a,b}(x) dx = \int_{-\infty}^0 p_{a,b}(x) dx + \int_0^{+\infty} p_{a,b}(x) dx = e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{-\frac{b}{2a}} e^{-au^2} du + e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\frac{b}{2a}}^{+\infty} e^{-au^2} du$

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} p_{a,b}(x) dx = e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-au^2} du = e^{\frac{b^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$

19 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx} dx$ converge si et seulement si $a > 0$

20 Si $a > 0$: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}.$

- Soit $p \in \mathbb{R}$
- (Q2) a) U prend ses valeurs dans $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.
- $f_U : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ est une densité de U .
 - $t \mapsto e^{st}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$

Le théorème de transfert nous dit que e^{sU} possède une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} f_U(t) dt$ est absolument convergente au sens et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} f_U(t) dt$ converge car $\forall t \in \mathbb{R}, e^{st} f_U(t) \geq 0$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{st} f_U(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2} + st}$$

$$\text{A } \frac{1}{2} > 0 \text{ donc } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2} + st} dt \text{ converge et vaut } \sqrt{\frac{\pi}{1/2}} e^{\frac{s^2}{4 \times \frac{1}{2}}} \text{ ou } \sqrt{2\pi} e^{s^2/2}$$

$$\text{donc } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} f_U(t) dt \text{ converge et vaut } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{2\pi} e^{s^2/2} \text{ ou } e^{s^2/2}$$

Ceci achève de montrer que $E(e^{sU})$ existe et vaut $e^{s^2/2}$ et ceci pour tout s dans $\mathbb{R}$.

$$\underline{D_U = \mathbb{R} \text{ et } \forall s \in D_U, \phi_U(s) = e^{s^2/2}}$$

b) Soit $p \in \mathbb{R}$. $t \mapsto e^{st^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème de transfert nous dit que

que $E(e^{sU^2})$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{st^2} f_U(t) dt$ est absolument convergente au sens et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{st^2} f_U(t) dt$ converge car $t \mapsto e^{st^2} f_U(t)$ est positive sur $\mathbb{R}$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{st^2} f_U(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{st^2 - \frac{1}{2}t^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\frac{1}{2} - s)t^2}$$

$$\text{Alors } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{st^2} f_U(t) dt \text{ est de même nature que } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{1}{2} - s)t^2} dt$$

d'après Q 1a), $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{1}{2}-\Delta)t^2} dt$ converge et ne s'annule que si $\frac{1}{2}-\Delta > 0$.

donc $E(e^{\Delta U^2})$ existe et ne s'annule que si $\frac{1}{2}-\Delta > 0$.

Alors $E(e^{\Delta Z})$ existe et ne s'annule que si $\Delta < \frac{1}{2}$.

Pour conclure $D_2 =]-\infty, \frac{1}{2}[$.

soit $\Delta \in]-\infty, \frac{1}{2}[$.

$$\phi_2(\lambda) = E(e^{\lambda Z}) = E(e^{\lambda U^2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda t^2} \rho_U(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{1}{2}-\Delta)t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2}-\Delta}}$$

$$\phi_2(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2\pi(\frac{1}{2}-\Delta)}} = \frac{1}{\sqrt{1-2\Delta}} = (1-2\Delta)^{-1/2}$$

$$\forall \Delta \in D_2, \phi_2(\Delta) = (1-2\Delta)^{-1/2}$$

Q3) a) Δ si $y=0$: $yX+\beta$ est une variable constante égale à β donc c'est pas une variable aléatoire à densité. Nous supposons que $y \neq 0$.

soit $\Delta \in \mathbb{R}$.

$$\Delta \in D_{yX+\beta} \Leftrightarrow E(e^{\Delta(yX+\beta)}) \text{ existe} \Leftrightarrow E(e^{\Delta\beta} e^{\Delta yX}) \text{ existe}$$

à $e^{\Delta\beta}$ est un multiplicateur positif donc :

$$\Delta \in D_{yX+\beta} \Leftrightarrow E(e^{\Delta yX}) \text{ existe} \Leftrightarrow \Delta y \in D_X$$

un réel appartient à $D_{yX+\beta}$ si et seulement si $y\Delta \in D_X$.

$$\text{soit } \Delta \in D_{yX+\beta}, y\Delta \in D_X. \phi_{yX+\beta}(\lambda) = E(e^{\lambda(yX+\beta)}) = E(e^{\Delta\beta} e^{\lambda yX}) = e^{\Delta\beta} E(e^{\lambda yX})$$

$$\phi_{yX+\beta}(0) = e^{\Delta\beta} \phi_X(y\Delta) = e^{\Delta\beta} \phi_X(y\Delta)$$

$$\forall \Delta \in D_{yX+\beta}, \phi_{yX+\beta}(\Delta) = e^{\Delta\beta} \phi_X(y\Delta)$$

b) pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_x(t) = \begin{cases} \frac{e^{-x} x^{r-1}}{\Gamma(r)} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f_x est une densité de X .
soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

. X prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$

. f_x est une densité de X

. $t \mapsto e^{\lambda t}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

le théorème de transfert nous dit que $E(e^{\lambda X})$ existe si et seulement si $\int_0^{+\infty} e^{\lambda t} f_x(t) dt$ est absolument convergente ou si et seulement si $\int_0^{+\infty} e^{\lambda t} f_x(t) dt$ converge car $t \mapsto e^{\lambda t} f_x(t)$ est positive sur $]0, +\infty[$.

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad e^{\lambda t} f_x(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} e^{-(1-\lambda)t} t^{r-1}$$

si $\lambda < 0$... $1-\lambda > 0$. Posons $\lambda' = 1(1-\lambda) = (1-\lambda)^{-1}$

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad e^{\lambda t} f_x(t) = \lambda'^r \frac{e^{-t/\lambda'} t^{r-1}}{\Gamma(r)}$$

$$\text{pour } \forall t \in \mathbb{R}, \quad \ell(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t/\lambda'} t^{r-1}}{\lambda'^r \Gamma(r)} & \text{si } t \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \ell \text{ est une densité d'une}$$

variable aléatoire qui suit la loi gamma de paramètres λ' et r .

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \ell(t) dt$ existe et vaut 1. Donc $\int_0^{+\infty} \ell(t) dt$ existe et vaut 1.

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f_x(t) dt$ existe et vaut λ'^r ou $(1-\lambda)^{-r}$.

Ainsi $E(e^{\lambda X})$ existe et vaut $(1-\lambda)^{-r}$.

Par conséquent : $\lambda \in D_X$ et $\phi_X(\lambda) = (1-\lambda)^{-r}$.

2^{ème} cas .. $1-\Delta \leq 0$.

$$-(1-\Delta)t \geq 0, t^{r-1} \geq 0 \text{ et } 1/\Gamma(r) > 0$$

$$\bullet \forall t \in]0, +\infty[, e^{\Delta t} f_X(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} e^{-|1-\Delta|t} t^{r-1} \geq \frac{1}{\Gamma(r)} t^{r-1} = \frac{1}{\Gamma(r)} \frac{1}{t^{1-r}} \geq 0$$

$$\bullet \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1-r}} \text{ diverge car } 1-r \leq 1 \text{ (} r > 0 \text{ !)} \text{ donc } \int_1^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(r)} \frac{1}{t^{1-r}} dt \text{ diverge.}$$

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} e^{\Delta t} f_X(t) dt$ diverge. Alors, $\int_0^{+\infty} e^{\Delta t} f_X(t) dt$ diverge.

donc $e^{\Delta X}$ n'a pas d'espérance. $\Delta \notin D_X$.

Fonction $D_X =]-\infty, 1[$ et $\forall \Delta \in D_X, \phi_X(\Delta) = (1-\Delta)^{-r}$.

Qui peut le plus peut le moins. Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer D_{bX} .

$$\text{Soit } p \in \mathbb{R}. \Delta \in D_{bX} \Leftrightarrow b\Delta \in D_X \Leftrightarrow b\Delta \in]-\infty, 1[\Leftrightarrow \Delta \in]-\infty, \frac{1}{b}[.$$

$$\underline{D_{bX} =]-\infty, \frac{1}{b}[.} \text{ Soit } \Delta \in D_{bX}. \phi_{bX}(\Delta) \stackrel{q3 \text{ a)}}{=} e^{\Delta bX} \phi_X(b\Delta) = \phi_X(b\Delta) = (1-b\Delta)^{-r}$$

$$\underline{\forall \Delta \in D_{bX}, \phi_{bX}(\Delta) = (1-b\Delta)^{-r}.}$$

Remarque .. $\forall b \in \mathbb{R}_+^*, bX \in \Gamma(b, r)$!

Ainsi $D_{2X} =]-\infty, \frac{1}{2}[$ et $\forall \Delta \in D_{2X}, \phi_{2X}(\Delta) = (1-2\Delta)^{-r}$ (en posant $b=2$!).

PARTIE I Loi du χ^2 centré.

$$\textcircled{Q1} \quad \forall x \in]-\infty, 0], f_{X_4}(x) = 0$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, f_{X_4}(x) = \frac{1}{2^2 \Gamma(2)} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{4} x e^{-x/2}$$

$$\text{mais } \forall x \in]0, +\infty[, f_{X_4}(x) = \frac{1}{4} x e^{-x/2}$$

$x \mapsto \frac{1}{4} x e^{-x/2}$ et $x \mapsto 0$ sat de dens $\mathcal{B}'$ sur $\mathbb{R}$. Mais f_{X_4} est de dens $\mathcal{B}'$ sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$. cela suffit pour dire que f_{X_4} est continue sur $\mathbb{R}$ et de dens au moins sur $\mathbb{R}^*$.

pour la continuité comparée $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{X_4}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} \frac{x^{1/2}}{e^{x/2}} \right) = 0$.

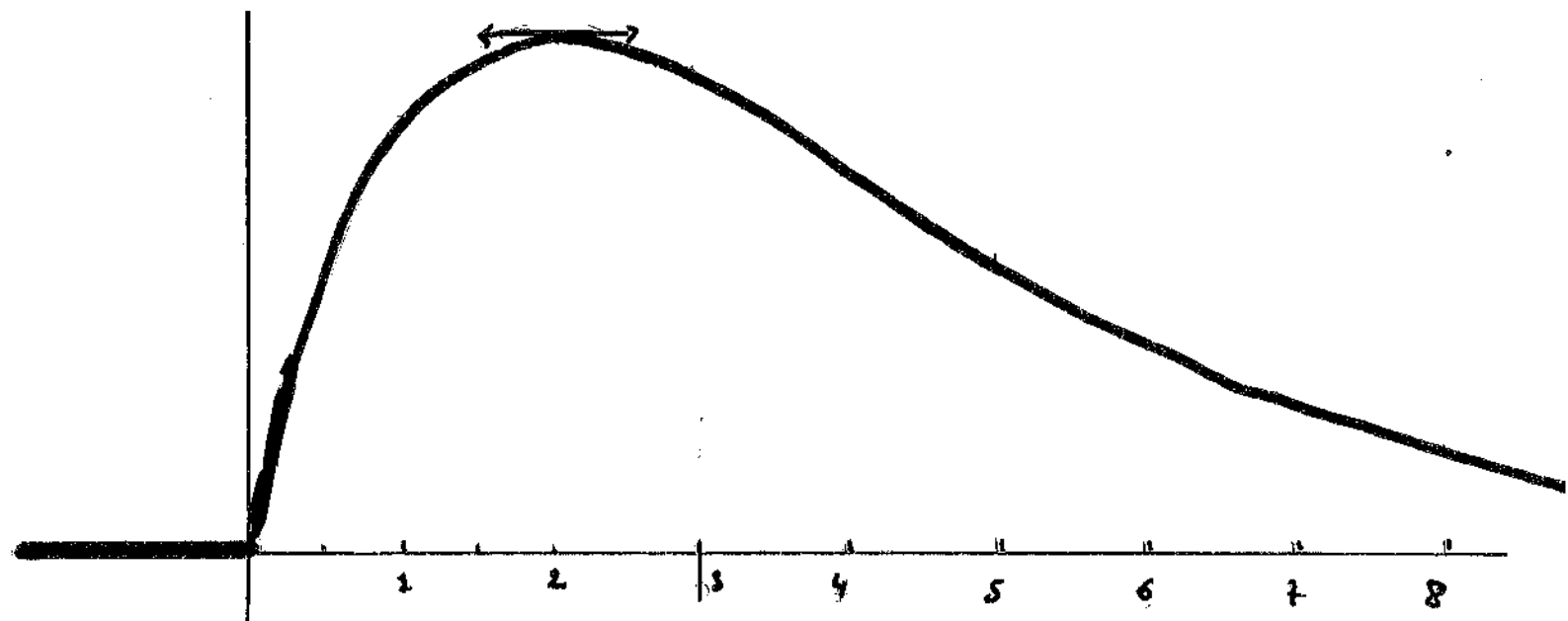
$$\forall x \in]0, +\infty[, f'_{X_4}(x) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{2} \right) e^{-x/2} = \frac{1}{8} (2-x) e^{-x/2}$$

f_{X_4} est continue sur $]0, +\infty[$, cela permet de dire que f_{X_4} est croissante sur $[0, 2]$ et décroissante sur $[2, +\infty[$.

notons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_{X_4}(x) - f_{X_4}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{4} e^{-x/2} \right) = \frac{1}{4}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f_{X_4}(x) - f_{X_4}(0)}{x - 0} = 0$.

f_{X_4} est dérivable à droite et à gauche de 0, $(f_{X_4})'_d(0) = \frac{1}{4}$ et $(f_{X_4})'_g(0) = 0$.

f_{X_4} n'est pas dérivable en 0.



Q2 a) $\frac{X_r}{2}$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité

$$f_{\frac{X_r}{2}} : x \mapsto \frac{1}{\Gamma(\frac{r}{2})} f_{X_r}\left(\frac{x}{2}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\frac{X_r}{2}}(x) = 2 f_{X_r}(2x).$$

$$\forall x \in]-\infty, 0], f_{\frac{X_r}{2}}(x) = 0$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, f_{\frac{X_r}{2}}(x) = 2 \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r}{2})} (2x)^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{2x}{2}} = \frac{x^{\frac{r}{2}-1} e^{-x}}{\Gamma(\frac{r}{2})}.$$

Ainsi $\frac{X_r}{2}$ suit la loi gamma de paramètre $\frac{r}{2}$. $\frac{X_r}{2} \sim \mathcal{G}(\frac{r}{2})$.

• Remarque ... On peut aussi obtenir le résultat en déterminant la fonction de répartition de $\frac{X_r}{2}$...

On peut aussi obtenir le résultat en utilisant : " $x > 0$ et $y \in \mathbb{R} \Rightarrow xy \in \mathbb{R}$ ".

Alors $E(\frac{X_r}{2})$ et $V(\frac{X_r}{2})$ existent et valent $\frac{r}{2}$.

Comme $X_r = 2 \times \frac{X_r}{2}$, $E(X_r)$ et $V(X_r)$ existent et valent $2 \times \frac{r}{2}$ et $4 \times \frac{r}{2}$.

Donc $E(X_r) = r$ et $V(X_r) = 2r$... ce qui est du cours car $X_r \sim \mathcal{P}(r, \frac{r}{2})$!

b) On pourrait appliquer directement le résultat général obtenu à Q3 b, mais bon ...

d'après Q3 b), ayant $\frac{X_r}{2} \sim \mathcal{G}(\frac{r}{2})$ et $X_r = 2 \times \frac{X_r}{2}$ on peut dire que

$$D_{X_r} =]-\infty, \frac{1}{2}[\text{ et } \forall \lambda \in D_{X_r}, \phi_{X_r}(\lambda) = (1-2\lambda)^{-\frac{r}{2}}.$$

Q3 a) Préli - Q2 b) nous a donné : $D_{U_2} =]-\infty, \frac{1}{2}[$ et

$$\forall \lambda \in]-\infty, \frac{1}{2}[, \phi_{U_2}(\lambda) = (1-2\lambda)^{-\frac{1}{2}}.$$

ce qui précède donne $D_{X_3} =]-\infty, \frac{1}{2}[$ et $\forall \lambda \in D_{X_3}, \phi_{X_3}(\lambda) = (1-1\lambda)^{-\frac{1}{2}}.$

Alors ϕ_{U^2} et ϕ_{X_1} coïncident sur l'intervalle ouvert non vide $] -\infty, \frac{1}{2} [$.

d'après le théorème ci-dessus admis U^2 et X_1 ont même loi.

• Exercice... Il est direct que $U^2 \in \Gamma(2, \frac{1}{2})$. •

b) $U_1, U_2, \dots, U_n$ sont indépendantes et suivent toutes la loi normale centrée réduite.

Alors $U_1^2, U_2^2, \dots, U_n^2$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de X_1 c'est à dire la loi gamma de paramètres 2 et $\frac{1}{2}$.

Le théorème de stabilité au niveau des lois gamma nous dit que $\sum_{i=1}^n U_i^2$ suit la loi gamma de paramètres 2 et $\frac{n}{2}$.

Ainsi $W_n \hookrightarrow \Gamma(2, \frac{n}{2})$ ou $W_n \hookrightarrow \chi^2(n)$

c) ICI d'après b) donc : $D_{W_n} =] -\infty, \frac{1}{2} [$ et $\forall \lambda \in D_{W_n}, \phi_{W_n}(\lambda) = (1 - 2\lambda)^{-\frac{n}{2}}$.

Rappelons que $\forall i \in [1, n]$, $D_{Z_i} =] -\infty, \frac{1}{2} [$ et $\forall \lambda \in D_{Z_i}, \phi_{Z_i}(\lambda) = (1 - 2\lambda)^{-\frac{1}{2}}$.

Plus de doute : $\phi_{W_n} = \phi_{Z_1} \phi_{Z_2} \dots \phi_{Z_n}$.

ou : $\forall \lambda \in] -\infty, \frac{1}{2} [, \phi_{W_n}(\lambda) = \phi_{Z_1}(\lambda) \phi_{Z_2}(\lambda) \dots \phi_{Z_n}(\lambda)$.

Q4 a) $\rightarrow$ Pour tout $i \in [1, n]$, $T_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Pour tout $i \in [1, n]$, $\frac{T_i}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Alors pour tout $i \in [1, n]$, $\frac{T_i^2}{\sigma^2} \hookrightarrow \Gamma(2, \frac{1}{2})$.

donc pour tout $i \in [1, n]$, $\frac{T_i^2}{\sigma^2}$ possède une espérance qui vaut 2 et une variance qui vaut $2 \times \frac{1}{2}$ c'est à dire 1.

Alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, T_i^2 possède une espérance qui vaut σ^2 et une variance qui vaut $2\sigma^4$.

Ce qui suffit en fait pour dire que $E(S_n)$ existe et vaut $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(T_i^2)$

Alors $E(S_n) = \frac{1}{n} \times n \times \sigma^2 = \sigma^2$. $E(S_n) = \sigma^2$

S_n est un estimateur sans biais de σ^2 .

→ • $T_1, T_2, \dots, T_n$ sont indépendantes. et de même pour $T_1^2, T_2^2, \dots, T_n^2$.

• $T_1, T_2, \dots, T_n$ ont même espérance σ^2 et même variance $2\sigma^4$

la loi faible des grands nombres permet de dire que la suite de terme généraux $\frac{T_1^2 + T_2^2 + \dots + T_n^2}{n}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire égale à σ^2 .

Alors S_n est un estimateur sans biais et convergent de σ^2 .

b) notons que $P(\sigma^2 \in]0, \frac{n S_n}{k_\alpha}]) \geq 1 - \alpha$

posons $a = P(\sigma^2 \in]0, \frac{n S_n}{k_\alpha}])$.

$$a = P(0 < \sigma^2 \leq \frac{n S_n}{k_\alpha}) = P(k_\alpha \leq \frac{n S_n}{\sigma^2}) = P(k_\alpha \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{T_i}{\sigma}\right)^2).$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{T_i}{\sigma} \in \mathcal{U}(0, 1)$.

de plus $\frac{T_1}{\sigma}, \frac{T_2}{\sigma}, \dots, \frac{T_n}{\sigma}$ sont indépendantes car $T_1, T_2, \dots, T_n$ sont indépendantes.

Alors $\sum_{i=1}^n \left(\frac{T_i}{\sigma}\right)^2$ a même loi que W_n .

$a = P(k_\alpha \leq W_n) = 1 - \alpha$. Ainsi $a \geq 1 - \alpha$!!

donc $P(\sigma^2 \in]0, \frac{n S_n}{k_\alpha}]) \geq 1 - \alpha$.

$]0, \frac{n S_n}{k_\alpha}]$ est un intervalle de confiance de σ^2 au niveau α .

PARTIE II. Loi du χ^2 centré

Q1 a) Soit (denomée) $Z = U^2$. Nous avons vu dans I Q3 a) que Z a même loi que X_1 donc que Z suit la loi gamma de paramètres 2 et 1/2. Z possède donc un moment d'ordre k , alors U possède un moment d'ordre k car $Z = U^2$.

$$E(U^4) = E(Z^2) = V(Z) + (E(Z))^2 = 4 \times 1/2 + (2 \times 1/2)^2 = 2 + 1 = 3. \quad E(U^4) = 3.$$

$\uparrow Z \sim \Gamma(2, 1/2)$

$E(U^3)$ existe car U possède un moment d'ordre k et $E(U^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^3 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2/2} dt$

Or $t \mapsto t^3 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2/2}$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $E(U^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^3 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2/2} dt = 0.$

$E(U^3) = 0$ et $E(U^4) = 3.$

b) $Y_1 = U_1^2$. $U_1 \in \mathcal{N}(m_1, 1)$ donc $U_1 - m_1 \in \mathcal{N}(0, 1)$.

Or $U_1 = (U_1 - m_1) + m_1$. Donc U_1 a même loi que $U + m_1$.

$(U + m_1)^2 = U^2 + 2m_1 U + m_1^2$. Rappelons que U possède un moment d'ordre k donc $E(U^k)$ existe pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Alors $E((U + m_1)^2)$ existe et vaut $E(U^2) + 2m_1 E(U) + m_1^2$.

Donc $E(Y_1)$ existe et vaut $E(U^2) + 2m_1 E(U) + m_1^2$.

$E(U) = 0$ et $E(U^2) = V(U) + (E(U))^2 = 1 + 0^2 = 1.$

$E(Y_1) = 1 + m_1^2 = \lambda_1 + 1.$

$(U + m_1)^4 = U^4 + 4m_1 U^3 + 6m_1^2 U^2 + 4m_1^3 U + m_1^4$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E(U^k)$

existe. Alors $E((U + m_1)^4)$ existe et vaut $E(U^4) + 4m_1 E(U^3) + 6m_1^2 E(U^2) + 4m_1^3 E(U) + m_1^4.$

donc $E(Y_1^2)$ existe et vaut $E(U^4) + 4m_1 E(U^3) + 6m_1^2 E(U^2) + 4m_1^3 E(U) + m_1^4$.

$$E(Y_1^2) = 3 + 4m_1 \times 0 + 6m_1^2 \times 1 + 4m_1^3 \times 0 + m_1^4 = 3 + 6m_1^2 + m_1^4.$$

Alors $V(Y_1)$ existe et vaut : $3 + 6m_1^2 + m_1^4 - (3 + m_1^2)^2 = 2 + 4m_1^2 = 2 + 4\lambda_1$.

$$\underline{E(Y_1) = \lambda_1 + 1} \quad \text{et} \quad \underline{V(Y_1) = 4\lambda_1 + 2}.$$

c) Rappelons que Y_1 a même loi que $(U + m_1)^2$.

$$\text{Posons } \hat{Y}_1 = (U + m_1)^2. \quad D_{Y_1} = D_{\hat{Y}_1} \quad \text{et} \quad \phi_{Y_1} = \phi_{\hat{Y}_1}.$$

$$\hat{Y}_1 = U^2 + 2m_1 U + m_1^2. \quad \text{Soit } \lambda \in \mathbb{R}. \quad e^{\lambda \hat{Y}_1} = e^{\lambda(U^2 + 2m_1 U + m_1^2)}$$

. U est une variable aléatoire de densité φ

. U prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$

. $x \mapsto e^{\lambda(x^2 + 2m_1 x + m_1^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

À l'aide de la transformation nous que $E(e^{\lambda \hat{Y}_1})$ existe si et seulement si

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda(x^2 + 2m_1 x + m_1^2)} \varphi(x) dx$ est absolument convergente ... ou convergente

car $\forall x \in \mathbb{R}, e^{\lambda(x^2 + 2m_1 x + m_1^2)} \varphi(x) \geq 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{\lambda(x^2 + 2m_1 x + m_1^2)} \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\lambda(x^2 + 2m_1 x + m_1^2) - \frac{x^2}{2}}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{\lambda(x^2 + 2m_1 x + m_1^2)} \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\lambda m_1^2} e^{-(\frac{1}{2} - \lambda)x^2 + 2\lambda m_1 x}$$

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda(x^2 + 2m_1 x + m_1^2)} \varphi(x) dx$ converge si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{1}{2} - \lambda)x^2 + 2\lambda m_1 x} dx$

converge. D'après le préliminaire $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{1}{2} - \lambda)x^2 + 2\lambda m_1 x} dx$ converge si

et seulement si $\frac{1}{2} - \lambda > 0$.

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\Delta(x^2 + 2u, x + u, \Delta)} \varphi(x) dx$ converge si et seulement si $\Delta < \frac{1}{2}$.

Alors $E(e^{\Delta Y_1})$ existe si et seulement si $\Delta < \frac{1}{2}$. $D_{Y_1} =]-\infty, \frac{1}{2}[$.

soit $\Delta \in D_{Y_1}$.

$$E(e^{\Delta Y_1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\Delta(x^2 + 2u, x + u, \Delta)} \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\Delta m_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{1}{2} - \Delta)x^2 + 2m_1, \Delta u} dx.$$

toujours d'après le préliminaire : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{1}{2} - \Delta)x^2 + 2m_1, \Delta u} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2} - \Delta}} e^{\frac{(2m_1, \Delta)^2}{4(\frac{1}{2} - \Delta)}}$.

$$\text{Alors } E(e^{\Delta Y_1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\Delta m_1^2} \times \sqrt{\frac{2\pi}{1 - 2\Delta}} e^{\frac{2m_1, \Delta^2}{1 - 2\Delta}} = (1 - 2\Delta)^{-\frac{1}{2}} e^{\Delta m_1^2 [1 + \frac{2\Delta}{1 - 2\Delta}]}$$

$$E(e^{\Delta Y_1}) = (1 - 2\Delta)^{-1} e^{\Delta m_1^2 (\frac{1 - 2\Delta + 2\Delta}{1 - 2\Delta})} = (1 - 2\Delta)^{-1} e^{\frac{\Delta \lambda_1}{1 - 2\Delta}}.$$

$$\forall \Delta \in D_{Y_1}, \phi_{Y_1}(\Delta) = (1 - 2\Delta)^{-1} e^{\frac{\Delta \lambda_1}{1 - 2\Delta}}.$$

(Q2) a) ce qui précède montre que $E(\pi_j^2)$ (resp. $V(\pi_j^2)$) existe et vaut $\lambda_j + 1$ ou $m_j^2 + 1$ (resp. $4\lambda_j + 2$ ou $4m_j^2 + 2$).

Alors pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E(\pi_j^2)$ (resp. $V(\pi_j^2)$) existe et vaut $m_j^2 + 1$ (resp. $4m_j^2 + 2$).

Alors $Y_n = \sum_{j=1}^n \pi_j^2$ possède une espérance et une variance.

$$E(Y_n) = \sum_{j=1}^n E(\pi_j^2) = \sum_{j=1}^n (m_j^2 + 1) = \lambda_n + n. \quad \underline{\underline{E(Y_n) = \lambda_n + n.}}$$

$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ sont indépendantes donc $\pi_1^2, \pi_2^2, \dots, \pi_n^2$ le sont aussi.

$$\text{Alors } V(Y_n) = \sum_{j=1}^n V(\pi_j^2) = \sum_{j=1}^n (4m_j^2 + 2) = 4\lambda_n + 2n. \quad \underline{\underline{V(Y_n) = 4\lambda_n + 2n.}}$$

b) Soit $\lambda \in]-\infty, \frac{1}{2}[$.

$$\phi_{\gamma_n}(\lambda) = E(e^{\lambda \gamma_n}) = E(e^{\lambda(\pi_1^2 + \pi_2^2 + \dots + \pi_n^2)}) = E\left(\prod_{j=1}^n e^{\lambda \pi_j^2}\right).$$

$\lambda \in]-\infty, \frac{1}{2}[$ donc $E(e^{\lambda \pi_j^2})$ existe et vaut $(1-2\lambda)^{-1/2} e^{\frac{\lambda \pi_j^2}{1-2\lambda}}$ car on

nous l'avait vu dans II § 1 c) ... ou vaut $(1-2\lambda)^{-1/2} e^{\frac{\lambda \pi_j^2}{1-2\lambda}}$

de même pour tout $j \in [1, n]$, $E(e^{\lambda \pi_j^2})$ existe et vaut $(1-2\lambda)^{-1/2} e^{\frac{\lambda \pi_j^2}{1-2\lambda}}$.

Noter que $e^{\lambda \pi_1^2}, e^{\lambda \pi_2^2}, \dots, e^{\lambda \pi_n^2}$ sont indépendantes car $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ sont indépendantes. En "exploitant" (ou en itérant) la troisième propriété admise j'ai :

$$\phi_{\gamma_n}(\lambda) = E\left(\prod_{j=1}^n e^{\lambda \pi_j^2}\right) = \prod_{j=1}^n E(e^{\lambda \pi_j^2}) = \prod_{j=1}^n \left[(1-2\lambda)^{-1/2} e^{\frac{\lambda \pi_j^2}{1-2\lambda}}\right]$$

$$\phi_{\gamma_n}(\lambda) = (1-2\lambda)^{-\frac{n}{2}} e^{\sum_{j=1}^n \frac{\lambda \pi_j^2}{1-2\lambda}} = (1-2\lambda)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{\lambda}{1-2\lambda} \sum_{j=1}^n \pi_j^2}.$$

$$\forall \lambda \in]-\infty, \frac{1}{2}[, \phi_{\gamma_n}(\lambda) = (1-2\lambda)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{\lambda \lambda_n}{1-2\lambda}}.$$

PARTIE III Nombre aléatoire de degré de liberté

Q1 a) Soit $k \in [1, n]$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$P(K=k) = \frac{1}{n} \neq 0.$$

$$P_{[K=k]}(X \leq x) = \frac{1}{P(K=k)} P([K=k] \cap [X \leq x]).$$

$$P_{[K=k]}(X \leq x) = \frac{1}{P(K=k)} P([K=k] \cap [\sup_{1 \leq i \leq k} (J_i) \leq x]).$$

$$P_{[K=k]}(X \leq x) = \frac{1}{P(K=k)} P([K=k] \cap [\sup_{1 \leq i \leq k} (J_i) \leq x]).$$

Car $K, J_1, J_2, \dots, J_k$ sont indépendantes donc K et $\sup_{1 \leq i \leq k} J_i$ sont également indépendantes. Dans ces conditions :

$$P_{[K=l]}(X \leq x) = \frac{1}{P(K=l)} \left[P(K=l) P\left(\sup_{1 \leq i \leq l} J_i \leq x\right) \right] = P\left(\sup_{1 \leq i \leq l} J_i \leq x\right) = P(X_l \leq x).$$

$$\forall x \in [1, n], \forall l \in \mathbb{N}, P_{[K=l]}(X \leq x) = P(X_l \leq x).$$

b) X prend ses valeurs dans $[0, 1]$. $\forall x \in]-\infty, 0[, F_X(x) = 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[, F_X(x) = 1$.
 Soit $x \in [0, 1[$. $([K=l])_{l \in \mathbb{N}_+}$ est un système complet d'événements.

$$\text{Alors } F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{l=1}^{\infty} P(K=l) P_{[K=l]}(X \leq x) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{\infty} P(X_l \leq x).$$

$$F_X(x) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{\infty} P\left(\sup_{1 \leq i \leq l} J_i \leq x\right) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{\infty} P(\{J_1 \leq x\} \cap \dots \cap \{J_l \leq x\})$$

$$F_X(x) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{\infty} P(J_1 \leq x) P(J_2 \leq x) \dots P(J_l \leq x) \text{ par indépendance de } J_1, J_2, \dots, J_l$$

pour tout $l \in \mathbb{N}_+$.

Comme $x \in [0, 1[$, $\forall i \in \mathbb{N}_+, P(J_i \leq x) = x$ ($J_i \in \mathcal{U}([0, 1])$).

$$F_X(x) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{\infty} x^l = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{\infty} x^l \quad x \neq 1.$$

$$\text{Finalement: } \forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \frac{x}{n} \frac{1-x^n}{1-x} & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{\infty} x^l & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

c) Notons que $\forall x \in]-\infty, 0[, F_X(x) = 0$. $\forall x \in [0, 1[, F_X(x) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{\infty} x^l$ et

$\forall x \in [1, +\infty[, F_X(x) = 1$. Comme $x \mapsto 0, x \mapsto \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{\infty} x^l, x \mapsto 1$ sat de donc

$\mathcal{B}$ sur $\mathbb{R}$: F_X est de donc $\mathcal{B}$ sur $]-\infty, 0], [0, 1]$ et $[1, +\infty[$.

Sous ces conditions F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.
Ceci suffit pour dire que X est une variable aléatoire à densité.

$$\forall x \in]-\infty, 0[, F_X(x) = 0 \text{ et } F'_X(x) = 0$$

$$\forall x \in]0, 1[, F_X(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^k \text{ et } F'_X(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k x^{k-1}$$

$$\forall x \in]1, +\infty[, F_X(x) = 1 \text{ et } F'_X(x) = 0.$$

$$\text{Posons } \forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k x^{k-1} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f_X est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_X sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ pûce d'un ensemble fini de points.

Alors f_X est une densité de X .

$$\int_{-\infty}^0 f_X(t) dt \text{ (resp. } \int_1^{+\infty} f_X(t) dt) \text{ existe et vaut } 0.$$

$$\int_0^1 t f_X(t) dt \text{ existe car } t \mapsto t f_X(t) \text{ est continue sur }]0, 1[.$$

$$\text{Alors } \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt \text{ converge et ainsi } \underline{E(X) \text{ existe}}.$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt = \int_0^1 t f_X(t) dt = \int_0^1 t \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k t^{k-1} \right) dt = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \int_0^1 t^k dt$$

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} \quad \underline{E(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1}}$$

d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Étudions X_k . X_k prend ses valeurs dans $[0, 1]$. Notons

$$\forall x \in]-\infty, 0[, F_{X_k}(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]1, +\infty[, F_{X_k}(x) = 1.$$

$$\text{Soit } x \in]0, 1[. F_{X_k}(x) = P(X_k \leq x) = P(\text{sur } J: x) = P([T_1 \leq x] \cap \dots \cap [T_k \leq x]) = x^k$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{X_k}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ x^k & \text{si } x \in]0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

calcul de j'écrit !

Notons que $\forall x \in \mathbb{R}, F_{X_R}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ x^R & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$

Alors F_{X_R} est de classe B' sur $]-\infty, 0]$, $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$.

F_{X_R} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe B' sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$. X_R est une variable aléatoire à densité. $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[, F'_{X_R}(x) = 0$ et $\forall x \in]0, 1[, F'_{X_R}(x) = R x^{R-1}$.

Pour $\forall x \in \mathbb{R}, f_{X_R}(x) = \begin{cases} R x^{R-1} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f_{X_R} est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_{X_R} sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. f_{X_R} est une densité de X_R .

$\int_{-\infty}^0 f_{X_R}(t) dt$ (resp. $\int_1^{+\infty} f_{X_R}(t) dt$) existe et vaut 0.

$\int_0^1 t f_{X_R}(t) dt$ existe car $t \mapsto t f_{X_R}(t)$ est continue sur $[0, 1]$.

Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{X_R}(t) dt$ existe. X_R possède une espérance.

$$E(X_R) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{X_R}(t) dt = \int_0^1 t f_{X_R}(t) dt = \int_0^1 t (R t^{R-1}) dt = R \left[\frac{t^R}{R+1} \right]_0^1 = \frac{R}{R+1}$$

$\forall R \in \mathbb{N}^*, E(X_R) = \frac{R}{R+1}$

$E(g(K))$ existe car $g(K)$ est une variable aléatoire dérivée de K .

$$E(g(K)) = \sum_{k=1}^n g(k) P(K=k) = \sum_{k=1}^n E(X|K=k) \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{R}{R+1}$$

donc $E(g(K)) = E(X)$.

la loi de X rendant $K=k$ et la loi de X_R .

$E(X) = E(g(K))$

nous avons ainsi vérifié (a) dans ce cas particulier.

Q2 a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Noter que $P(K=k) = \frac{(1/k)^k}{k!} e^{-1/k} \neq 0$.

$$\text{Alors } P_{[K=k]}(H_n \leq x) = \frac{1}{P(K=k)} P([H_n \leq x] \cap [K=k]).$$

$$P_{[K=k]}(H_n \leq x) = \frac{1}{P(K=k)} P([U_1^k + U_2^k + \dots + U_{n+k}^k \leq x] \cap [K=k])$$

$$P_{[K=k]}(H_n \leq x) = \frac{1}{P(K=k)} P([U_1^k + U_2^k + \dots + U_{n+k}^k \leq x] \cap [K=k]).$$

Pour hypothèse $U_1, U_2, \dots, U_{n+k}, K$ sont indépendantes.

Alors $U_1^k, U_2^k, \dots, U_{n+k}^k, K$ sont indépendantes.

Ainsi $U_1^k + U_2^k + \dots + U_{n+k}^k$ et K sont indépendantes. Dans ces conditions :

$$P_{[K=k]}(H_n \leq x) = \frac{1}{P(K=k)} P(U_1^k + U_2^k + \dots + U_{n+k}^k \leq x) P(K=k) = P(U_1^k + \dots + U_{n+k}^k \leq x).$$

$$\text{Or } P(U_1^k + U_2^k + \dots + U_{n+k}^k \leq x) = P(W_{n+k} \leq x) \text{ car } U_1^k + U_2^k + \dots + U_{n+k}^k \text{ a même loi}$$

que W_{n+k} .

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_{[K=k]}(H_n \leq x) = P(W_{n+k} \leq x).$$

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de H_n sachant $[K=k]$ et la loi de la

variable aléatoire W_{n+k} définie dans la question 1.3.b. de I.

b) Rappelons que $\forall k \in \mathbb{N}, P(K=k) \neq 0$. Donc $N_K = \mathbb{N}$.

Soit un échantillon de $]-\infty, \frac{1}{e}[$. $D \in D_{H_n}$. Soit $k \in \mathbb{N}$

La loi conditionnelle de e^{H_n} sachant $[K=k]$ est la même que la loi de $e^{W_{n+k}}$.

Rappelons que $D_{W_{n+k}} =]-\infty, \frac{1}{e}[$ et $\forall D' \in D_{W_{n+k}}, \phi_{W_{n+k}}(D') = (1 - 2D')^{\frac{n+k}{2}}$.

$\lambda \in]-\infty, \frac{1}{2}]$ donc $E(e^{\lambda W_{n+1}})$ existe et vaut $(1-2\lambda)^{-\frac{n+1}{2}}$.

Ainsi $E(e^{\lambda H_n} / K=k)$ existe et vaut $(1-2\lambda)^{-\frac{n+1}{2}}$.

ou $g(k) = (1-2\lambda)^{-\frac{n+1}{2}}$.

$$\text{c) } \forall k \in \mathbb{N}, g(k)P(K=k) = (1-2\lambda)^{-\frac{n+1}{2}} \frac{(\lambda/k)^k}{k!} e^{-\lambda/k} = (1-2\lambda)^{-\frac{n}{2}} e^{-\lambda/k} \frac{\left(\frac{\lambda}{2(1-2\lambda)}\right)^k}{k!}.$$

La série de terme général $\frac{\left(\frac{\lambda}{2(1-2\lambda)}\right)^k}{k!}$ est convergente et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{2(1-2\lambda)}\right)^k}{k!} = e^{\frac{\lambda}{2(1-2\lambda)}}.$$

Ainsi la série de terme général $g(k)P(K=k)$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} g(k)P(K=k) = (1-2\lambda)^{-\frac{n}{2}} e^{-\lambda/k} e^{\frac{\lambda}{2(1-2\lambda)}}$$

Notons que cette série est même absolument convergente car à termes positifs.

Le théorème de transfert nous dit que $E(g(K))$ existe et vaut :

$$(1-2\lambda)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2(1-2\lambda)}} \text{ ou } (1-2\lambda)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{\lambda\lambda}{1-2\lambda}}.$$

$$\underline{E(g(K)) \text{ existe et } E(g(K)) = (1-2\lambda)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{\lambda\lambda}{1-2\lambda}}.}$$

d) Soit $\lambda \in D_{H_n}$. $\lambda \in]-\infty, \frac{1}{2}]$ et $e^{\lambda H_n}$ possède une espérance.

D'après c), pour tout $k \in \mathbb{N}$ $E(e^{\lambda H_n} / K=k)$ existe. De plus $H_K = 1/K$.

$$\text{Ainsi (*) donne } E(e^{\lambda H_n}) = \sum_{k=0}^{+\infty} E(e^{\lambda H_n} / K=k) P(K=k).$$

Le c) nous dit que $E(e^{\lambda H_n}) = (1-2\lambda)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{\lambda\lambda}{1-2\lambda}}$. Dans ces conditions :

$$D_{H_n} =]-\infty, \frac{1}{2}[\text{ et } \forall \lambda \in D_{H_n}, \phi_{H_n}(\lambda) = (1-2\lambda)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\lambda n}{1-2\lambda}}.$$

Donc II §2 nous avons vu que Y_n suivait la loi de χ^2 d'ordre n à un degré de liberté, de paramètre de décroissance λ_n , que $D_{Y_n} =]-\infty, \frac{1}{2}[$ et que : $\forall \lambda \in D_{Y_n}, \phi_{Y_n}(\lambda) = (1-2\lambda)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\lambda n}{1-2\lambda}}.$

Donc si $\lambda_n = \lambda$, ϕ_{H_n} et ϕ_{Y_n} coïncident sur l'intervalle ouvert $]-\infty, \frac{1}{2}[$ donc H_n et Y_n ont même loi (d'après le lemme précédent cité).

Ainsi H_n suit la loi de χ^2 d'ordre n à un degré de liberté, de paramètre

de décroissance λ . $H_n \subset \chi^2(n, \lambda).$

e) le résultat proposé au début de la partie III part de l'existence de $E(X)$.

E_n fait-il aussi plutôt ^{faux} supposé que l'existence de $E(X)$ résulte de 1^{re} l'existence de $E(X|K=l)$ pour tout l dans $\mathbb{N}_K$... dans la

$$2^e \text{ l'existence de } \sum_{l \in \mathbb{N}_K} E(X|K=l) P(K=l)$$

car on X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$. c'est ce que nous supposons.

$$\text{On a toujours } N_K = \mathbb{N} \text{ et } \forall l \in \mathbb{N}, P(K=l) = \frac{(n-1)!}{l!} e^{-\lambda l}. \quad n \geq 3$$

$$\forall l \in \mathbb{N}, 0 \leq \left| \frac{1}{n-2+l} P(K=l) \right| = \frac{1}{n-2+l} P(K=l) \leq \frac{1}{n-2} P(K=l) \leq P(K=l)$$

de plus l'ensemble de tous q_l est $P(K=l)$ converge. les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de tous q_l est

$$\left| \frac{1}{n-2+l} P(K=l) \right| \text{ converge.}$$

Alors la série de terme général $\frac{1}{n \cdot 2 + 2K}$ ($K=1$) est absolument convergente.
 Le théorème de transfert montre alors que :

$$1^{\circ} \quad \mathbb{E} \left(\frac{1}{n \cdot 2 + 2K} \right) \text{ existe.}$$

$$2^{\circ} \quad \mathbb{E} \left(\frac{1}{n \cdot 2 + 2K} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot 2 + 2k} P(K=k).$$

Soit $K \in \mathbb{N}$. La loi de H_n sachant $[K=k]$ est la loi de $W_{n+1,k}$ donc la loi gamma de paramètres 2 et $\frac{n+2k}{2}$.

$$\text{Pour } \forall x \in \mathbb{R}, f_{W_{n+1,k}}(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n+2k}{2}-1}}{2^{\frac{n+2k}{2}} \Gamma(\frac{n+2k}{2})} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$f_{W_{n+1,k}}$ est une densité de $W_{n+1,k}$

- $W_{n+1,k}$ prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$
- $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$
- $f_{W_{n+1,k}}$ est une densité de $W_{n+1,k}$

Alors $\frac{1}{W_{n+1,k}}$ provient d'une expérience n et nous avons $n \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f_{W_{n+1,k}}(t) dt$

est absolument convergente ou convergente car $\forall t \in]0, +\infty[, \frac{1}{t} f_{W_{n+1,k}}(t) \geq 0$.

$$\text{En conséquence } \mathbb{E} \left(\frac{1}{W_{n+1,k}} \right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f_{W_{n+1,k}}(t) dt.$$

$$\forall t \in]0, +\infty[, \frac{1}{t} f_{W_{n+1,k}}(t) = \frac{e^{-t/2} t^{\frac{(n+2k)}{2}-1-1}}{2^{\frac{n+2k}{2}} \Gamma(\frac{n+2k}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{n+2k}{2}-1)}{2 \Gamma(\frac{n+2k}{2})} \frac{e^{-t/2} t^{\frac{(n+2k)}{2}-1-1}}{2^{\frac{n+2k}{2}-1} \Gamma(\frac{n+2k}{2}-1)}$$

$$\text{Pour } \forall t \in \mathbb{R}, h(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t/2} t^{\frac{(n+2k)}{2}-1-1}}{2^{\frac{n+2k}{2}-1} \Gamma(\frac{n+2k}{2}-1)} & \text{si } t \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

la densité d'une variable aléatoire qui suit la loi gamma de paramètres 2 et $\frac{n+2}{2} - 1$.

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt$ existe et vaut 1 . ce qui permet aussi de dire que

$\int_0^{+\infty} h(t) dt$ existe et vaut 1 car h est nulle sur $]-\infty, 0]$.

$$\text{A } \forall t \in]0, +\infty[, \frac{1}{t} \int_{W_{n+2}}(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+2}{2}-1)}{2\Gamma(\frac{n+2}{2})} \quad h(t) = \frac{1}{2(\frac{n+2}{2}-1)} \quad q(t) = \frac{1}{n-2+2t} q(t)$$

"P(n+1) = 2 P(n)"

$$\text{Ainsi } \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \int_{W_{n+2}}(t) dt \text{ existe et vaut } \frac{1}{n-2+2t}.$$

Notons aussi que ceci suffit pour dire que $E(\frac{1}{W_{n+2}})$ existe et vaut $\frac{1}{n-2+2t}$.

La loi de H_n sachant que $[K=k]$ étant la loi de W_{n+2k} on peut alors dire que $E(\frac{1}{H_n} | K=k)$ existe et vaut $\frac{1}{n-2+2k}$.

Rappelons que la série de terme général $\frac{1}{n-2+2k} P(K=k)$ converge, que

$$E(\frac{1}{n-2+2K}) \text{ existe et que } E(\frac{1}{n-2+2K}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n-2+2k} P(K=k)$$

Par la série de terme général $E(\frac{1}{H_n} | K=k) P(K=k)$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} E(\frac{1}{H_n} | K=k) P(K=k) = E(\frac{1}{n-2+2K})$$

Nous en déduisons que $E(\frac{1}{H_n})$ existe (!!) et que $E(\frac{1}{H_n}) = E(\frac{1}{n-2+2K})$

d'où (*) .

PARTIE IV. Estimateur de James-Stein

(Q1) • $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p$ sont indépendantes

• $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \hat{\theta}_i \in \mathcal{V}(\theta_i, 1)$

Alors d'après la partie II : $\hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_2^2 + \dots + \hat{\theta}_p^2 \in \chi^2(p, \sum_{i=1}^p \theta_i^2)$.

Ainsi $B_p \in \chi^2(p, b_p)$.

$E(B_p) = b_p + p$ d'après II Q2a (et $V(B_p) = 4b_p + 2p$)

$E(B_p) \neq b_p$ donc B_p est un estimateur biaisé de b_p .

(Q2) • Soit $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. $(\hat{\theta}_j - \theta_j)^2 = (\bar{\theta}_j - E(\bar{\theta}_j))^2$ et $\bar{\theta}_j \in \mathcal{V}(\theta_j, 1)$.

Alors $E((\hat{\theta}_j - \theta_j)^2)$ existe et vaut $V(\bar{\theta}_j)$ donc 1.

Ainsi $R(\bar{\theta}, \theta) = E(\sum_{i=1}^p (\bar{\theta}_i - \theta_i)^2)$ existe.

• Soit $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. $(\theta_j^* - \theta_j)^2 = (1 - \frac{c}{B_p}) \bar{\theta}_j - \theta_j)^2$

$$(\theta_j^* - \theta_j)^2 = \left((\bar{\theta}_j - \theta_j) - \frac{c}{B_p} \bar{\theta}_j \right)^2 = (\bar{\theta}_j - \theta_j)^2 + \frac{c^2}{B_p^2} \bar{\theta}_j^2 - \frac{2c}{B_p} (\bar{\theta}_j - \theta_j) \bar{\theta}_j$$

Rappelons que $B_p = \sum_{j=1}^p \theta_j^2$. En sommant ce qui précède on obtient :

$$\sum_{j=1}^p (\theta_j^* - \theta_j)^2 = \sum_{j=1}^p (\bar{\theta}_j - \theta_j)^2 + \frac{c^2}{B_p^2} \times B_p - \frac{2c}{B_p} \left[B_p - \sum_{j=1}^p \theta_j \bar{\theta}_j \right]$$

$$\sum_{j=1}^p (\theta_j^* - \theta_j)^2 = \sum_{j=1}^p (\bar{\theta}_j - \theta_j)^2 + c^2 \times \frac{1}{B_p} - 2c + 2c \times \frac{1}{B_p} \sum_{j=1}^p \theta_j \bar{\theta}_j$$

$$\rightarrow E\left(\sum_{j=1}^p (\tilde{\theta}_j - \theta_j)^2\right) \text{ existe et vaut } R(\tilde{\theta}, \theta).$$

$$\rightarrow E\left(\frac{1}{B_p}\right) \text{ existe et vaut } E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) \text{ d'après III } \S 2 e$$

$$\rightarrow E\left(\frac{1}{B_p} \sum_{j=1}^p \theta_j \tilde{\theta}_j\right) \text{ existe et vaut } E\left(\frac{2K}{p-2+2K}\right) \text{ d'après a qui est admis.}$$

$$\text{Alors } E\left(\sum_{j=1}^p (\theta_j^* - \theta_j)^2\right) \text{ existe et vaut } E\left(\sum_{j=1}^p (\tilde{\theta}_j - \theta_j)^2\right) + c^2 E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) - 2c E\left(\frac{2K}{p-2+2K}\right).$$

$$\text{Donc } R(\theta^*, \theta) \text{ existe et vaut } R(\tilde{\theta}, \theta) + c^2 E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) - 2c E\left(\frac{2K}{p-2+2K}\right)$$

$$\text{Alors } R(\theta^*, \theta) - R(\tilde{\theta}, \theta) = c^2 E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) + 2c E\left(\frac{2K}{p-2+2K} - 1\right) = c^2 E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) + 2c E\left(\frac{-(p-2)}{p-2+2K}\right)$$

$$R(\theta^*, \theta) - R(\tilde{\theta}, \theta) = (c^2 - 2c(p-2)) E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right).$$

$$R(\theta^*, \theta) \text{ et } R(\tilde{\theta}, \theta) \text{ existent et } R(\theta^*, \theta) - R(\tilde{\theta}, \theta) = (c^2 - 2c(p-2)) E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right).$$

$$b) E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{p-2+2K}\right) \frac{(\lambda/2)^k}{k!} e^{-\lambda/2} > 0.$$

$$\text{Alors } R(\theta^*, \theta) - R(\tilde{\theta}, \theta) < 0 \Leftrightarrow c^2 - 2c(p-2) < 0 \Leftrightarrow c(c - 2(p-2)) < 0 \Leftrightarrow c \in]0, 2(p-2)[$$

$$\text{Pour conclure } \underline{R(\theta^*, \theta) < R(\tilde{\theta}, \theta) \Leftrightarrow 0 < c < 2(p-2)} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{signification du} \\ \text{recal de } c \end{array}$$

$$R(\theta^*, \theta) - R(\tilde{\theta}, \theta) \text{ est minimal si et seulement si } c^2 - 2c(p-2) \text{ est minimal.}$$

$$c^2 - 2c(p-2) = (c - (p-2))^2 - (p-2)^2. \text{ Donc } c^2 - 2c(p-2) \text{ est minimal}$$

$$\text{pour } c = p-2.$$

$$\underline{R(\theta^*, \theta) - R(\tilde{\theta}, \theta) \text{ est minimal pour } c = p-2.}$$

$$\forall c = p-2 : \underline{\underline{\theta^* = \left(1 - \frac{p-2}{B_p}\right) \tilde{\theta}.}}$$