

PARTIE J

① a) soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Notons pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, A_k^i l'événement la $k^{\text{ième}}$ boule n'a pas été placée dans l'urne numéro i .

- $\{X_i = 1\} = A_1^i \cap A_2^i \cap \dots \cap A_n^i$
- $A_1^i, A_2^i, \dots, A_n^i$ sont indépendants car on répartit "de façon indépendante"...
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(A_k^i) = 1 - P(\overline{A_k^i}) = 1 - \frac{1}{n}$.

$$\text{Ainsi } P(X_i = 1) = P(A_1^i) P(A_2^i) \dots P(A_n^i) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

b) soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$.

Notons pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $A_k^{i,j}$ l'événement la $k^{\text{ième}}$ boule n'est placée ni dans l'urne numéro i ni dans l'urne numéro j .

- $\{X_i = 1\} \cap \{X_j = 1\} = \bigcap_{k=1}^n A_k^{i,j}$.
- $A_1^{i,j}, A_2^{i,j}, \dots, A_n^{i,j}$ sont indépendants. éléments distincts
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(A_k^{i,j}) = 1 - P(\overline{A_k^{i,j}}) = 1 - P(\overline{A_k^i} \cup \overline{A_k^j}) \stackrel{\text{de}}{=} 1 - P(\overline{A_k^i}) - P(\overline{A_k^j}) = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{2}{n}$.

$$\text{Alors } P(\{X_i = 1\} \cap \{X_j = 1\}) = P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k^{i,j}\right) = \prod_{k=1}^n P(A_k^{i,j}) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow P(\{X_i = 1\} \cap \{X_j = 1\}) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$.

$$\text{cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i) E(X_j) = P(X_i X_j = 1) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\text{cov}(X_i, X_j) = P(\{X_i = 1\} \cap \{X_j = 1\}) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}$$

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow \text{cov}(X_i, X_j) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}$$

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$

$$n \geq 3 ; \quad 1 - \frac{2}{n} \geq 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad \& \quad 1 - \frac{2}{n} < 1 ; \quad \frac{1}{3} \leq 1 - \frac{2}{n} < 1$$

$$1 - \frac{1}{n} \geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \& \quad 1 - \frac{1}{n} < 1 ; \quad \frac{2}{3} \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$$

$$\text{Alors } \frac{4}{9} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} < 1$$

$$\text{Finalement } \frac{1}{3} \leq 1 - \frac{2}{n} < 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 < 1$$

$$\text{Alors comme } n \text{ est strictement positif : } \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m < \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right)^m = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m}$$

$$\text{Donc } \text{cov}(X_i, X_j) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} < 0 ; \quad \text{cov}(X_i, X_j) \neq 0$$

$$\text{Si } (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \text{ et } i = j : \text{cov}(X_i, X_j) = V(X_i) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m\right] \neq 0$$

$$\text{car } \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m \notin \{0, 1\}.$$

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \text{cov}(X_i, X_j) \neq 0$$

Pour tout (i, j) dans $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

Q2 a) $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, E(X_i) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$

Par linéarité de l'espérance $E(W_n) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$

b) $V(W_n) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$

$$E(W_n) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$$

$$V(W_n) = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m\right] + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\left(1 - \frac{2}{n}\right)^m - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m}\right)$$

$$V(W_n) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m\right] + \underbrace{2 \binom{n}{2}}_{n(n-1)} \left[\left(1 - \frac{2}{n}\right)^m - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m}\right]$$

$$V(W_n) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m + (-n - n(n-1)) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} + n(n-1) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m$$

$$V(W_n) = n \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} + (n-1) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m\right]$$

$$c) E(W_n) - V(W_n) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m - n \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m - n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} + (n-1) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m \right].$$

$$E(W_n) - V(W_n) = n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} - n(n-1) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m = n^2 \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m \right].$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \geq 1 - \frac{2}{n} \geq 0.$$

$$\text{Donc } \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} \geq \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m.$$

$$\text{Et } 1 \geq 1 - \frac{1}{n} \text{ et } \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m \geq 0.$$

$$\text{Alors } \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m \geq 0.$$

$$\text{Donc } \underline{E(W_n) - V(W_n) \geq 0}.$$

Q3) On a $n \ln n + \theta n = m + \alpha_n$ où $\alpha_n \in [0, 1[$.

Ainsi $m = n \ln n + \theta n - \alpha_n$ où $\alpha_n \in [0, 1[$.

$$a) E(W_n) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m = n e^{m \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = e^{m \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ln n}.$$

$$m \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ln n = n \ln n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \theta n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \alpha_n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ln n.$$

$$m \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ln n = \ln n \left[n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 \right] + \theta n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \alpha_n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

$$\bullet \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$\text{Alors } \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sim -\frac{1}{2n^2}; \quad n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 \sim -\frac{1}{2n}; \quad \ln n \left[n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 \right] \sim -\frac{\ln n}{2n}.$$

$$\text{Par conséquent } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln n \left[n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 \right] \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln n}{2n} \right) = 0.$$

$$\circ \theta n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim \theta n \left(-\frac{1}{n}\right) = -\theta; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\theta n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right) = -\theta.$$

$$\blacktriangledown \alpha_n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{\alpha_n}{n}, \quad \alpha_n \in [0, 1[\text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0. \text{ Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\alpha_n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right) = 0.$$

Finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} (m h_n (1 - \frac{1}{n}) + h_n) = -\theta$. Par continuité de la fonction

exponentielle : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{m h_n (1 - \frac{1}{n}) + h_n} = e^{-\theta}$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(W_n) = e^{-\theta}$.

b) $E(W_n) - V(W_n) = n^2 \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \right]$

$$E(W_n) - V(W_n) = n^2 \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \right]$$

$$E(W_n) - V(W_n) = (E(W_n))^2 - e^{m h_n (1 - \frac{2}{n}) + 2 h_n + h_n (1 - \frac{1}{n})}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (E(W_n))^2 = e^{-2\theta}.$$

$$m h_n (1 - \frac{2}{n}) + 2 h_n = n h_n h_n (1 - \frac{2}{n}) + O(n h_n (1 - \frac{2}{n}) - \alpha_n h_n (1 - \frac{2}{n}) + 2 h_n).$$

$$n h_n (1 - \frac{2}{n}) + 2 h_n = n h_n \left[h_n (1 - \frac{2}{n}) + \frac{2}{n} \right] + O(n h_n (1 - \frac{2}{n}) - \alpha_n h_n (1 - \frac{2}{n})).$$

$$\rightarrow h_n (1 - \frac{2}{n}) + \frac{2}{n} = -\frac{2}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$h_n (1 - \frac{2}{n}) + \frac{2}{n} \sim -\frac{2}{n^2} ; n h_n \left[h_n (1 - \frac{2}{n}) + \frac{2}{n} \right] \sim -\frac{2 h_n}{n}.$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n h_n \left[h_n (1 - \frac{2}{n}) + \frac{2}{n} \right]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 h_n}{n} \right) = 0.$$

$$\Rightarrow O(n h_n (1 - \frac{2}{n})) \sim O(n (-\frac{2}{n^2})) = -2\theta ; \lim_{n \rightarrow +\infty} (O(n h_n (1 - \frac{2}{n}))) = -2\theta.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n (1 - \frac{1}{n}) = 0 \text{ et } \alpha_n \in [0, 1] \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (-\alpha_n h_n (1 - \frac{2}{n})) = 0.$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} (m h_n (1 - \frac{2}{n}) + 2 h_n) = 0 - 2\theta + 0 = -2\theta.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (m h_n (1 - \frac{2}{n}) + 2 h_n + h_n (1 - \frac{1}{n})) = -2\theta.$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{m h_n (1 - \frac{2}{n}) + 2 h_n + h_n (1 - \frac{1}{n})} = e^{-2\theta}.$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} (E(W_n) - V(W_n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left((E(W_n))^2 - e^{n\lambda(1-\frac{2}{n})+2\lambda n+\lambda(1-\frac{1}{n})} \right) = e^{-2\theta} - e^{-2\theta} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (E(W_n) - V(W_n)) = 0.$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} E(W_n) = e^{-\theta}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{f_n} = e^{\theta} > 1.$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} n\lambda(1, \frac{1}{f_n}) = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n - V(W_n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (E(W_n) - V(W_n)) = 0.$$

$$\text{A } \forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq |P(W_n = k) - P(T_n = k)| \leq n\lambda(1, \frac{1}{f_n}) (f_n - V(W_n)).$$

$$\text{Par conséquent on a : } \forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} (P(W_n = k) - P(T_n = k)) = 0.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(T_n = k) = \frac{f_n^k}{k!} e^{-f_n} \quad \text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = e^{-\theta}.$$

$$\text{Pour } \mu = e^{-\theta}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \text{ pour tout } k \text{ dans } \mathbb{N}.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (P(W_n = k) - P(T_n = k)) + P(T_n = k) = 0 + \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \text{ pour}$$

tout k dans $\mathbb{N}$.

$$\mu = e^{-\theta} > 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}.$$

La suite $(W_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\mu = e^{-\theta}$.

$$\textcircled{Q4} \text{ a) } E(\bar{T}_p) = E\left(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p T_i\right) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p E(T_i) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p f = f$$

• La loi faible des grands nombres montre que " $\bar{T}_p$ " converge en probabilité vers la variable certaine f

Ainsi $\bar{T}_p$ est un estimateur sans biais et convergent de f .

b) Posons $S_p = T_1 + T_2 + \dots + T_p$. La théorie de la limite centrale montre

que " $\frac{S_p - E(S_p)}{\sqrt{V(S_p)}}$ " converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

$$\frac{S_p - E(S_p)}{\sqrt{V(S_p)}} = \frac{p\bar{T}_p - pf}{\sqrt{pV(T_1)}} = p \frac{\bar{T}_p - f}{\sqrt{p} \sqrt{V(T_1)}} = \sqrt{p} \frac{\bar{T}_p - f}{\sqrt{f}} = U_p$$

Ainsi $(U_p)_{p \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

c) $(U_p)_{p \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire X qui suit la loi normale centrée réduite. Donc pour p assez grand $P(|U_p| \leq u) \stackrel{!!}{=} P(|X| \leq u) = P(-u \leq X \leq u)$.

Pour u assez grand $P(|U_p| \leq u) = P(X \leq u) - P(X \leq -u) = \Phi(u) - \Phi(-u) = 2\Phi(u) - 1$ ou Φ est la fonction de répartition de X et de U !!

$$P(U \geq u) = 1 - P(U < u) = 1 - P(U \leq u) = 1 - \Phi(u) \text{ et } P(U \geq u) = \alpha/2$$

$$\text{Alors } \alpha = 2(1 - \Phi(u)) = 1 - (2\Phi(u) - 1); \quad 2\Phi(u) - 1 = 1 - \alpha.$$

Donc pour p assez grand $P(|U_p| \leq u) = 1 - \alpha$

$$P(|U_p| \leq u) = P(-u \leq \sqrt{p} \frac{\bar{T}_p - f}{\sqrt{f}} \leq u) = P\left(\frac{\sqrt{p} \bar{T}_p - u\sqrt{f}}{\sqrt{p}} \leq f \leq \frac{\sqrt{p} \bar{T}_p + u\sqrt{f}}{\sqrt{p}}\right).$$

Ainsi $P \left(\bar{T}_p - \frac{u\sqrt{F}}{\sqrt{p}} \leq J \leq \bar{T}_p + \frac{u\sqrt{F}}{\sqrt{p}} \right) = 1 - \alpha.$

Notant que $\sqrt{F} = e^{\frac{\theta}{2}} \leq 1$ car $\theta \in \mathbb{R}_+$. Ainsi $-\frac{u}{\sqrt{p}} \leq -\frac{u\sqrt{F}}{p}$ et $\frac{u\sqrt{F}}{\sqrt{p}} \leq \frac{u}{\sqrt{p}}.$

l'événement $\left\{ \bar{T}_p - \frac{u\sqrt{F}}{\sqrt{p}} \leq J \leq \bar{T}_p + \frac{u\sqrt{F}}{\sqrt{p}} \right\}$ est contenu dans l'événement

$$\left\{ \bar{T}_p - \frac{u}{\sqrt{p}} \leq J \leq \bar{T}_p + \frac{u}{\sqrt{p}} \right\}.$$

Par conséquent $P \left(\bar{T}_p - \frac{u}{\sqrt{p}} \leq J \leq \bar{T}_p + \frac{u}{\sqrt{p}} \right) \geq 1 - \alpha.$

soit $P(J \in [\bar{T}_p - \frac{u}{\sqrt{p}}, \bar{T}_p + \frac{u}{\sqrt{p}}]) \geq 1 - \alpha.$

$[\bar{T}_p - \frac{u}{\sqrt{p}}, \bar{T}_p + \frac{u}{\sqrt{p}}]$ est un intervalle de confiance de J au risque $\alpha.$

PARTIE II

Q1 a) 1^{er} cas... $A = \emptyset$. $P(\pi \in A) = P(\pi \in \emptyset) = 0$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, on a $P(\{\pi \in A\} \cap \{\pi \leq k\}) \leq P(\pi \in A) = 0$.

$\uparrow \{\pi \in A\} \cap \{\pi \leq k\} \subset \{\pi \in A\}$

Finalement $f_A(0) = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_A(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^{-\lambda} [0 - 0 \times P(\pi \leq k)] = 0$.

Si $A = \emptyset$: $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_A(k) = 0$.

2^{ème} cas... $A = \mathbb{N}$. $P(\pi \in A) = P(\pi \in \mathbb{N}) = 1$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$\pi(k) = \mathbb{N}$

$P(\{\pi \in A\} \cap \{\pi \leq k\}) = P(\pi \leq k)$ car $A = \mathbb{N}$ et $\pi(k) = \mathbb{N}$

Alors $f_A(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^{-\lambda} [P(\pi \leq k) - 1 \times P(\pi \leq k)] = 0$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $f_A(k+1) = 0$ et $f_A(0) = 0$.

Si $A = \mathbb{N}$: $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_A(k) = 0$.

b) 1^{er} cas... $0 \in A$

$f_A(1) = f_A(0+1) = \frac{0!}{\lambda^{0+1}} e^{-\lambda} [P(\{\pi \in A\} \cap \{\pi \leq 0\}) - P(\pi \in A) \times P(\pi \leq 0)]$.

$0 \in A$ donc $P(\{\pi \in A\} \cap \{\pi \leq 0\}) = P(\pi = 0) = e^{-\lambda}$. $P(\pi \leq 0) = P(\pi = 0) = e^{-\lambda}$.

Alors $f_A(1) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} [e^{-\lambda} - P(\pi \in A) e^{-\lambda}] = \frac{1 - P(\pi \in A)}{\lambda}$.

Si $0 \in A$: $f_A(1) = \frac{1 - P(\pi \in A)}{\lambda} = \frac{P(\pi \in \bar{A})}{\lambda}$.

2^{ème} cas... $0 \in \bar{A}$. $P(\{\pi \in A\} \cap \{\pi \leq 0\}) = P(\{\pi \in A\} \cap \{\pi = 0\}) = P(\emptyset) = 0$.

Alors $f_A(1) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} [0 - P(\pi \in A) e^{-\lambda}] = - \frac{P(\pi \in A)}{\lambda}$.

Si $0 \in \bar{A}$: $f_A(1) = - \frac{P(\pi \in A)}{\lambda}$.

On suppose que 0 est adjoint à A.

$$f_n(2) = f_n(1+1) = \frac{1!}{\lambda^2} e^{-\lambda} [P(\{n \in A\} \cap \{n \leq 1\}) - P(n \in A) P(n \leq 1)] .$$

$0 \in A \text{ et } 1 \in A$

$$P(\{n \in A\} \cap \{n \leq 1\}) = P(\{n \in A\} \cap (\{n=0\} \cup \{n=1\})) = P(\{n=0\} \cup \{n=1\}) .$$

$$P(\{n \in A\} \cap \{n \leq 1\}) = P(n=0) + P(n=1) = e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = (1+\lambda)e^{-\lambda} .$$

$$P(n \leq 1) = P(n=0) + P(n=1) = (1+\lambda)e^{-\lambda} .$$

$$f_n(2) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^2} [(1+\lambda)e^{-\lambda} - P(n \in A)(1+\lambda)e^{-\lambda}] .$$

$$f_n(2) = \frac{1+\lambda}{\lambda^2} (1 - P(n \in A)) = \frac{1+\lambda}{\lambda^2} P(n \in \bar{A}) .$$

Q2) a) $P(n \in (A \cup B)) = P(\{n \in A\} \cup \{n \in B\}) = P(n \in A) + P(n \in B) .$
 Soit $k \in \mathbb{N}$. $A \cap B = \emptyset$

$$P((n \in A \cup B) \cap \{n \leq k\}) = P(\{n \in A\} \cup \{n \in B\} \cap \{n \leq k\}) .$$

$$P((n \in A \cup B) \cap \{n \leq k\}) = P(\{n \in A\} \cap \{n \leq k\} \cup \{n \in B\} \cap \{n \leq k\}) .$$

$$P((n \in A \cup B) \cap \{n \leq k\}) = P(\{n \in A\} \cap \{n \leq k\}) + P(\{n \in B\} \cap \{n \leq k\}) .$$

$$\text{Car } A \cap B = \emptyset \text{ donc } (\{n \in A\} \cap \{n \leq k\}) \cap (\{n \in B\} \cap \{n \leq k\}) = \emptyset .$$

$$\text{Alors } f_{A \cup B}(k+1) = \frac{k! e^{-\lambda}}{\lambda^{k+1}} [P(\{n \in A \cup B\} \cap \{n \leq k\}) - P(n \in A \cup B) P(n \leq k)] .$$

$$f_{A \cup B}(k+1) = \frac{k! e^{-\lambda}}{\lambda^{k+1}} [P(\{n \in A\} \cap \{n \leq k\}) + P(\{n \in B\} \cap \{n \leq k\}) - (P(n \in A) + P(n \in B)) P(n \leq k)]$$

$$f_{A \cup B}(k+1) = \frac{k! e^{-\lambda}}{\lambda^{k+1}} [P(\{n \in A\} \cap \{n \leq k\}) - P(n \in A) P(n \leq k)] + \frac{k! e^{-\lambda}}{\lambda^{k+1}} [P(\{n \in B\} \cap \{n \leq k\}) - P(n \in B) P(n \leq k)]$$

$$f_{A \cup B}(k+1) = f_A(k+1) + f_B(k+1) \text{ et ceci pour tout } k \text{ dans } \mathbb{N} .$$

$$\text{Or pour } f_{A \cup B}(0) = 0 = 0 + 0 = f_A(0) + f_B(0) . \text{ Finalement :}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, f_{A \cup B}(k) = f_A(k) + f_B(k) . \text{ Ainsi } \underline{\underline{f_{A \cup B} = f_A + f_B}} \text{ -- lorsque } A \cap B = \emptyset .$$

b) $A \cap \bar{A} = \emptyset$ donc a) donne $f_{A \cup \bar{A}} = f_A + f_{\bar{A}}$.

$$\text{Alors } \forall k \in \mathbb{N}, f_A(k) + f_{\bar{A}}(k) = f_{A \cup \bar{A}}(k) = f_{\mathbb{N}}(k) \underset{\text{P. 91 a)}}{=} 1 \quad \cdot \quad \forall k \in \mathbb{N}, f_{\bar{A}}(k) = 1 - f_A(k).$$

Finalement $f_{\bar{A}} = 1 - f_A$.

Q3) a) soit k un élément de $\mathbb{N}$.

$$\text{recal... } k=0. \quad \lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = \lambda f_A(1) - 0 \cdot f_A(0) = 1 \cdot f_A(1).$$

$$\text{Or pour } f_A(1) = \begin{cases} \frac{P(\pi \in \bar{A})}{\lambda} & \text{si } 0 \in A \\ -\frac{P(\pi \in A)}{\lambda} & \text{si } 0 \in \bar{A} \end{cases}$$

$$\text{donc } \lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = \lambda f_A(1) = \begin{cases} P(\pi \in \bar{A}) & \text{si } 0 \in A \quad (\text{ou si } k \in A) \\ -P(\pi \in A) & \text{si } 0 \in \bar{A} \quad (\text{ou si } k \in \bar{A}) \end{cases}$$

et pour $k \geq 1$.

$$\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = \lambda \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^{-\lambda} [P(\pi \in A \cap \{\pi \leq k\}) - P(\pi \in A) P(\pi \leq k)] \cdot \frac{k!}{\lambda^k} e^{-\lambda} \left[\right]$$

$$P(\pi \in A \cap \{\pi \leq k-1\}) - P(\pi \in A) P(\pi \leq k-1)].$$

$$\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = \frac{k!}{\lambda^k} e^{-\lambda} [P(\pi \in A \cap \{\pi \leq k\}) - P(\pi \in A \cap \{\pi \leq k-1\}) - P(\pi \in A) (P(\pi \leq k) - P(\pi \leq k-1))]$$

$$\cdot P(\pi \leq k) - P(\pi \leq k-1) = P(\pi = k).$$

$$\cdot P(\pi \in A \cap \{\pi \leq k\}) = P(\pi \in A \cap \{\pi = k\}) + P(\pi \in A \cap \{\pi \leq k-1\}).$$

$$\text{Ainsi } \lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = \frac{k!}{\lambda^k} e^{-\lambda} [P(\pi \in A \cap \{\pi = k\}) - P(\pi \in A) P(\pi = k)]. \text{ Distinguer deux cas}$$

$$\rightarrow k \in A. \text{ Alors } P(\pi \in A \cap \{\pi = k\}) = P(\pi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}; \quad \frac{k!}{\lambda^k} e^{-\lambda} P(\pi = k) = 1.$$

$$\text{Donc } \lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = \frac{k!}{\lambda^k} e^{-\lambda} P(\pi = k) (1 - P(\pi \in A)) = 1 - P(\pi \in A) = P(\pi \in \bar{A}).$$

$$\rightarrow k \in \bar{A}. \text{ Alors } P(\pi \in A \cap \{\pi = k\}) = 0.$$

Donc $\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = \frac{k! e^{-\lambda}}{\lambda^k} [-P(\pi \in A) P(\pi = k)] = -P(\pi \in A).$

Finalement $\forall k \in \mathbb{N}, \lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = \begin{cases} P(\pi \in \bar{A}) & \text{si } k \in A \\ -P(\pi \in A) & \text{si } k \in \bar{A} \end{cases}.$

b) $A \in \mathcal{G}(\mathbb{N}), A \neq \emptyset$ et $A \neq \mathbb{N}$. Alors $A \neq \emptyset$ et $\bar{A} \neq \emptyset$

$P(\pi \in A) = \sum_{k \in A} P(\pi = k) = \sum_{k \in A} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} > 0$, de même $P(\pi \in \bar{A}) > 0$.

Alors $\lambda f_A(0+1) - 0 f_A(0) \neq 0$; $\lambda f_A(1) \neq 0$; $f_A(1) \neq 0$. f_A n'est pas identiquement nulle.

Si $A \in \mathcal{G}(\mathbb{N}) - \{\emptyset, \mathbb{N}\}$, f_A n'est pas identiquement nulle.

Q4 Ici $j \in \mathbb{N}^*$. $k \in \mathbb{N}$ et on a $k \in \mathbb{N}^*$ comme le propose le b) k !

a) soit $k \in \mathbb{N}$. $f_j(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^{-\lambda} [P(\pi \in \{j\} \cap \{\pi \leq k\}) - P(\pi \in \{j\}) P(\pi \leq k)]$.

$f_j(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^{-\lambda} [P(\pi = j) \cap \{\pi \leq k\}] - P(\pi = j) P(\pi \leq k)]$.

Notons que $P(\pi = j) = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}$ et $P(\pi = j \cap \{\pi \leq k\}) = \begin{cases} P(\pi = j) & \text{si } j \leq k \\ 0 & \text{si } j > k \end{cases}$

$\rightarrow j \leq k$. $f_j(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^{-\lambda} P(\pi = j) (1 - P(\pi \leq k)) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} P(\pi \geq k+1)$.

$f_j(k+1) = \frac{k!}{j! \lambda^{k+1-j}} P(\pi \geq k+1)$.

$\rightarrow j > k$ $f_j(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^{-\lambda} (-P(\pi = j) P(\pi \leq k)) = -\frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} P(\pi \leq k)$.

$f_j(k+1) = -\frac{k!}{j! \lambda^{k+1-j}} P(\pi \leq k)$.

$\forall k \in \mathbb{N}, f_j(k+1) = \begin{cases} \frac{k!}{j! \lambda^{k+1-j}} P(\pi \geq k+1) & \text{si } k \geq j \\ -\frac{k!}{j! \lambda^{k+1-j}} P(\pi \leq k) & \text{si } k < j \end{cases}$

$$b) \quad j \geq j \quad \text{and} \quad f_j(j+1) = \frac{j!}{j! \lambda^{j+1}} P(\pi \geq j+1) = \frac{1}{\lambda} P(\pi \geq j+1).$$

$$0 \leq j-1 < j \quad \text{and} \quad f_j(j) = f_j((j-1)+1) = - \frac{(j-1)!}{j! \lambda^{j-j+1}} P(\pi \leq j-1) = - \frac{1}{j} P(\pi \leq j-1).$$

$$\text{Alors} \quad f_j(j+1) - f_j(j) = \frac{1}{\lambda} P(\pi \geq j+1) + \frac{1}{j} P(\pi \leq j-1)$$

$$\text{Or} \quad \frac{1}{\lambda} > 0, \quad P(\pi \geq j+1) > 0, \quad \frac{1}{j} > 0 \quad \text{et} \quad P(\pi \leq j-1) > 0. \text{ Ainsi } f_j(j+1) - f_j(j) > 0.$$

$$f_j(j+1) - f_j(j) = \frac{1}{\lambda} P(\pi \geq j+1) + \frac{1}{j} P(\pi \leq j-1) \quad \text{et} \quad f_j(j+1) - f_j(j) > 0.$$

$$c) \quad \text{Soit } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } k \neq j.$$

$$\square \text{ Supposons } k > j. \text{ Alors } k-j \geq j.$$

Remarque. Si $j=0$:

$$f_j(j+1) - f_j(j) = f_0(1) = \frac{1}{\lambda} P(\pi \geq 1) > 0.$$

$$f_j(k+1) - f_j(k) = f_j(k+1) - f_j((k-1)+1) = \frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} P(\pi \geq k+1) - \frac{(k-1)!}{j! \lambda^{k-1-j+1}} P(\pi \geq k).$$

$$f_j(k+1) - f_j(k) = \frac{(k-1)!}{j! \lambda^{k-j+1}} [k P(\pi \geq k+1) - \lambda P(\pi \geq k)].$$

$$\text{Ainsi } f_j(k+1) - f_j(k) \text{ est du signe de } k P(\pi \geq k+1) - \lambda P(\pi \geq k).$$

Lemme 1. Pour tout r dans $\mathbb{N}$, $r P(\pi \geq r+1) - \lambda P(\pi \geq r) < 0$.

$$\text{Soit } r \in \mathbb{N}; \quad r P(\pi \geq r+1) - \lambda P(\pi \geq r) = r \sum_{i=r+1}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} - \lambda \sum_{i=r}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}.$$

$$r P(\pi \geq r+1) - \lambda P(\pi \geq r) = \sum_{i=r+1}^{+\infty} r \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} - \sum_{i=r}^{+\infty} \frac{\lambda^{i+1}}{i!} e^{-\lambda} = \left[\sum_{i=r+1}^{+\infty} r \frac{\lambda^i}{i!} - \sum_{i=r+1}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} \right] e^{-\lambda}.$$

$$r P(\pi \geq r+1) - \lambda P(\pi \geq r) = e^{-\lambda} \sum_{i=r+1}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} (r-i) < 0$$

$\uparrow \quad \forall i \in [r+1, +\infty[, \quad r-i < 0$

$$\text{En particulier } k P(\pi \geq k+1) - \lambda P(\pi \geq k) < 0.$$

$$\text{Ainsi } f_j(k+1) - f_j(k) < 0.$$

□ $k < j$. Alors $0 \leq k-1 < j$.

$$f_j(k+1) - f_j(k) = f_j(k+1) - f_j(k-1+1) = -\frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} P(n \leq k) + \frac{(k-1)!}{j! \lambda^{k-1-j+1}} P(n \leq k-1).$$

$$f_j(k+1) - f_j(k) = \frac{(k-1)!}{j! \lambda^{k-j+1}} [\lambda P(n \leq k-1) - k P(n \leq k)].$$

$f_j(k+1) - f_j(k)$ a le même signe que $\lambda P(n \leq k-1) - k P(n \leq k)$.

Lemma 2. $\forall r \in \mathbb{N}^0, \lambda P(n \leq r-1) - r P(n \leq r) \leq -r e^{-\lambda}$.

Soit $r \in \mathbb{N}^0$. $\lambda P(n \leq r-1) - r P(n \leq r) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} - \sum_{i=0}^r r \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$.

$$\lambda P(n \leq r-1) - r P(n \leq r) = \sum_{i=1}^r \frac{\lambda^i}{(i-1)!} e^{-\lambda} - \sum_{i=0}^r r \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = -r e^{-\lambda} - \sum_{i=1}^r \frac{\lambda^i}{i!} (r-i) e^{-\lambda}$$

$$\lambda P(n \leq r-1) - r P(n \leq r) \leq -r e^{-\lambda} \quad \text{car} \quad \sum_{i=1}^r \frac{\lambda^i}{i!} (r-i) e^{-\lambda} \geq 0 \quad \text{puisque}$$

$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \frac{\lambda^i}{i!} (r-i) e^{-\lambda} \geq 0$. Ceci achève la démonstration du Lemma 2.

$$\text{Alors} \quad \lambda P(n \leq k-1) - k P(n \leq k) \leq -k e^{-\lambda} < 0 \quad (k \in \mathbb{N}^0)$$

$$\text{D'où} \quad f_j(k+1) - f_j(k) < 0.$$

Finalement $\forall k \in \mathbb{N}^0 - \{j\}, f_j(k+1) - f_j(k) < 0$.

$$P(n \leq 0) = P(n=0) = e^{-\lambda}$$

Remarque... $f_j(0+1) - f_j(0) = f_j(0+1) - \underbrace{f_j(0)}_{0 \leq j} = -\frac{0!}{j! \lambda^{0-j+1}} P(n \leq 0) = -\frac{\lambda^{j-1}}{j!} e^{-\lambda} < 0$.

$$\text{Ainsi} \quad \forall k \in \mathbb{N} - \{j\}, f_j(k+1) - f_j(k) < 0 \quad \text{et} \quad f_j(j+1) - f_j(j) > 0.$$

Alors pour tout k dans $\mathbb{N}$ $f_j(k+1) - f_j(k) > 0$ (resp. $f_j(k+1) - f_j(k) \geq 0$) si et

seulement si $k = j$ et ceci pour tout $j \in \mathbb{N}^0$.

d) Nous avons que $f_j(j+1) - f_j(j) = \frac{1}{\lambda} P(\pi \geq j+1) + \frac{1}{j} P(\pi \leq j-1)$.

Le lemme 2 donne $\lambda P(\pi \leq j-1) - j P(\pi \leq j) \leq -j e^{-\lambda}$.

Alors $\lambda P(\pi \leq j-1) \leq j (P(\pi \leq j) - e^{-\lambda})$; $\frac{1}{j} P(\pi \leq j-1) \leq \frac{1}{\lambda} (P(\pi \leq j) - e^{-\lambda})$.

Donc $f_j(j+1) - f_j(j) \leq \frac{1}{\lambda} P(\pi \geq j+1) + \frac{1}{\lambda} (P(\pi \leq j) - e^{-\lambda}) = \frac{1}{\lambda} [\underbrace{P(\pi \geq j+1) + P(\pi \leq j)}_{=1} - e^{-\lambda}]$

$f_j(j+1) - f_j(j) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$.

$\lambda > 0$ et $-e^{-\lambda} < 0$ donc $\frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} < \frac{1}{\lambda}$.

Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x+1$ (l'inégalité de convergence classique).

Alors $e^{-\lambda} \geq -\lambda + 1$; $\lambda \geq 1 - e^{-\lambda}$; $1 \geq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$.

Ainsi $\frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} < \frac{1}{\lambda}$ et $\frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \leq 1$; $\frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \leq \min(1, \frac{1}{\lambda})$.

Finalement $f_j(j+1) - f_j(j) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \leq \min(1, \frac{1}{\lambda})$.

(5) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $f_0(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^{\lambda} [P(\pi=0) + P(\pi \leq k)] - P(\pi=0) P(\pi \leq k)$.

$f_0(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^{\lambda} [P(\pi=0) - P(\pi=0) P(\pi \leq k)]$.

$f_0(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^{\lambda} \underbrace{P(\pi=0)}_{=1} (1 - P(\pi \leq k)) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} P(\pi \geq k+1)$.

Au même titre que $f_0(k) = \frac{(k-1)!}{\lambda^k} P(\pi \geq k)$.

Alors $f_0(k+1) - f_0(k) = \frac{(k-1)!}{\lambda^{k+1}} [k P(\pi \geq k+1) - \lambda P(\pi \geq k)] \leq 0$ lemme 1

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f_0(k+1) - f_0(k) \leq 0$.

Récapitulons : $f_0(0+1) - f_0(0) = f_0(1) = \frac{1}{\lambda} P(\pi \in \overline{\{0\}}) = \frac{1}{\lambda} P(\pi \in \mathbb{N}^*) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} > 0$.

Ainsi f_0 est croissante de $\mathbb{N}^*$ à $\mathbb{N}$ et d) est vérifiée car pour $j=0$.

Q6 a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\forall j \in \mathbb{N}$, $f_j(k+1) - f_j(k)$ est strictement négatif pour $j \neq k$ et strictement positif pour $j = k$.

Notons que $f_A(k+1) - f_A(k) \leq f_k(k+1) - f_k(k)$.

* Si A est vide c'est évident car $f_A(k+1) - f_A(k) = 0 - 0 = 0 \leq f_k(k+1) - f_k(k)$.

Supposons A non vide.

* Si $A = \{k\}$ c'est encore évident car $f_A(k+1) - f_A(k) = f_k(k+1) - f_k(k)$.

* Supposons alors $A \neq \emptyset$, $A \neq \{k\}$ et A finie.

1^{er} cas... $k \notin A$. Soit $j_1, j_2, \dots, j_r$ les éléments distincts de A .

$$f_A = f_{\{j_1, j_2, \dots, j_r\}} = f_{\{j_1\} \cup \{j_2\} \cup \dots \cup \{j_r\}} = \sum_{i=1}^r f_{j_i}.$$

$$\text{Alors } f_A(k+1) - f_A(k) = \sum_{i=1}^r (f_{j_i}(k+1) - f_{j_i}(k)) \underset{\substack{\uparrow \\ \forall i \in \{1, \dots, r\}, j_i \neq k}}{< 0} < f_k(k+1) - f_k(k).$$

2^{ème} cas... $k \in A$. Alors $A' = \{k\}$ est une partie non vide ne contenant pas k .

Ainsi $f_{A'}(k+1) - f_{A'}(k) < 0$ (même démonstration que dans le 1^{er} cas...)

$$A = A' \cup \{k\} \text{ et } A' \cap \{k\} = \emptyset \text{ donc } f_A = f_{A'} + f_{\{k\}} = f_{A'} + f_k.$$

$$f_A(k+1) - f_A(k) = \underbrace{f_{A'}(k+1) - f_{A'}(k)}_{< 0} + f_k(k+1) - f_k(k) \leq f_k(k+1) - f_k(k).$$

$$\text{Ainsi } \forall k \in \mathbb{N}, f_A(k+1) - f_A(k) \leq f_k(k+1) - f_k(k).$$

* Supposons A infinie. A est une partie de $\mathbb{N}$, A est donc dénombrable.

A est en bijection avec $\mathbb{N}$. Soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ sur A .

Pour $j \in \mathbb{N}$, $a_j = \varphi(j)$.

Soit $i \in \mathbb{N}$.

$$P(\{n \in A\} \cap \{n \leq i\}) = P\left(\bigcup_{j=0}^{+\infty} \{n \in \{a_j\}\} \cap \{n \leq i\}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{incompatibilité}}}{=} \sum_{j=0}^{+\infty} P(\{n \in \{a_j\}\} \cap \{n \leq i\}).$$

De même $P(\{n \in A\}) = P\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} \{n \in (a_j)\}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} P(\{n \in (a_j)\})$.

Alors $f_A(i+1) = \frac{i!}{\lambda^{i+1}} e^{\lambda} \left[\sum_{j=0}^{\infty} P(\{n \in (a_j)\} \cap \{n \leq i\}) - \left(\sum_{j=0}^{\infty} P(\{n \in (a_j)\}) \right) P(n \leq i) \right]$

donc $f_A(i+1) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{i!}{\lambda^{i+1}} e^{\lambda} \left(P(n \in (a_j) \cap \{n \leq i\}) - P(\{n \in (a_j)\}) P(n \leq i) \right) \right]$

$f_A(i+1) = \sum_{j=0}^{\infty} f_{(a_j)}(i+1)$. Ceci pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Par $\forall i \in \mathbb{N}^0$, $f_0(i) = \sum_{j=0}^{\infty} f_{(a_j)}(i)$. Ceci est vrai pour $i=0$.

Finalement $\forall i \in \mathbb{N}$, $f_A(i) = \sum_{j=0}^{\infty} f_{(a_j)}(i)$. Démontrons alors le résultat demandé.

1^{er} cas... $k \notin A$. $\forall j \in \mathbb{N}$, $k \neq a_j$; $\forall j \in \mathbb{N}$, $f_{(a_j)}(k+1) - f_{(a_j)}(k) < 0$.

Alors $f_A(k+1) - f_A(k) = \sum_{j=0}^{\infty} (f_{(a_j)}(k+1) - f_{(a_j)}(k)) < 0 < f_k(k+1) - f_k(k)$.

2^{ème} cas... $k \in A$. $\exists ! j_0 \in \mathbb{N}$, $k = a_{j_0}$.

Alors $f_A(k+1) - f_A(k) = \sum_{j=0}^{\infty} (f_{(a_j)}(k+1) - f_{(a_j)}(k))$

$f_A(k+1) - f_A(k) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq j_0}}^{\infty} (f_{(a_j)}(k+1) - f_{(a_j)}(k)) + (f_{(a_{j_0})}(k+1) - f_{(a_{j_0})}(k)) < f_{(a_{j_0})}(k+1) - f_{(a_{j_0})}(k)$

$f_A(k+1) - f_A(k) < f_{(a_{j_0})}(k+1) - f_{(a_{j_0})}(k) = f_k(k+1) - f_k(k)$.

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_A(k+1) - f_A(k) \leq f_k(k+1) - f_k(k)$ et ceci pour toute partie A de $\mathbb{N}$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. 1^{er} cas... $f_A(k+1) - f_A(k) \geq 0$.

$|f_A(k+1) - f_A(k)| = f_A(k+1) - f_A(k) \leq f_k(k+1) - f_k(k) \leq n_k(1, \frac{1}{\lambda})$.

2^{ème} cas... $f_A(k+1) - f_A(k) \leq 0$. Rappelons que $f_A = -f_{\bar{A}}$.

$|f_A(k+1) - f_A(k)| = f_A(k) - f_A(k+1) = f_{\bar{A}}(k+1) - f_{\bar{A}}(k) \leq f_k(k+1) - f_k(k) \leq n_k(1, \frac{1}{\lambda})$.

CLJ $\forall k \in \mathbb{N}$, $|f_A(k+1) - f_A(k)| \leq n_k(1, \frac{1}{\lambda})$ donc $\sup_{k \geq 0} |f_A(k+1) - f_A(k)|$ existe et majoré par $n_k(1, \frac{1}{\lambda})$.

PARTIE III

(Q1) a) Notons que $\forall \omega \in \Omega$, $\chi_i(\omega) f(W_n(\omega)) = \chi_i(\omega) f(1+R_i(\omega))$.

Soit $\omega \in \Omega$. Si $\chi_i(\omega) = 0$ l'égalité précédente est vraie.

Supposons que $\chi_i(\omega) = 1$.

$$\chi_i(\omega) f(W_n(\omega)) = f(W_n(\omega)) = f(\chi_i(\omega) + R_i(\omega)) = f(1+R_i(\omega)) = \chi_i(\omega) f(1+R_i(\omega)).$$

Finalement $\forall \omega \in \Omega$, $\chi_i(\omega) f(W_n(\omega)) = \chi_i(\omega) f(1+R_i(\omega))$. $\chi_i f(W_n) = \chi_i f(1+R_i)$.

b) $\chi_i f(W_n) = \chi_i f(1+R_i)$ est une variable aléatoire du type fût-elle due à une expérience. Pour les mêmes raisons χ_i et $f(1+R_i)$ possèdent une expérience.

Ainsi $E(\chi_i f(W_n)) = E(\chi_i f(1+R_i))$.

$1+R_i = 1 + \sum_{k=1}^n \chi_k R_k$, ainsi $f(1+R_i)$ est une fonction de variables aléatoires

$\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{i-1}, \chi_{i+1}, \dots, \chi_n$. Or $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ sont indépendantes; par conséquent

χ_i et $f(1+R_i)$ sont indépendantes. Ainsi $E(\chi_i f(1+R_i)) = E(\chi_i) E(f(1+R_i))$.

Notons que $E(\chi_i) = P(\chi_i = 1) = p_i$.

Finalement $E(\chi_i f(W_n)) = p_i E(f(1+R_i))$.

(Q2) $\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n) = \sum_{i=1}^n p_i f(1+W_n) - \sum_{i=1}^n \chi_i f(W_n)$. Par linéarité de l'espérance:

$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^n p_i E(f(1+W_n)) - \sum_{i=1}^n E(\chi_i f(W_n))$$

$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^n p_i E(f(1+W_n)) - \sum_{i=1}^n p_i E(f(1+R_i))$$

$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^n p_i E[f(1+W_n) - f(1+R_i)] = \sum_{i=1}^n p_i E(\chi_i)$$

$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^n p_i E(\chi_i)$

(Q3) a) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$P_{\{K_i=1\}}(Y_i=\alpha) = \frac{P(\{K_i=1\} \cap \{Y_i=\alpha\})}{P(K_i=1)} = \frac{P(\{K_i=1\} \cap \{f(t+R_i) - f(u+R_i) = \alpha\})}{P(K_i=1)}$$

$$P_{\{K_i=1\}}(Y_i=\alpha) = \frac{1}{P(K_i=1)} \times P(\{K_i=1\} \cap \{f(t+R_i) - f(u+R_i) = \alpha\})$$

Or K_i et $f(t+R_i) - f(u+R_i)$ sont indépendantes donc

$$P_{\{K_i=1\}}(Y_i=\alpha) = \frac{1}{P(K_i=1)} P(K_i=1) P(f(t+R_i) - f(u+R_i) = \alpha) = P(f(t+R_i) - f(u+R_i) = \alpha)$$

Notons que $P_{\{K_i=1\}}(Y_i=\alpha) = 0 \Leftrightarrow P(f(t+R_i) - f(u+R_i) = \alpha) = 0$. $\blacktriangle$

$$\text{Ainsi } E(Y_i / \{K_i=1\}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{Y}_i(\Omega)} \alpha P_{\{K_i=1\}}(Y_i=\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathcal{Y}_i(\Omega)} \alpha P(f(t+R_i) - f(u+R_i) = \alpha)$$

$$\text{D'où } E(Y_i / \{K_i=1\}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{Y}_i(\Omega)} \alpha P(f(t+R_i) - f(u+R_i) = \alpha) = \sum_{\alpha \in (f(t+R_i) - f(u+R_i))(\Omega)} \alpha P(f(t+R_i) - f(u+R_i) = \alpha)$$

$$\underline{\underline{E(Y_i / \{K_i=1\}) = E(f(t+R_i) - f(u+R_i)) \text{ pour tout } i \text{ dans } \llbracket 1, n \rrbracket.}}$$

b) un raisonnement rigoureusement analogue donne :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, E(Y_i / \{K_i=0\}) = E(f(t+R_i) - f(u+R_i)) = 0.$$

$$\underline{\underline{\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, E(Y_i / \{K_i=0\}) = 0.}}$$

$$c) \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, E(Y_i) = P(K_i=0) E(Y_i / \{K_i=0\}) + P(K_i=1) E(Y_i / \{K_i=1\})$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, E(Y_i) = p_i E(f(t+R_i) - f(u+R_i))$$

$$E(\lambda_n f(t+W_n) - W_n f(u+W_n)) = \sum_{i=1}^n p_i E(Y_i) = \sum_{i=1}^n p_i^2 E(f(t+R_i) - f(u+R_i))$$

$$\underline{\underline{E(\lambda_n f(t+W_n) - W_n f(u+W_n)) = \sum_{i=1}^n p_i^2 E(f(t+R_i) - f(u+R_i)).}}$$

$$(Q4) |E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n))| = \left| \sum_{i=1}^n p_i^2 E(f(1+e_i) - f(1+e_i)) \right| :$$

$$|E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n))| \leq \sum_{i=1}^n p_i^2 |E(f(1+e_i) - f(1+e_i))|.$$

Soit $\omega \in \Omega$. $|f(1+e_i(\omega)) - f(1+e_i(\omega))| \leq \min(1, \frac{1}{\lambda_n})$ d'après Q6 b).

Pour toute réalisation des écritures $\delta_n = n \min(1, \frac{1}{\lambda_n})$.

$$\forall \omega \in \Omega, -\delta_n \leq f(1+e_i(\omega)) - f(1+e_i(\omega)) \leq \delta_n.$$

Map la covariance de l'espérance donne :

$$-\delta_n \leq E(f(1+e_i) - f(1+e_i)) \leq \delta_n$$

$$\text{Ainsi } |E(f(1+e_i) - f(1+e_i))| \leq \delta_n = n \min(1, \frac{1}{\lambda_n}).$$

$$\text{Par conséquent } |E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n))| \leq \min(1, \frac{1}{\lambda_n}) \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

(Q5) la relation de transfert donne :

$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{k=0}^n (\lambda_n f(1+k) - k f(k)) P(W_n = k).$$

$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{k \in \Omega_0 \cap \bar{A}} P(\pi_n \in \bar{A}) P(W_n = k) - \sum_{k \in \Omega_0 \cap A} P(\pi_n \in A) P(W_n = k), \text{ d'après } \text{I} \text{ Q3 e)}$$

$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = P(\pi_n \in \bar{A}) P(W_n \in A) - P(\pi_n \in A) P(W_n \in \bar{A})$$

$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = P(\pi_n \in \bar{A}) P(W_n \in A) - P(\pi_n \in A) (1 - P(W_n \in A))$$

$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = (P(\pi_n \in \bar{A}) + P(\pi_n \in A)) P(W_n \in A) - P(\pi_n \in A)$$

$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = P(W_n \in A) - P(\pi_n \in A).$$

$$\text{Q4 donne alors } |P(W_n \in A) - P(\pi_n \in A)| \leq \min(1, \frac{1}{\lambda_n}) \sum_{i=1}^n p_i^2 \text{ pour toute partie}$$

A de Ω .

Q6) a) $\lambda_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i}{n}}$

$\varphi : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est continue sur $[0,1]$ donc $(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \varphi(\frac{i}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge

vers $\int_0^1 \varphi(t) dt$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = \int_0^1 \varphi(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = \ln 2$

$0 \leq \sum_{i=1}^n p_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n+i)^2} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{(n+1)^2} = 0$.

et par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n p_i^2 = 0$

b) soit $k \in \mathbb{N}$. D'après Q5 $|P(W_n = k) - P(\pi_n = k)| \leq \min(1, \frac{1}{\lambda_n}) \sum_{i=1}^n p_i^2$

Ainsi : $0 \leq |P(W_n = k) - P(\pi_n = k)| \leq \min(1, \frac{1}{\lambda_n}) \sum_{i=1}^n p_i^2$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = \ln 2 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \frac{1}{\ln 2} > 1$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \min(1, \frac{1}{\lambda_n}) = 1$.

Pour conclure $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\min(1, \frac{1}{\lambda_n}) \sum_{i=1}^n p_i^2 \right) = 1 \times 0 = 0$

Pour conclure par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} (P(W_n = k) - P(\pi_n = k)) = 0$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\pi_n = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n} = \frac{(\ln 2)^k}{k!} e^{-\ln 2}$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} ((P(W_n = k) - P(\pi_n = k)) + P(\pi_n = k)) = 0 + \frac{(\ln 2)^k}{k!} e^{-\ln 2}$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n = k) = \frac{(\ln 2)^k}{k!} e^{-\ln 2}$. la suite $(W_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une

variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\ln 2$.

PARTIE IV

Soit $\varepsilon > 0$

Q1) a) Si λ_i prend la valeur 0, $\lambda_i f(W_n)$ prend la valeur 0.

$$\text{Ainsi } E(\lambda_i f(W_n) | \lambda_i = 0) = 0.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$!!

$$P_{\{\lambda_i=1\}}(\lambda_i f(W_n) = \alpha) = \frac{P(\{\lambda_i=1\} \cap \{\lambda_i f(W_n) = \alpha\})}{P(\lambda_i=1)} = \frac{1}{P(\lambda_i=1)} P(\{\lambda_i=1\} \cap \{\lambda_i f(1+R_i) = \alpha\})$$

$$P_{\{\lambda_i=1\}}(\lambda_i f(W_n) = \alpha) = \frac{1}{P(\lambda_i=1)} P(\{\lambda_i=1\} \cap \{f(1+R_i) = \alpha\}) = P_{\{\lambda_i=1\}}(f(1+R_i) = \alpha).$$

Ainsi la loi de $\lambda_i f(W_n)$ sachant que $\lambda_i=1$ est la même que la loi de $f(1+R_i)$ sachant que $\lambda_i=1$.

$$\text{Ainsi } E(\lambda_i f(W_n) | \{\lambda_i=1\}) = E(f(1+R_i) | \{\lambda_i=1\})$$

$$\text{Donc } E(\lambda_i f(W_n)) = \underbrace{P(\lambda_i=1)}_{p_i} E(\lambda_i f(W_n) | \{\lambda_i=1\}) + \underbrace{P(\lambda_i=0)}_{1-p_i} E(\lambda_i f(W_n) | \{\lambda_i=0\})$$

$$\text{Donc } \forall i \in \{1, n\}, E(\lambda_i f(W_n)) = p_i E(f(1+R_i) | \{\lambda_i=1\}).$$

b) Comme dans III §5 a.a: $P(W_n \in A) - P(\pi_n \in A) = E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)).$

$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = E\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f(1+W_n) - \sum_{i=1}^n \lambda_i f(W_n)\right) = E\left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i f(1+W_n) - \lambda_i f(W_n))\right).$$

$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^n (p_i E(f(1+W_n)) - E(\lambda_i f(W_n))).$$

$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^n p_i [E(f(1+W_n)) - E(f(1+R_i) | \{\lambda_i=1\})].$$

$$\text{Ainsi } P(W_n \in A) - P(\pi_n \in A) = \sum_{i=1}^n p_i [E(f(1+W_n)) - E(f(1+R_i) | \{\lambda_i=1\})].$$

Q2) a) soit $(e, j) \in \mathbb{N}^2$. Supposons $e \leq j$.

Si $e = j$: $|f(e) - f(j)| = 0 \leq 0 \wedge \min(1, \frac{1}{\lambda_n}) = |e - j| \min(1, \frac{1}{\lambda_n})$. Supposons donc $e < j$.

$$|f(e) - f(j)| = \left| \sum_{k=e}^{j-1} (f(k+1) - f(k)) \right| \leq \sum_{k=e}^{j-1} |f(k+1) - f(k)| \leq \sum_{k=e}^{j-1} \min(1, \frac{1}{\lambda_n}) = (j-e) \min(1, \frac{1}{\lambda_n})$$

$$|f(e) - f(j)| \leq (j-e) \min(1, \frac{1}{\lambda_n}) = |j-e| \min(1, \frac{1}{\lambda_n}) = |e-j| \min(1, \frac{1}{\lambda_n}).$$

$$\forall (e, j) \in \mathbb{N}^2, e \leq j \Rightarrow |f(e) - f(j)| \leq |e-j| \min(1, \frac{1}{\lambda_n}).$$

Soit $(e, j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $e > j$. Alors $j < e$!

$$\text{Ainsi } |f(e) - f(j)| = |f(j) - f(e)| \leq (j-e) \min(1, \frac{1}{\lambda_n}) = |e-j| \min(1, \frac{1}{\lambda_n}).$$

$$\forall (j, e) \in \mathbb{N}^2, |f(e) - f(j)| \leq |e-j| \min(1, \frac{1}{\lambda_n}).$$

$$|P(W_n \in A) - P(\pi_n \in A)| = \left| \sum_{i=1}^n p_i \left[E(f(1+W_n)) - E(f(1+R_i) / \mathcal{A}_{R_i=1}) \right] \right|.$$

$$|P(W_n \in A) - P(\pi_n \in A)| \leq \sum_{i=1}^n p_i \left| E(f(1+W_n)) - E(f(1+R_i) / \mathcal{A}_{R_i=1}) \right|.$$

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La propriété de transfert donne :

$$E(f(1+R_i) / \mathcal{A}_{R_i=1}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_i(\mathbb{R})} f(1+\alpha) P_{\{R_i=1\}}(R_i=\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathcal{Z}_i(\mathbb{R})} f(1+\alpha) P(Z_i=\alpha)$$

$$\text{Ainsi } E(f(1+R_i) / \mathcal{A}_{R_i=1}) = E(f(1+Z_i)).$$

$$\text{Alors } |E(f(1+W_n)) - E(f(1+R_i) / \mathcal{A}_{R_i=1})| = E(|f(1+W_n) - f(1+Z_i)|)$$

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad |f(1+W_n(\omega)) - f(1+Z_i(\omega))| \leq |1+W_n(\omega) - (1+Z_i(\omega))| \min(1, \frac{1}{\lambda_n}).$$

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \min(1, \frac{1}{\lambda_n}) |W_n(\omega) - Z_i(\omega)| \leq |f(1+W_n(\omega)) - f(1+Z_i(\omega))| \leq \min(1, \frac{1}{\lambda_n}) |W_n(\omega) - Z_i(\omega)|$$

$$\text{d'où } \min(1, \frac{1}{\lambda_n}) |W_n - Z_i| \leq |f(1+W_n) - f(1+Z_i)| \leq \min(1, \frac{1}{\lambda_n}) |W_n - Z_i|.$$

Par convexité de l'espérance il vient :

$$\max(1, \frac{1}{\lambda_n}) E(|W_n - Z_i|) \leq E(f(1+W_n) - f(1+Z_i)) \leq \max(1, \frac{1}{\lambda_n}) E(|W_n - Z_i|).$$

d'où $|E(f(1+W_n)) - E(f(1+Z_i))| \leq \max(1, \frac{1}{\lambda_n}) E(|W_n - Z_i|)$. Ainsi :

$$|E(f(1+W_n)) - E(f(1+Z_i) / (K_i=1))| \leq \max(1, \frac{1}{\lambda_n}) E(|W_n - Z_i|) \text{ pour tout } i \in \{1, n\}$$

$$\text{Alors } \sum_{i=1}^n p_i |E(f(1+W_n)) - E(f(1+Z_i) / (K_i=1))| \leq \max(1, \frac{1}{\lambda_n}) \sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|).$$

$$\text{Finalement } |P(W_n \in A) - P(K_n \in A)| \leq \max(1, \frac{1}{\lambda_n}) \sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|).$$

soit $i \in \{1, n\}$

$$b) \forall \omega \in \Omega, W_n(\omega) \geq Z_i(\omega). \forall \omega \in \Omega, (W_n - Z_i)(\omega) \geq 0.$$

Ainsi $|W_n - Z_i| = W_n - Z_i$ et ceci pour tout $i \in \{1, n\}$.

$$\text{Alors } \sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|) = \sum_{i=1}^n p_i E(W_n - Z_i) = \left(\sum_{i=1}^n p_i\right) E(W_n) - \sum_{i=1}^n p_i E(Z_i).$$

$$\sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|) = (E(W_n))^2 - \sum_{i=1}^n p_i E(Z_i) = E(W_n^2) - V(W_n) - \sum_{i=1}^n p_i E(Z_i).$$

$$\sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|) = E(W_n) - V(W_n) + \underbrace{E(W_n^2) - E(W_n)}_{E(W_n(W_n-1))} - \sum_{i=1}^n p_i E(Z_i).$$

$$\sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|) = \lambda_n - V(W_n) + E(W_n(W_n-1)) - \sum_{i=1}^n p_i E(Z_i).$$

Pour obtenir l'égalité demandée il suffit de prouver que $E(W_n(W_n-1)) = \sum_{i=1}^n p_i E(Z_i)$.

$$E(W_n(W_n-1)) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i(W_n-1)\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i(W_n-1)). \text{ Soit } i \text{ un élément de } \{1, n\}.$$

$$E(X_i(W_n-1)) = P(K_i=1) E(X_i(W_n-1) / (K_i=1)) + P(K_i=0) E(X_i(W_n-1) / (K_i=0)).$$

Soit $\omega \in \Omega$. Supposons $X_i(\omega) = 1$. Alors $X_i(\omega)(W_n(\omega) - 1) = 1 \times (R_i(\omega) + 1 - 1) = R_i(\omega)$

Alors la loi de $X_i(W_n - 1)$ sachant que $\{X_i = 1\}$ est la même que la loi de R_i sachant que $\{X_i = 1\}$.

$$\text{Ainsi } E(X_i(W_n - 1) / \{X_i = 1\}) = E(R_i / \{X_i = 1\}) = E(Z_i).$$

Soit $\omega \in \Omega$. Supposons $X_i(\omega) = 0$. Alors $X_i(\omega)(W_n(\omega) - 1) = 0$.

$$\text{Ainsi } E(X_i(W_n - 1) / \{X_i = 0\}) = 0.$$

$$\text{Alors } E(X_i(W_n - 1)) = P(X_i = 1) E(Z_i) + P(X_i = 0) \times 0 = p_i E(Z_i).$$

$$\text{D'où } \sum_{i=1}^n E(X_i(W_n - 1)) = \sum_{i=1}^n p_i E(Z_i).$$

$$\text{Ainsi } E(W_n(W_n - 1)) = \sum_{i=1}^n p_i E(Z_i). \text{ (c'est ce qu'il fallait prouver pour}$$

$$\text{obtenir : } \underline{\underline{\sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|) = \lambda_n - V(W_n)}}.$$

$$|P(W_n \in A) - P(n_n \in A)| \leq \min(1, \frac{1}{\lambda_n}) \sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|).$$

$$\text{d'où } \underline{\underline{|P(W_n \in A) - P(n_n \in A)| \leq \min(1, \frac{1}{\lambda_n}) (\lambda_n - V(W_n))}}.$$