

PARTIE I Un résultat d'analyse

(Q1) $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in]0, 1[$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ et $0 < x - \varepsilon < x < x + \varepsilon < 1$.

Rappelons que n est un réel et b un réel strictement positif :

$$|a| \geq b \Leftrightarrow a \leq -b \text{ ou } a \geq b \text{ donc } a \geq b \stackrel{(1)}{\Rightarrow} |a| \geq b \text{ et } a \leq -b \stackrel{(2)}{\Rightarrow} |a| \geq b$$

a) Soit v un élément de $[x + \varepsilon, 1]$. Notons que $v - x \geq \varepsilon$; en particulier $n(v - x) > 0$

$$\{Y_{n,v} \leq nx\} = \{Y_{n,v} - nv \leq n(x - v)\} = \{Y_{n,v} - nv \leq -n(v - x)\}$$

$$(1) \text{ donc alors } \{Y_{n,v} \leq nx\} = \{Y_{n,v} - nv \leq -n(v - x)\} \subset \{|Y_{n,v} - nv| \geq n(v - x)\}$$

$$\{Y_{n,v} \leq nx\} \subset \{|Y_{n,v} - nv| \geq n(v - x)\}.$$

La variance de P donne alors $P(Y_{n,v} \leq nx) \leq P(|Y_{n,v} - nv| \geq n(v - x))$

$nv = E(Y_{n,v})$ et $n(v - x) > 0$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff donne alors :

$$P(Y_{n,v} \leq nx) \leq P(|Y_{n,v} - E(Y_{n,v})| \geq n(v - x)) \leq \frac{V(Y_{n,v})}{(n(v - x))^2} = \frac{nv(1-v)}{n^2(v-x)^2} = \frac{v(1-v)}{n(v-x)^2}.$$

$$\text{Or } v - x \geq \varepsilon > 0 \text{ donc } (v - x)^2 \geq \varepsilon^2 > 0 \text{ et ainsi } 0 < \frac{1}{(v-x)^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

$$v \in [0, 1] \text{ donc } 0 \leq v(1-v) = v - v^2 = \frac{1}{4} - (v - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}; \quad 0 \leq v(1-v) \leq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Alors } \frac{v(1-v)}{n(v-x)^2} \leq \frac{v(1-v)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

(2) ce plus il est de notoriété publique que $\max_{v \in [0, 1]} v(1-v) = \frac{1}{4}$.

$$\text{Par conséquent } P(Y_{n,v} \leq nx) \leq \frac{v(1-v)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} \text{ pour tout } v \text{ dans } [x + \varepsilon, 1].$$

$$v \in [0, x - \varepsilon]$$

$$b) \quad \{Y_{n,v} \geq nx\} = \{Y_{n,v} - nv \geq n(x - v)\} \subset \{|Y_{n,v} - nv| \geq n(x - v)\}.$$

(1) et $n(x - v) > 0$

$$\text{Or } \{Y_{n,v} > nx\} \subset \{Y_{n,v} \geq nx\} \subset \{|Y_{n,v} - nv| \geq n(x - v)\} = \{|Y_{n,v} - E(Y_{n,v})| \geq n(x - v)\}$$

$$P(Y_{n,v} > nx) \leq P(|Y_{n,v} - E(Y_{n,v})| \geq n(x - v)) \leq \frac{V(Y_{n,v})}{(n(x - v))^2} = \frac{nv(1-v)}{n^2(x-v)^2} = \frac{v(1-v)}{n(x-v)^2}.$$

B.T.

d) Pour faciliter les écritures, posons $A = \{X_{n,v} \leq n\epsilon\}$.

$$\int_0^x \varphi(v) dv - \int_0^x \varphi(v) P(A) dv = \int_0^{x-\epsilon} \varphi(v) dv + \int_{x-\epsilon}^x \varphi(v) dv - \int_0^{x-\epsilon} \varphi(v) P(A) dv - \int_{x-\epsilon}^x \varphi(v) P(A) dv - \int_{x-\epsilon}^x \varphi(v) P(\bar{A}) dv$$

Par conséquent :

$$\left| \int_0^x \varphi(v) dv - \int_0^x \varphi(v) P(A) dv \right| \leq \left| \int_0^{x-\epsilon} \varphi(v) (1 - P(A)) dv \right| + \left| \int_{x-\epsilon}^x \varphi(v) (1 - P(A)) dv \right| + \left| \int_{x-\epsilon}^x \varphi(v) P(\bar{A}) dv \right| + \left| \int_{x-\epsilon}^x \varphi(v) P(A) dv \right|$$

$$\left| \int_0^x \varphi(v) dv - \int_0^x \varphi(v) P(A) dv \right| \leq \frac{\pi x}{4n\epsilon^2} + \int_{x-\epsilon}^x |\varphi(v) P(\bar{A})| dv + \int_{x-\epsilon}^x |\varphi(v) P(A)| dv + \frac{\pi (x-\epsilon)}{4n\epsilon^2}.$$

$$\text{On } \int_{x-\epsilon}^x |\varphi(v) P(\bar{A})| dv = \int_{x-\epsilon}^x |\varphi(v)| P(\bar{A}) dv \leq \int_{x-\epsilon}^x \pi dv = \pi \epsilon.$$

$$\text{De même } \int_{x-\epsilon}^x |\varphi(v) P(A)| dv = \int_{x-\epsilon}^x |\varphi(v)| P(A) dv \leq \int_{x-\epsilon}^x \pi dv = \pi \epsilon.$$

$$\text{Par conséquent : } \left| \int_0^x \varphi(v) dv - \int_0^x \varphi(v) P(A) dv \right| \leq \frac{\pi x}{4n\epsilon^2} + \pi \epsilon + \pi \epsilon + \frac{\pi (x-\epsilon)}{4n\epsilon^2} = \left(\frac{1}{4n\epsilon^2} + 2\epsilon \right) \pi$$

$$\left| \int_0^x \varphi(v) dv - \int_0^x \varphi(v) P(X_{n,v} \leq n\epsilon) dv \right| \leq \left(\frac{1}{4n\epsilon^2} + 2\epsilon \right) \pi.$$

soit $n \in \mathbb{N}^*$
 Q2) $\forall p \geq 0, \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+, \psi_n(\epsilon) = \frac{1}{4n\epsilon^2} + 2\epsilon$. ψ_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\text{et } \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \psi_n'(\epsilon) = \frac{1}{4n} \left(-\frac{2}{\epsilon^3} \right) + 2 = \frac{2}{\epsilon^3} \left(\epsilon^3 - \frac{1}{4n} \right).$$

$$\text{Alors } \forall \epsilon \in]0, \sqrt[3]{\frac{1}{4n}}], \psi_n'(\epsilon) \leq 0 \text{ et } \forall \epsilon \in [\sqrt[3]{\frac{1}{4n}}, +\infty[, \psi_n'(\epsilon) \geq 0.$$

ψ_n admet donc un minimum en $\sqrt[3]{\frac{1}{4n}}$.

$$\text{Notons que } \psi_n\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4n}}\right) = \frac{1}{4n} \sqrt[3]{(4n)^2} + 2\sqrt[3]{\frac{1}{4n}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4n}} + 2\sqrt[3]{\frac{1}{4n}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{4n}}.$$

Fixons alors x dans $]0, 1[$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{4n}} \right) = 0, \quad \kappa > 0 \text{ et } 1 - \kappa > 0.$$

$$\text{Alors } \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [n_0, +\infty[, \sqrt[3]{\frac{1}{4n}} < \pi n(\kappa, 1 - \kappa).$$

$$\text{Soit } n \in [n_0, +\infty[. \text{ Posons } \varepsilon = \sqrt[3]{\frac{1}{4n}}. \quad 0 < \varepsilon < \pi n(\kappa, 1 - \kappa).$$

$$0 < \varepsilon < \kappa \text{ et } \varepsilon < 1 - \kappa; \quad 0 < \kappa - \varepsilon < \kappa < \kappa + \varepsilon < 1.$$

$$\text{Alors } \left| \int_0^\kappa \varphi(v) dv - \int_0^1 \varphi(v) P(X_{n,v} \leq n\kappa) dv \right| \leq \left(\frac{1}{4n\varepsilon^2} + \varepsilon \right) \pi = \psi_n(\varepsilon) \pi = \psi_n\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4n}}\right) \pi$$

$$\text{Or } \psi_n\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4n}}\right) \pi = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \pi = \frac{9}{3\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \pi \leq \frac{9\pi}{4\sqrt[3]{n}}.$$

$3 \geq \sqrt[3]{36} \text{ car } 27 \geq 36$

$$\text{Alors } \left| \int_0^\kappa \varphi(v) dv - \int_0^1 \varphi(v) P(X_{n,v} \leq n\kappa) dv \right| \leq \frac{9\pi}{4\sqrt[3]{n}} \text{ et ceci pour } n \geq n_0.$$

$$\forall \kappa \in]0, 1[, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [n_0, +\infty[, \left| \int_0^\kappa \varphi(v) dv - \int_0^1 \varphi(v) P(X_{n,v} \leq n\kappa) dv \right| \leq \frac{9\pi}{4\sqrt[3]{n}}.$$

Q3 a) Soit $\hat{p} \in \mathbb{R}[X]$. $\exists r \in \mathbb{N}, \exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}, \hat{p} = \sum_{k=0}^r a_k X^k.$

$$\int_0^1 \varphi(v) \hat{p}(v) dv = \int_0^1 \varphi(v) \left(\sum_{k=0}^r a_k v^k \right) dv = \sum_{k=0}^r a_k \int_0^1 \varphi(v) v^k dv = \sum_{k=0}^r a_k \kappa_0 = 0.$$

Ainsi $\forall \hat{p} \in \mathbb{R}[X], \int_0^1 \varphi(v) \hat{p}(v) dv = 0.$

b) Soit $\kappa \in]0, 1[. \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [n_0, +\infty[, \left| \int_0^\kappa \varphi(v) dv - \int_0^1 \varphi(v) P(X_{n,v} \leq n\kappa) dv \right| \leq \frac{9\pi}{4\sqrt[3]{n}}.$

Soit $v \in [0, 1].$

$$\forall v \in [0, 1], P(X_{n,v} \leq n\kappa) = \sum_{k=0}^{E(n\kappa)} \binom{n}{k} v^k (1-v)^{n-k}. \quad v \mapsto P(X_{n,v} \leq n\kappa) \text{ est décroissante.}$$

Alors $\int_0^1 \varphi(v) P(X_{n,v} \leq n\kappa) dv = 0$ donc $\left| \int_0^\kappa \varphi(v) dv \right| \leq \frac{9\pi}{4\sqrt[3]{n}}.$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in]0, +\infty[$, $|\int_0^t p(v) dv| \leq \frac{9n}{4\sqrt{n}}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient : $|\int_0^t p(v) dv| = 0$ ou $\int_0^t p(v) dv = 0$.

Ainsi $\forall t \in]0, 1[$, $\int_0^t p(v) dv = 0$; et aussi $\forall t \in]0, 1[$, $\int_0^t p(v) dv = 0$.

$\leq$ p est continue sur $[0, 1]$. $x \mapsto \int_0^x p(v) dv$ est la primitive de p sur $[0, 1]$ qui prend
les valeurs 0 et 0. $\forall x \in [0, 1[$, $\int_0^x p(v) dv = 0$; à dériver on obtient alors :

$\forall x \in [0, 1[$, $p(x) = 0$. Alors $\lim_{x \rightarrow 1^-} p(x) = 0$. Comme p est continue (à gauche)

on a : $p(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} p(x) = 0$.

Finalement p est nulle sur $[0, 1]$.

Remarque... On trouve dans le rapport ORAL-HEC-2002 p. 148 un espace (ou plus)
qui donne une autre preuve de ce résultat... qui peut aussi s'obtenir
à coup sûr avec le théorème de Weierstrass.

PARTIE II Caractérisation de la loi exponentielle à l'aide du minimum d'un n-échantillon.

Q1 ^{doit $n \in \mathbb{N}^*$} $\forall$ doit $x \in \mathbb{R}$. $P(I_n \leq x) = P(\min_{1 \leq i \leq n} X_i \leq x) = 1 - P(\min_{1 \leq i \leq n} X_i > x)$

$P(I_n \leq x) = 1 - P(\{X_1 > x\} \cap \dots \cap \{X_n > x\}) = 1 - P(X_1 > x) P(X_2 > x) \dots P(X_n > x)$
 $\uparrow$
 $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes

Or $X_1, X_2, \dots, X_n$ ont même loi. Par conséquent : $P(I_n \leq x) = 1 - (P(X_1 > x))^n$.

$P(I_n \leq x) = 1 - (1 - P(X_1 \leq x))^n$. Or $P(X_1 \leq x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \end{cases}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(I_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - (1 - F(x))^n & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$

Q2 Ici $n \in \mathbb{N}^*$.

$$a) \forall x \in \mathbb{R}, P(nI_n \leq x) = P(I_n \leq \frac{x}{n}) = \begin{cases} 1 - (1 - F(\frac{x}{n}))^n & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0]. \end{cases}$$

$$\text{Or } \forall x \in [0, +\infty[, F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

$$\text{Donc } \forall x \in [0, +\infty[, P(nI_n \leq x) = 1 - (1 - (1 - e^{-\lambda \frac{x}{n}}))^n = 1 - (e^{-\lambda \frac{x}{n}})^n = 1 - e^{-\lambda x} = F(x).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(nI_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ F(x) & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

Ceci suffit pour dire que nI_n a même loi que X_1 . $nI_n \in \mathcal{E}(\lambda)$.

$$b) I_n = \frac{1}{n} (nI_n) \text{ et } nI_n \text{ possède une espérance qui vaut } \frac{1}{\lambda}.$$

$$\text{Alors } I_n \text{ possède une espérance qui vaut } \frac{1}{n} \times \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n\lambda}.$$

$$\underline{\underline{E(I_n) \text{ est } k \text{ et vaut } \frac{1}{n\lambda}}}$$

Remarque - Normal on a fait $I_n \in \mathcal{E}(n\lambda)$.

Q3 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Si donc } \forall x \in [0, +\infty[, P(nS_n \leq x) = 1 - (1 - F(\frac{x}{n}))^n$$

La l'hypothèse nous indique que nS_n a même loi que X_1 .

$$\text{Alors } \forall x \in [0, +\infty[, F(x) = P(X_1 \leq x) = P(nS_n \leq x) = 1 - (1 - F(\frac{x}{n}))^n.$$

$$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, +\infty[, F(x) = 1 - (1 - F(\frac{x}{n}))^n}}}$$

$$b) \text{ Soit } x \in [0, +\infty[. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F(\frac{x}{n}) = F(0) \stackrel{!}{=} 0 \quad \begin{matrix} X_1(\mathbb{R}) = [0, +\infty[\\ \text{et } F \text{ est continue à 0} \end{matrix}$$

$$\text{Alors } n \ln(1 - F(\frac{x}{n})) \sim_{n \rightarrow +\infty} n(-F(\frac{x}{n})) = -x \frac{F(\frac{x}{n}) - F(0)}{\frac{x}{n} - 0}$$

F est dérivable à droite en 0 et $F'_d(0) = f(0)$ (ou $F'(0) = f(0)!$) car f est continue sur $[0, +\infty[$.
 $\text{et } 0_F = [0, +\infty[!$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{F(\frac{x}{n}) - F(0)}{\frac{x}{n} - 0} \right) = F'_d(0) = f(0).$

Par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n h(1 - F(\frac{x}{n})) = -f(0)x = -F'(0)x$

c) soit $x \in [0, +\infty[.$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, F(x) = 1 - (1 - F(\frac{x}{n}))^n = 1 - e^{-F'(0)x}$

En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $F(x) = 1 - e^{-F'(0)x}$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, P(X_1 \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - e^{-F'(0)x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$

X_1 suit la loi exponentielle de paramètre $F'(0).$

Q4⁹¹. F est continue sur $[0, +\infty[$

. F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in [0, +\infty[, F'(x) = f(x) > 0$ donc F est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Ainsi F définit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[F(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)[= [0, 1[.$

F est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[.$

b) soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons H_n la fonction de répartition de I_n .

$\forall x \in \mathbb{R}, H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\text{ ou }]-\infty, 0] \\ 1 - (1 - F(x))^n & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$

H_n est de classe $\mathcal{B}^1$ sur $] -\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$ (F est de classe $\mathcal{B}^1$ sur $[0, +\infty[$)

Ainsi H_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{B}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ au moins.

Ceci confirme que I_n est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in]-\infty, 0[, H'_n(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[, H'_n(x) = n f(x) (1 - F(x))^{n-1}.$

Posons $\forall x \in]-\infty, 0[, h_n(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[, h_n(x) = n f(x) (1 - F(x))^{n-1}.$

h_n est une application positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui coïncide avec H'_n sur $\mathbb{R}^0$ des
sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points; h_n est une densité de I_n .

$\int_{-\infty}^0 t h_n(t) dt$ existe et vaut 0 car $\forall t \in]-\infty, 0[, h_n(t) = 0$.

$\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq t h_n(t) = n f(t) (1 - F(t))^{n-1} \leq n t f(t)$.

La X_n possède une espérance car $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ converge. Les règles de comparaison
des intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de
 $\int_0^{+\infty} t h_n(t) dt$. Ceci admette de prouver que I_n possède une espérance.

$$E(I_n) = \int_0^{+\infty} t h_n(t) dt = \int_0^{+\infty} n t f(t) (1 - F(t))^{n-1} dt.$$

$$\text{Soit } A \in \mathbb{R}_+^*. \quad \int_0^A n t f(t) (1 - F(t))^{n-1} dt = \int_{F(0)}^{F(A)} n F^{-1}(u) (1 - u)^{n-1} du.$$

$$\begin{aligned} \uparrow \\ \text{|| } u = F(t) \text{ du} = F'(t) dt = f(t) dt \\ \text{|| } t = F^{-1}(u) \end{aligned}$$

$$F(0) = 0 \text{ et } \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) = 1.$$

$$\text{Ainsi } \underline{E(I_n) = \int_0^1 n F^{-1}(u) (1 - u)^{n-1} du.}$$

c) ce qui précède indique que (faire $u = 1$) $\int_0^1 F^{-1}(u) du$ converge.

Alors pour tout $u \in [0, 1[, \int_u^1 F^{-1}(t) dt$ existe.

Soit $u \in [0, 1[$. Soit $A \in [u, 1[$.

$\forall t \in [u, A], F^{-1}(u) \leq F^{-1}(t)$ car F^{-1} est croissante (F est croissante).

$$\int_u^A F^{-1}(u) dt \leq \int_u^A F^{-1}(t) dt; (A - u) F^{-1}(u) \leq \int_u^A F^{-1}(t) dt.$$

$$\text{En faisant tendre } A \text{ vers } 1 \text{ il vient } (1 - u) F^{-1}(u) \leq \int_u^1 F^{-1}(t) dt$$

Nous écrivons que $1 - u \in [0, +\infty[$ et $F^{-1}(u) \in [0, +\infty[$ car $(1 - u) F^{-1}(u) \geq 0$.

$$\forall u \in [0, 1[, 0 \leq (1-u) F'(u) \leq \int_0^1 F'(t) dt.$$

F est continue sur $[0, +\infty[$ donc F' est continue sur $[0, 1[$. Soit pour $u \rightarrow 1-u$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquent G est continue sur $[0, 1[$.

$$\forall u \in [0, 1[, 0 \leq G(u) = (1-u) F'(u) \leq \int_0^1 F'(t) dt = \int_0^1 F'(t) dt - \int_0^u F'(t) dt.$$

$$\text{On a } \lim_{u \rightarrow 1^-} \int_0^u F'(t) dt = \int_0^1 F'(t) dt \text{ donc } \lim_{u \rightarrow 1^-} \left(\int_0^1 F'(t) dt - \int_0^u F'(t) dt \right) = 0.$$

Alors, par encadrement il vient $\lim_{u \rightarrow 1^-} G(u) = 0 = G(1)$; G est continue à 1.

Finalement G est continue sur $[0, 1]$.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, n \geq 1. E(I_n) = n \int_0^1 F'(u) (1-u)^{n-1} du = n \int_0^1 G(u) (1-u)^{n-1} du.$$

$$E(I_n) = n \int_0^1 F'(u) (1-u)^{n-1} du = n \int_1^0 G(1-v) v^{n-1} (-dv) = n \int_0^1 G(1-v) v^{n-1} dv.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, E(I_n) = n \int_0^1 G(u) (1-u)^{n-1} du = n \int_0^1 G(1-v) v^{n-1} dv.$$

d) i) considérons une suite $(X'_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi exponentielle de paramètre λ .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I'_n = \sum_{i=1}^n X'_i$ suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{n\lambda}$.

Pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$. f_λ est nulle sur $]-\infty, 0[$, continue

et strictement positive sur $[0, +\infty[$. Ainsi pourrions-nous appliquer ce qui

précède de dire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, E(I'_n) = n \int_0^1 f_\lambda(1-v) v^{n-1} dv$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \int_0^1 f_\lambda(1-v) v^{n-1} dv = \frac{1}{n\lambda}.$$

$$(i) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \quad n \int_0^1 G_\lambda(1-v) v^{n-1} dv = \frac{1}{n\lambda} = E(I_n) = n \int_0^1 G(1-v) v^{n-1} dv.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \quad \int_0^1 G_\lambda(1-v) v^{n-1} dv = \int_0^1 G(1-v) v^{n-1} dv.$$

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 G_\lambda(1-v) v^n dv = \int_0^1 G(1-v) v^n dv.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 (G_\lambda - G)(1-v) v^n dv = 0.$$

G_λ, G et $v \mapsto 1-v$ sont continues sur $[0,1]$ et $\forall v \in [0,1], 1-v \in [0,1]$.

Ainsi $v \mapsto (G_\lambda - G)(1-v)$ est continue sur $[0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 (G_\lambda - G)(1-v) v^n dv = 0$.

Il s'ensuit alors que $\forall v \in [0,1], (G_\lambda - G)(1-v) = 0$.

Comme $v \mapsto 1-v$ réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$: $\forall u \in [0,1], (G_\lambda - G)(u) = 0$.

Alors $G = G_\lambda$.

$$(ii) \quad \forall u \in [0,1], (1-u)F'(u) = G(u) = G_\lambda(u) = (1-u)F'_\lambda(u)$$

$$\forall u \in [0,1], F'(u) = F'_\lambda(u); \quad F' = F'_\lambda.$$

$$\text{Soit } x \in [0, +\infty[. \quad F'(F(x)) = x = F'_\lambda(F_\lambda(x)) \quad \downarrow \quad F'(F_\lambda(x)).$$

$$F'(F(x)) = F'(F_\lambda(x)) \text{ et } F' \text{ est injective donc } F(x) = F_\lambda(x).$$

$$\forall x \in [0, +\infty[, F(x) = F_\lambda(x).$$

$$\forall x \in [0, +\infty[, F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ et } \forall x \in]-\infty, 0[, P(X_3 \leq x) = 0.$$

Donc X_3 suit la loi exponentielle de paramètre λ .

PARTIE III Caractérisation de la loi exponentielle à l'aide des deux premiers records

A. Préliminaire

$$(Q1) \quad \{R_2 = R_1\} = \{R_2 = X_1\} = \bigcap_{k=2}^{+\infty} \{X_k \leq X_1\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \{X_k \leq X_1\}.$$

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{\{R_2 = R_1\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \{X_k \leq X_1\}}}$$

(Q2) Soit $t \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. $(\{X_1 \leq t\}, \{X_1 > t\})$ est un système complet d'événements.

$$\text{Alors } P\left(\bigcap_{k=2}^{n+1} \{X_k \leq X_1\}\right) = P\left(\bigcap_{k=2}^{n+1} \{X_k \leq X_1\} \cap \{X_1 \leq t\}\right) + P\left(\bigcap_{k=2}^{n+1} \{X_k \leq X_1\} \cap \{X_1 > t\}\right).$$

$$\text{Observons que } \bigcap_{k=2}^{n+1} \{X_k \leq X_1\} \cap \{X_1 \leq t\} \subset \bigcap_{k=1}^{n+1} \{X_k \leq t\}$$

$$\text{et } \bigcap_{k=2}^{n+1} \{X_k \leq X_1\} \cap \{X_1 > t\} \subset \{X_1 > t\}.$$

$$\text{d'où l'on a de P donc on a : } P\left(\bigcap_{k=2}^{n+1} \{X_k \leq X_1\}\right) \leq P\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} \{X_k \leq t\}\right) + P\{X_1 > t\}.$$

$$\text{Par indépendance } P\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} \{X_k \leq t\}\right) \leq \prod_{k=1}^{n+1} P(X_k \leq t) = \prod_{k=1}^{n+1} F(t) = (F(t))^{n+1}.$$

$$\text{de plus } P\{X_1 > t\} = 1 - P\{X_1 \leq t\} = 1 - F(t).$$

$$\text{Ainsi } \forall t \in [0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, P\left(\bigcap_{k=2}^{n+1} \{X_k \leq X_1\}\right) \leq (F(t))^{n+1} + 1 - F(t).$$

$$(Q3) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1; \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - F(t)) = 0. \quad \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in]A, +\infty[, |1 - F(t)| < \varepsilon.$$

$$\text{Ainsi } \forall t \in]A, +\infty[, 1 - F(t) < \varepsilon. \quad \underline{\text{Fixons } t \text{ dans }]A, +\infty[.} \quad 1 - F(t) < \varepsilon.$$

$$\text{de plus } F(t) \in [0, 1] \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (F(t))^n = 0.$$

$$\text{Ainsi } \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [n_0, +\infty[, (F(t))^n < \varepsilon; \quad \forall n \in [n_0, +\infty[, (F(t))^n < \varepsilon.$$

$$\text{Par conséquent } \forall n \in [n_0, +\infty[, P\left(\bigcap_{k=2}^{n+1} \{X_k \leq X_1\}\right) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0 \Rightarrow P\left(\bigcap_{k=2}^{n+1} \{X_k \leq X_1\}\right) < 2\varepsilon \text{ ou } \leq 2\varepsilon}}$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(\bigcap_{l=2}^{n+1} \{X_l \leq X_1\}) > 0$ a part d'être que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\bigcap_{l=2}^{n+1} \{X_l \leq X_1\}) = 0$.

Q4) la suite $(\bigcap_{l=2}^{n+1} \{X_l \leq X_1\})_{n \geq 1}$ est décroissante d.a.c :

$$P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} (\bigcap_{l=2}^{n+1} \{X_l \leq X_1\})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\bigcap_{l=2}^{n+1} \{X_l \leq X_1\}) = 0$$

$$\text{Or } \bigcap_{n=1}^{+\infty} (\bigcap_{l=2}^{n+1} \{X_l \leq X_1\}) = \bigcap_{l=2}^{+\infty} \{X_l \leq X_1\}; \text{ ainsi } P(\bigcap_{l=2}^{+\infty} \{X_l \leq X_1\}) = 0.$$

$$\text{Rappelons que } \{R_1 = R_2\} = \bigcap_{l=1}^{+\infty} \{X_l \leq X_2\} = \bigcap_{l=2}^{+\infty} \{X_l \leq X_1\}.$$

$$\text{Par conséquent } P(R_1 = R_2) = 0. \text{ Or } \{R_1 = R_2\} = \{R_2 > R_1\}$$

$$\text{D'où } P(R_1 > R_2) = 1 - P(R_1 = R_2) = 1. \text{ Pourquoi ? Puisque nécessairement } R_1 > R_2.$$

B. La caractérisation

Q1) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ et soit $h \in \mathbb{R}_+^2$.

$$\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y) = P(\{R_2 \leq x+h\} \cap \{R_1 - R_2 > y\}) - P(\{R_2 \leq x\} \cap \{R_1 - R_2 > y\})$$

$$\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y) = P(\{x < R_1 \leq x+h\} \cap \{R_1 - R_2 > y\}) = P(\{x < R_1 \leq x+h\} \cap \{R_1 - X_2 > y\})$$

$$\{R_1 - X_2 > y\} = \{R_1 - R_2 > y\} \subset \{R_1 > R_2\} = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{i=1}^j \{X_i \leq X_2\} \cap \{X_{j+1} > X_2\} \right)$$

$$\text{Pour tout } j \in \mathbb{N}^*, A_j = \left(\bigcap_{i=1}^j \{X_i \leq X_2\} \right) \cap \{X_{j+1} > X_2\} \cdot \{R_1 > R_2\} = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j.$$

Noter que $(A_j)_{j \geq 1}$ est un système quasi-complet d'événements ($\dots A_j$).

$$\text{Alors } \varphi(x+h, y) - \varphi(x, y) = P(\{x < R_1 \leq x+h\} \cap \{R_1 - X_2 > y\}) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(\{x < R_1 \leq x+h\} \cap \{R_1 - X_2 > y\} \cap A_j).$$

$$\text{Soit } j \in \mathbb{N}, +\infty[. A_j \cap \{R_1 - X_2 > y\} = \{X_1 \leq X_2\} \cap \{X_2 \leq X_3\} \cap \dots \cap \{X_j \leq X_2\} \cap \{X_{j+1} - X_2 > y\}$$

$$\{x < R_1 \leq x+h\} \cap \{R_1 - X_2 > y\} \cap A_j = \{x < X_2 \leq x+h\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^j \{X_i \leq X_2\} \right) \cap \{X_{j+1} > y + X_2\}.$$

$$\text{Alors } \varphi(x+h, y) - \varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(\{x < X_2 \leq x+h\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^j \{X_i \leq X_2\} \right) \cap \{X_{j+1} > y + X_2\}).$$

b) Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que :

$$1^\circ \dots \{x < x_j \leq x+\ell\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^j \{x_i \leq x_j\} \right) \subset \{x < x_j \leq x+\ell\} \cap \bigcap_{i=2}^j \{x_i \leq x+\ell\} \quad (\text{à un abus près : } j=1).$$

$$2^\circ \dots \{x < x_j \leq x+\ell\} \cap \{x_{j+1} > y+x_j\} \subset \{x_{j+1} > x+y\}$$

$$\text{Alors } \{x < x_j \leq x+\ell\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^j \{x_i \leq x_j\} \right) \cap \{x_{j+1} > y+x_j\} \subset \{x < x_j \leq x+\ell\} \cap \left(\bigcap_{i=2}^j \{x_i \leq x+\ell\} \right) \cap \{x_{j+1} > x+y\}$$

$x_2, x_3, \dots, x_{j+1}$ étant indépendantes et P continue il vient :

$$P(\{x < x_j \leq x+\ell\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^j \{x_i \leq x_j\} \right) \cap \{x_{j+1} > y+x_j\}) \leq \underbrace{P(x < x_j \leq x+\ell) \left(\prod_{i=2}^j P(x_i \leq x+\ell) \right)}_{\alpha_j} P(x_{j+1} > x+y)$$

$$\alpha_j = (F(x+\ell) - F(x)) \left(\prod_{i=2}^j F(x+\ell) \right) (1 - F(x+y))$$

$$\alpha_j = (F(x+\ell) - F(x)) (1 - F(x+y)) (F(x+\ell))^{j-1}.$$

Remarque... si $j=1$:

$$\begin{aligned} P(\{x < x_1 \leq x+\ell\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^1 \{x_i \leq x_1\} \right) \cap \{x_{j+1} > y+x_1\}) &= P(\{x < x_1 \leq x+\ell\} \cap \{x_2 > y+x_1\}) \\ &\leq P(\{x < x_1 \leq x+\ell\} \cap \{x_2 > y\}) \\ &\leq (F(x+\ell) - F(x)) (1 - F(x+y)) = \alpha_1. \end{aligned}$$

Alors ce qui était à prouver devient évident.

On voit alors que $\sum_{j=1}^{+\infty} [(F(x+\ell) - F(x)) (1 - F(x+y)) (F(x+\ell))^{j-1}] < \infty$ et

$$\text{vaut } (F(x+\ell) - F(x)) \frac{1}{1 - F(x+\ell)} \quad \text{car } F(x+\ell) \in [0, 1[.$$

$$\text{Alors : } F(x+\ell) - F(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(\{x < x_j \leq x+\ell\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^j \{x_i \leq x_j\} \right) \cap \{x_{j+1} > y+x_j\}) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j$$

$$\text{Soit } F(x+\ell) - F(x) \leq \frac{F(x+\ell) - F(x)}{1 - F(x+\ell)} (1 - F(x+y)).$$

Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

$\{x < x_j \leq x + \epsilon\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^j \{x_i \leq x\} \right) \cap \{x_{j+1} > y + x + \epsilon\}$ est évenement

$B_j = \{x < x_j \leq x + \epsilon\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^j \{x_i \leq x\} \right) \cap \{x_{j+1} > y + x + \epsilon\}$. de plus

$P(B_j) = P(x < x_j \leq x + \epsilon) \left(\prod_{i=1}^j P(x_i \leq x) \right) P(x_{j+1} > y + x + \epsilon)$ car $x_1, x_2, \dots, x_{j+1}$ sont

indépendants.

$P(B_j) = (F(x + \epsilon) - F(x)) \left(\prod_{i=1}^j F(x) \right) (1 - F(x + y + \epsilon)) \leq P(\{x < x_j \leq x + \epsilon\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^j \{x_i \leq x\} \right) \cap \{x_{j+1} > y + x + \epsilon\})$

Donc $(F(x + \epsilon) - F(x)) (1 - F(x + y + \epsilon)) (F(x))^j \leq P(\{x < x_j \leq x + \epsilon\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^j \{x_i \leq x\} \right) \cap \{x_{j+1} > y + x + \epsilon\})$

Notons que $\sum_{j=1}^{\infty} (F(x + \epsilon) - F(x)) (1 - F(x + y + \epsilon)) (F(x))^j$ converge et vaut :

$(F(x + \epsilon) - F(x)) (1 - F(x + y + \epsilon)) \frac{1}{1 - F(x)}$ car $F(x) \in [0, 1[$.

Ainsi $\frac{F(x + \epsilon) - F(x)}{1 - F(x)} (1 - F(x + y + \epsilon)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} P(\{x < x_j \leq x + \epsilon\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^j \{x_i \leq x\} \right) \cap \{x_{j+1} > y + x + \epsilon\})$

Ainsi on a $\frac{F(x + \epsilon) - F(x)}{1 - F(x)} (1 - F(x + y + \epsilon)) \leq P(x + \epsilon - \varphi(y))$.

$\frac{F(x + \epsilon) - F(x)}{1 - F(x)} (1 - F(x + y + \epsilon)) \leq \varphi(x + \epsilon, y) - \varphi(x, y) \leq \frac{F(x + \epsilon) - F(x)}{1 - F(x + \epsilon)} (1 - F(x + y))$.

② Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$. ce qui précède donne :

$\forall h \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{F(x + \epsilon) - F(x)}{h} \frac{1 - F(x + y + \epsilon)}{1 - F(x)} \leq \frac{\varphi(x + \epsilon, y) - \varphi(x, y)}{h} \leq \frac{F(x + \epsilon) - F(x)}{h} \frac{1 - F(x + y)}{1 - F(x + \epsilon)}$

est continue sur $[0, +\infty[$ car F est dérivable à droite en x et $F'_d(x) = f(x)$.

Ainsi $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + \epsilon) - F(x)}{h} = f(x)$. de plus F est continue à droite à tout point

de $[0, +\infty[$ donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(x+y+t) = F(x+y)$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(x+t) = 0$.

$$\text{Ainsi } \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{F(x+t) - F(x)}{t} \cdot \frac{1 - F(x+y)}{1 - F(x)} \right) = f(x) \frac{1 - F(x+y)}{1 - F(x)} \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{F(x+t) - F(x)}{t} \cdot \frac{1 - F(x+y)}{1 - F(x+t)} \right) =$$

$$f(x) \frac{1 - F(x+y)}{1 - F(x)}. \text{ Alors par encadrement on obtient : } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x+t, y) - \varphi(x, y)}{t} = f(x) \frac{1 - F(x+y)}{1 - F(x)}.$$

$$\text{En admettant que : } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x+t, y) - \varphi(x, y)}{t} = f(x) \frac{1 - F(x+y)}{1 - F(x)} \text{ on peut dire que}$$

φ admet une dérivée partielle d'ordre 1, par rapport à la première variable, en (x, y) qui vaut $f(x) \frac{1 - F(x+y)}{1 - F(x)}$.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} (1 - F(x+y)).$$

Q3) $X_1 \in \mathcal{E}(\lambda)$.

$$a) \forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - (1 - e^{-\lambda(x+y)})} = \lambda e^{-\lambda(x+y)}.$$

$$\text{Soit } y \in \mathbb{R}_+. \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \lambda e^{-\lambda(x+y)} = \lambda e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}.$$

$$\text{donc } \exists \sigma_y \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x, y) = -e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} + \sigma_y.$$

$$\text{En particulier } e^{-\lambda \cdot 0} e^{-\lambda y} + \sigma_y = \varphi(0, y) = \varphi(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \cap (\mathbb{R}_+ - \mathbb{R}_+ > y)) = 0$$

$\varphi(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) = 0$

$$\text{donc } \sigma_y = e^{-\lambda y}$$

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x, y) = (1 - e^{-\lambda x}) e^{-\lambda y}.$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \varphi(x, y) = (1 - e^{-\lambda x}) e^{-\lambda y}.$$

b) soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\{R_2 - R_3 > y\} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (\{R_2 \leq n\} \cap \{R_2 - R_3 > y\})$

de plus la suite $(\{R_2 \leq n\} \cap \{R_2 - R_3 > y\})_{n \geq 0}$ est croissante.

$$\text{Alors } P(R_2 - R_3 > y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(R_2 \leq n \cap \{R_2 - R_3 > y\}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n, y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [(1 - e^{-\lambda n}) e^{-\lambda y}] = e^{-\lambda y}$$

$$\text{Ainsi } P(R_2 - R_3 \leq y) = 1 - e^{-\lambda y}.$$

$$\text{Alors } \forall y \in \mathbb{R}, P(R_2 - R_3 \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in]-\infty, 0[\\ 1 - e^{-\lambda y} & \text{si } y \in [0, +\infty[\end{cases}$$

$R_2 - R_3$ suit une loi exponentielle de paramètre λ .

$$\forall (u, y) \in \mathbb{R}_+^2, P(\{R_2 \leq u\} \cap \{R_2 - R_3 \leq y\}) = P(R_2 \leq u) - P(\{R_2 \leq u\} \cap \{R_2 - R_3 > y\})$$

$$\forall (u, y) \in \mathbb{R}_+^2, P(\{R_2 \leq u\} \cap \{R_2 - R_3 \leq y\}) = 1 - e^{-\lambda u} - \varphi(u, y) = 1 - e^{-\lambda u} - (1 - e^{-\lambda u}) e^{-\lambda y}$$

$$\forall (u, y) \in \mathbb{R}_+^2, P(\{R_2 \leq u\} \cap \{R_2 - R_3 \leq y\}) = (1 - e^{-\lambda u}) (1 - e^{-\lambda y}) = P(R_2 \leq u) P(R_2 - R_3 \leq y).$$

$$b) \forall y \in \mathbb{R}_+, 1 - G(y) = \frac{1 - F(0+y)}{1 - F(0)} \underset{F(0)=0}{=} 1 - F(y). \quad \forall y \in \mathbb{R}_+, G(y) = F(y).$$

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{F = G|_{[0,+\infty)}}} \quad (\text{et pas } G = F!).$$

$$\forall (u, y) \in \mathbb{R}_+^2, \frac{1 - F(u+y)}{1 - F(u)} = 1 - G(y) = 1 - F(y).$$

$$\text{Ainsi } \forall (u, y) \in \mathbb{R}_+^2, \frac{P(X_2 > u+y)}{P(X_2 > u)} = P(X_2 > y).$$

$$\forall (u, y) \in \mathbb{R}_+^2, P(X_2 > y) = \frac{P(X_2 > u+y)}{P(X_2 > u)} = \frac{P(\{X_2 > u+y\} \cap \{X_2 > u\})}{P(X_2 > u)} = P(X_2 > u+y) / P(X_2 > u).$$

$$\underline{\underline{\forall (u, y) \in \mathbb{R}_+^2, P(\{X_2 > u+y\} / \{X_2 > u\}) = P(X_2 > y).}}$$

Ainsi X_2 suit une loi exponentielle (propriété d'absence de mémoire).