PARTIE I 40% du barème

Moyenne classe 13,01
Max 20
Min 1.2
ET 3.55

**Q1** a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $v_n = \gamma_{n+1} - \gamma_n = h_{n+1} - \ln(n+1) - h_n + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

$v_n = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ ; $\frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

De plus $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Alors $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ; $v_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Ainsi $v_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

- $-v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ • $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2n^2} \geqslant 0$ • la série de terme général $\frac{1}{2n^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général $-v_n$.

Ainsi la série de terme général $v_n$ converge.

abordé par 90% des candidats. Taux de réussite 15% dit le rapport du concours.

b) Posons $V = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\sum_{k=1}^{n-1} (\gamma_{k+1} - \gamma_k) = \gamma_n - \gamma_1$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\gamma_n = \gamma_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(\gamma_{k+1} - \gamma_k) = \gamma_1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k$. Or $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} v_k = V$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} \gamma_n = \gamma_1 + V$. Donc la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

c) Soit $t$ un réel strictement positif. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_{n,t} = \gamma + \ln(t+n) - h_n = \gamma + \ln(t+n) - \ln n - \gamma_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_{n,t} = \gamma + \ln\left(1+\frac{t}{n}\right) - \gamma_n$. Or $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{t}{n}\right) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \gamma_n = \gamma$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} d_{n,t} = \gamma + 0 - \gamma = 0$. $\lim_{n\to+\infty} d_{n,t} = 0$ et ceci pour tout réel $t$ strictement positif.

R



**Q2** a) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. $X_t \hookrightarrow \gamma(t)$ ou $X_t \hookrightarrow \Gamma(1,t)$. $E(X_t) = 1 \times t$ et $V(X_t) = 1^2 \times t$.

$E(X_t) = t$ et $V(X_t) = t$.

b) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Le texte indique que $\int_0^{+\infty} \ln u \, e^{-u} u^{t-1} du$ existe et vaut $\Gamma'(t)$, $\int_0^{+\infty} (\ln u)^2 e^{-u} u^{t-1} du$ existe et vaut $\Gamma''(t)$ et $\forall u \in ]0,+\infty[$, $f_{X_t}(u) = \frac{1}{\Gamma(t)} e^{-u} u^{t-1}$.

Alors $\int_0^{+\infty} (\ln u) f_{X_t}(u) du$ existe et vaut $\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$ donc $\psi(t)$.

$\int_0^{+\infty} (\ln u)^2 f_{X_t}(u) du$ existe et vaut $\frac{\Gamma''(t)}{\Gamma(t)}$.

Soit $r \in [\![1,2]\!]$ !! • $X_t$ prend ses valeurs dans $[0,+\infty[$ ... on pourrait dire $]0,+\infty[$ pour simplifier ...
• $X_t$ est une variable aléatoire à densité de densité $f_{X_t}$.
• $u \mapsto (\ln u)^r$ est continue sur $[0,+\infty[$ privé du seul point $0$.

Le théorème de transfert indique que $E((\ln X_t)^r)$ existe si et seulement si $\int_0^{+\infty} (\ln u)^r f_{X_t}(u) du$ est absolument convergente et qu'en cas d'existence $E((\ln X_t)^r) = \int_0^{+\infty} (\ln u)^r f_{X_t}(u) du$.

Notons que $u \mapsto (\ln u)^r f_{X_t}(u)$ garde un signe constant sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.

Alors $\int_0^{+\infty} (\ln u)^r f_{X_t}(u) du$ converge absolument si et seulement si elle converge.

Or nous avons vu que $\int_0^{+\infty} (\ln u) f_{X_t}(u) du$ et $\int_0^{+\infty} (\ln u)^2 f_{X_t}(u) du$ convergent.

Ainsi $\int_0^{+\infty} (\ln u)^r f_{X_t}(u) du$ converge car $r \in [\![1,2]\!]$ !

ceci permet de dire que $E((\ln X_t)^r)$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} (\ln u)^r f_{X_t}(u) du$.

donc $E(\ln X_t)$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} \ln u \, f_{X_t}(u) du$ soit $\psi(t)$.

$E((\ln X_t)^2)$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} (\ln u)^2 f_{X_t}(u) du$ soit $\frac{\Gamma''(t)}{\Gamma(t)}$.

~~Alors $V(\ln X_t)$ existe et vaut $\frac{\Gamma''(t)}{\Gamma(t)}-(\psi(t))^2$.~~

$$V(\ln X_t)=\frac{\Gamma''(t)}{\Gamma(t)}-\left(\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}\right)^2=\frac{\Gamma''(t)\Gamma(t)-(\Gamma'(t))^2}{(\Gamma(t))^2}=\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)'(t)=\psi'(t).$$

Pour tout réel $t$ strictement positif, $E(\ln X_t)$ et $V(\ln X_t)$ existent et :

$E(\ln X_t)=\psi(t)$ et $V(\ln X_t)=\psi'(t)$.

le texte aurait été inspiré de traiter $E(1/X_t^2)$ dans cette question

Q3) a) Soit $t$ un réel strictement supérieur à 1.

- $X_t$ prend ses valeurs dans $[0,+\infty[$
- $X_t$ est une variable aléatoire à densité de densité $f_{X_t}$.
- $u\mapsto\frac{1}{u}$ est continue sur $[0,+\infty[$ privé du seul point 0.

Alors $E(\frac{1}{X_t})$ existe si et seulement si $\int_0^{+\infty}\frac{1}{u}f_X(u)\,du$ est absolument convergente.

Or $\forall u\in]0,+\infty[$, $\frac{1}{u}f_X(u)\geqslant0$.

Donc $E(\frac{1}{X_t})$ existe si et seulement si $\int_0^{+\infty}\frac{1}{u}f_X(u)du$ converge. En cas d'existence $E(\frac{1}{X_t})=\int_0^{+\infty}\frac{1}{u}f_X(u)\,du$.

$\forall u\in]0,+\infty[$, $\frac{1}{u}f_X(u)=\frac{1}{u}\frac{1}{\Gamma(t)}e^{-u}u^{t-1}=\frac{e^{-u}u^{(t-1)-1}}{\Gamma(t)}=\frac{\Gamma(t-1)}{\Gamma(t)}f_{X_{t-1}}(u)\underset{\uparrow}{=}\frac{1}{t-1}f_{X_{t-1}}(u)$

$\Gamma(t)=(t-1)\Gamma(t-1)$, $t=(t-1)+1$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X_{t-1}}(u)du$ existe et vaut 1 donc

$\int_0^{+\infty}f_{X_{t-1}}(u)du$ existe et vaut également 1 car $f_{X_{t-1}}$ est nulle sur $]-\infty,0]$.

Donc $\int_0^{+\infty}\frac{1}{u}f_{X_t}(u)du$ existe et vaut $\frac{1}{t-1}$. Ceci achève de montrer que

$\frac{1}{X_t}$ possède une espérance qui vaut $\frac{1}{t-1}$ lorsque $t\in]1,+\infty[$.

b) $\ln$ est concave sur $]0,+\infty[$ ($\forall x\in]0,+\infty[$, $\ln''x=-\frac{1}{x^2}<0$)

la courbe représentative de $\ln$ est donc en dessous de toutes ses tangentes, en particulier de sa tangente au point d'abscisse 1 qui a pour équation $y=\underbrace{(\ln'1)}_{=1}(x-1)+\underbrace{\ln 1}_{=0}$

donc $\forall x\in]0,+\infty[$, $\ln x\leq(\ln'1)(x-1)+\ln1=x-1$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln x \leq x-1$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$; $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ -\ln x \leq \frac{1}{x} - 1$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. 1er cas $x \geq 1$. Alors $0 \leq \ln x \leq x-1$.

Donc $(\ln x)^2 \leq (x-1)^2 \leq (x-1)^2 + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$.

2e cas $x < 1$. Alors $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq 0$; $0 \leq -\ln x \leq -\left(1 - \frac{1}{x}\right)$.

Donc $(-\ln x)^2 \leq \left(-\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)^2$. $(\ln x)^2 \leq \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \leq \left(1-\frac{1}{x}\right)^2 + (x-1)^2$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ (\ln x)^2 \leq (x-1)^2 + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$.

**Q2** Soit $\omega \in \Omega$ tel que $X_t(\omega) > 0$. $\frac{X_t(\omega)}{t} > 0$ donc $1 - \frac{1}{X_t(\omega)/t} \leq \ln\left(\frac{X_t(\omega)}{t}\right) \leq \frac{1}{t} X_t(\omega) - 1$.

1. $\forall t \in \mathbb{R},\ X_t(\omega) > 0 \Rightarrow 1 - t \times \frac{1}{X_t(\omega)} \leq \ln(X_t(\omega)) - \ln t \leq \frac{1}{t} X_t(\omega) - 1$.
2. $P(X_t > 0) = 1$. Donc $P\left(1 - t \times \frac{1}{X_t} \leq \ln(X_t) - \ln t\right) = P\left(\ln X_t - \ln t \leq \frac{1}{t} X_t - 1\right) = 1$.
3. $E\left(1 - t \times \frac{1}{X_t}\right)$ possède une espérance qui vaut $1 - t \times \frac{1}{t-1}$ ou : $-\frac{1}{t-1}$ ;

   $E(\ln(X_t))$ possède une espérance ;

   $\frac{1}{t} X_t - 1$ possède une espérance qui vaut $\frac{1}{t} \times t - 1$ ou $0$.

Le tout permet de dire que : $-\frac{1}{t-1} \leq E(\ln(X_t)) - \ln t \leq 0$ (croissance de l'espérance)

"Si $E(X)$ et $E(Y)$ existent et si $P(X \leq Y) = 1$ : $E(X) \leq E(Y)$."

Donc $-\frac{1}{t-1} \leq E\left(\ln\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) \leq 0$.

Supposons que $t$ est strictement supérieur à 2. Montrons que $\frac{1}{X_t^2}$ possède une espérance

- $X_t$ est une variable à densité de densité $f_{X_t}$
- $X_t$ prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$
- $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ privé du seul point $0$.

Le théorème de transfert indique que $E\left(\frac{1}{X_t^2}\right)$ existe si et seulement si $\int_0^{+\infty}\frac{1}{u^2}f_{X_t}(u)\,du$ est absolument convergente ou ici convergente car $\forall u\in\,]0,+\infty[,\ \frac{1}{u^2}f_{X_t}(u)\geq 0$.

$\Gamma(t)=(t-1)(t-2)\Gamma(t-2)$

Or $\forall u\in\,]0,+\infty[,\ \frac{1}{u^2}f_{X_t}(u)=\frac{1}{u^2}\,\frac{e^{-u}u^{t-1}}{\Gamma(t)}\overset{t>2}{=}\frac{\Gamma(t-2)}{\Gamma(t)}\,f_{X_{t-2}}(u)=\frac{1}{(t-1)(t-2)}f_{X_{t-2}}(u)$.

$\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X_{t-2}}(u)\,du$ existe et vaut 1 et $f_{X_{t-2}}$ est nulle sur $]-\infty,0]$ donc $\int_0^{+\infty}f_{X_{t-2}}(u)\,du$ existe et vaut 1. Alors $\int_0^{+\infty}\frac{1}{u^2}f_{X_t}(u)\,du$ converge et vaut $\frac{1}{(t-1)(t-2)}$.

Ce qui suffit pour dire que $\underline{\underline{E\left(\frac{1}{X_t^2}\right)\text{ existe et vaut }\frac{1}{(t-1)(t-2)}\ \ldots\text{ lorsque } t>2}}$.

Reprenons $t>2$. Soit $\omega\in\Omega$ tel que $X_t(\omega)>0$.

Alors $\ln^2\frac{X_t(\omega)}{t}\leq\left(1-\frac{1}{X_t(\omega)/t}\right)^2+\left(\frac{X_t(\omega)}{t}-1\right)^2=1-\frac{2t}{X_t(\omega)}+\frac{t^2}{(X_t(\omega))^2}+\frac{(X_t(\omega)-t)^2}{t^2}$.

1°. $\forall\omega\in\Omega,\ X_t(\omega)>0\Rightarrow\ln^2\frac{X_t(\omega)}{t}\leq 1-2t\times\frac{1}{X_t(\omega)}+t^2\frac{1}{(X_t(\omega))^2}+\frac{1}{t^2}\times(X_t(\omega)-t)^2$

2°. $P(X_t>0)=1$ … donc presque sûrement $\ln^2\frac{X_t}{t}\leq 1-2t\times\frac{1}{X_t}+t^2\frac{1}{X_t^2}+\frac{1}{t^2}(X_t-t)^2$.

3°. → $\ln^2\frac{X_t}{t}=(\ln X_t-\ln t)^2=(\ln X_t)^2-2\ln t\,\ln X_t+(\ln t)^2$. Or $E((\ln X_t)^2)$ et $E(\ln X_t)$ existent donc $\ln^2\frac{X_t}{t}$ possède une espérance.

⇒ $\frac{1}{X_t}$ possède une espérance qui vaut $\frac{1}{t-1}$, $\frac{1}{X_t^2}$ possède une espérance qui vaut $\frac{1}{(t-1)(t-2)}$ et $(X_t-t)^2=(X_t-E(X_t))^2$ possède une espérance qui vaut $V(X_t)$ donc $t$. Alors $1-2t\times\frac{1}{X_t}+t^2\times\frac{1}{X_t^2}+\frac{1}{t^2}(X_t-t)^2$ possède une espérance qui vaut $1-2t\frac{1}{t-1}+t^2\frac{1}{(t-1)(t-2)}+\frac{1}{t^2}t$.

$$1-\frac{2t}{t-1}+\frac{t^2}{(t-1)(t-2)}+\frac{1}{t}=\frac{1}{t(t-1)(t-2)}\left[t(t-1)(t-2)-2t^2(t-2)+t^3+(t-1)(t-2)\right]=\frac{2t^2-t+2}{t(t-1)(t-2)}$$

dans ces conditions : $E\left(\ln^2 \frac{X_t}{t}\right) \leq \frac{2t^2-t+2}{t(t-1)(t-2)} \underset{t>2}{\leq} \frac{2t^2}{t(t-1)(t-2)} \leq \frac{2t}{(t-2)^2}$

$\frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{t-2}$

Si $t>2$ : $E\left(\ln^2 \frac{X_t}{t}\right) \leq \frac{2t}{(t-2)^2}$.

d) $t \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

$t+n>2$. Alors $\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)^2$ est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et qui possède une espérance. L'inégalité de Markov donne alors :

$0 \leq P\left(\left|\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{E\left(\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)^2\right)}{\varepsilon^2} \underset{t+n>2}{\leq} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{2(t+n)}{(t+n-2)^2}$

$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{2(t+n)}{(t+n-2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{\varepsilon^2} \times \frac{1}{n}$.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{2(t+n)}{(t+n-2)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\varepsilon^2} \times \frac{1}{n} = 0$. Par encadrement il vient alors :

$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\ln \frac{X_{t+n}}{t+n}\right| \geq \varepsilon\right) = 0$ et ceci pour tout $\varepsilon$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

$\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.

Q4 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $\omega \in \{|D_n| > \varepsilon\}$. Supposons que $\omega \notin \{|A_n| > \frac{\varepsilon}{3}\} \cup \{|B_n| > \frac{\varepsilon}{3}\} \cup \{|C_n| > \frac{\varepsilon}{3}\}$

Alors $|A_n(\omega)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $|B_n(\omega)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $|C_n(\omega)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Donc $|D_n(\omega)| = |A_n(\omega) + B_n(\omega) + C_n(\omega)| \leq |A_n(\omega)| + |B_n(\omega)| + |C_n(\omega)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$

Et ainsi $|D_n(\omega)| \leq \varepsilon$ !! Donc $\omega \in \{|A_n| > \frac{\varepsilon}{3}\} \cup \{|B_n| > \frac{\varepsilon}{3}\} \cup \{|C_n| > \frac{\varepsilon}{3}\}$.

Finalement $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \{|D_n| > \varepsilon\} \subset \{|A_n| > \frac{\varepsilon}{3}\} \cup \{|B_n| > \frac{\varepsilon}{3}\} \cup \{|C_n| > \frac{\varepsilon}{3}\}$.

Remarque.. $\forall V_1 \in \mathcal{B}, \forall V_2 \in \mathcal{B}$, $P(V_1 \cup V_2) = P(V_1) + P(V_2) - P(V_1 \cap V_2) \leq P(V_1) + P(V_2)$.

Alors $\forall (V_1, V_2, V_3) \in \mathcal{B}^3$, $P(V_1 \cup V_2 \cup V_3) \leq P(V_1 \cup V_2) + P(V_3) \leq P(V_1) + P(V_2) + P(V_3)$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\{|D_n|>\varepsilon\} \subset \{|A_n|>\varepsilon/3\} \cup \{|B_n|>\varepsilon/3\} \cup \{|C_n|>\varepsilon/3\}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|D_n|>\varepsilon) \leqslant P(\{|A_n|>\varepsilon/3\} \cup \{|B_n|>\varepsilon/3\} \cup \{|C_n|>\varepsilon/3\})$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant P(|D_n|>\varepsilon) \leqslant P(|A_n|>\varepsilon/3) + P(|B_n|>\varepsilon/3) + P(|C_n|>\varepsilon/3)$.

Or $(A_n)_{n\geqslant 1}$, $(B_n)_{n\geqslant 1}$ et $(C_n)_{n\geqslant 1}$ convergent en probabilité vers 0.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|A_n|>\varepsilon/3) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(|B_n|>\varepsilon/3) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(|C_n|>\varepsilon/3) = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big( P(|A_n|>\varepsilon/3) + P(|B_n|>\varepsilon/3) + P(|C_n|>\varepsilon/3) \Big) = 0$

Par encadrement il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|D_n|>\varepsilon)$ et ceci pour tout $\varepsilon$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $\underline{(D_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge en probabilité vers 0... ou vers la variable certaine nulle}}$.

**b)** Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$. $\exists p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $|u_n - u| < \varepsilon/2$.

Soit $n \in [\![p,+\infty[\![$.

$\forall \omega \in \Omega$, $|V_n(\omega)| = |D_n(\omega) + u_n - u| \leqslant |D_n(\omega)| + |u_n - u| < |D_n(\omega)| + \frac{\varepsilon}{2}$.

$\forall \omega \in \Omega$, $|V_n(\omega)| > \varepsilon \Rightarrow \varepsilon < |D_n(\omega)| + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |D_n(\omega)| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc $\{|V_n|>\varepsilon\} \subset \{|D_n| > \frac{\varepsilon}{2}\}$ ; $P(|V_n|>\varepsilon) \leqslant P(|D_n|>\frac{\varepsilon}{2})$.

$\underline{\forall n \in [\![p,+\infty[\![, \ 0 \leqslant P(|V_n|>\varepsilon) \leqslant P(|D_n|>\frac{\varepsilon}{2})}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|D_n|>\frac{\varepsilon}{2}) = 0$ car $(D_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0.

Par encadrement on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|V_n|>\varepsilon) = 0$ et ceci pour tout $\varepsilon$ dans $\mathbb{R}_+^*$

Ainsi $\underline{(V_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge en probabilité vers 0... ou vers la variable certaine nulle}}$.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|(N+u+V_n) - (N+u)| \geqslant \varepsilon) = P(|V_n| \geqslant \varepsilon)$.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|(N+u+V_n) - (N+u)| \geqslant \varepsilon) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(|V_n| \geqslant \varepsilon) = 0$

Ainsi $\underline{(N+u+V_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge en probabilité vers la variable } N+u}$.

~~c) Notons $F_\Pi$ et $F_{N+U}$ les fonctions de répartition de $\Pi$ et $N+U$.~~

$F_\Pi$ et $F_{N+U}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ car $\Pi$ et $N+U$ sont des variables aléatoires à densité ( N est une variable aléatoire à densité... aussi )

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $N+D_n+U_n = N+U+V_n$.

Alors $(N+D_n+U_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers $N+U$. Donc $(N+D_n+U_n)_{n\geq 1}$

converge en loi vers $N+U$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} P(N+D_n+U_n \leq x) = F_{N+U}(x)$ (... car $F_{N+U}$ est continue en

tout point de $\mathbb{R}$).

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Pi$ et $N+D_n+U_n$ ont même loi. — suite constante !

Donc $F_{N+U}(x) = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} P(N+D_n+U_n \leq x) = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} P(\Pi \leq x) = P(\Pi\leq x) = F_\Pi(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{N+U}(x) = F_\Pi(x)$. $\underline{\underline{\Pi \text{ et } N+U \text{ ont même loi}}}$ car même fonction de répartition.

(Q5) a) $X_\alpha$ et $X_\beta$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et même dans $\mathbb{R}_+^*$ ...

Alors $T_{\alpha,\beta} = \dfrac{X_\alpha}{X_\beta}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $Q_{\alpha,\beta} = \ln T_{\alpha,\beta}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

Posons $U_\alpha = \ln X_\alpha$ et notons $F_{U_\alpha}$ sa fonction de répartition. Notons $F_{X_\alpha}$ la fonction de répartition de $X_\alpha$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{U_\alpha}(x) = P(\ln X_\alpha \leq x) = P(X_\alpha \leq e^x) = F_{X_\alpha}(e^x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{X_\alpha}(x) = \begin{cases} e^{-x} x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

$f_{X_\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi $F_{X_\alpha}$ est de classe $C^1$ au moins sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'_{X_\alpha}(x) = f_{X_\alpha}(x)$

$x \mapsto e^x$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \in \mathbb{R}_+^*$ et $F_{X_\alpha}$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par composition $F_{U_\alpha}$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'_{U_\alpha}(x) = e^x F'_{X_\alpha}(e^x) = e^x f_{X_\alpha}(e^x)$.

Donc $\underline{\underline{U_\alpha \text{ est une variable aléatoire à densité et } f_{U_\alpha} : x \mapsto e^x f_{X_\alpha}(e^x) \text{ en est une densité}}}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{U_\alpha}(x) \underset{e^x>0}{=} e^x \dfrac{e^{-e^x}(e^x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = \dfrac{e^{-e^x+\alpha x}}{\Gamma(\alpha)}$. $\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ f_{U_\alpha}(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-e^x+\alpha x}}$

Pour $V_\beta = \ln X_\beta$ et $\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ f_{V_\beta}(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} e^{-e^x+\beta x}}$.

$V_\beta$ est également une variable aléatoire à densité et $f_{V_\beta}$ en est une densité.

Alors $-V_\beta = -\ln X_\beta$ est également une variable aléatoire à densité et $f_{-V_\beta} : x \mapsto f_{V_\beta}(-x)$ en est une densité. $\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ f_{-V_\beta}(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} e^{-e^{-x}-\beta x}}$.

b) Notons que $Q_{\alpha,\beta} = \ln T_{\alpha,\beta} = \ln \dfrac{X_\alpha}{X_\beta} = \ln X_\alpha - \ln X_\beta = U_\alpha + (-V_\beta)$.

* $U_\alpha$ et $(-V_\beta)$ sont des variables aléatoires à densité de densité $f_{U_\alpha}$ et $f_{-V_\beta}$.
* $U_\alpha = \ln X_\alpha$ et $-V_\beta = -\ln X_\beta$ sont indépendantes car $X_\alpha$ et $X_\beta$ sont indépendantes.
* Considérons $\varphi : x \mapsto e^{-e^x+\alpha x}$. $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = (-e^x+\alpha)\varphi(x)$.

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} (-e^x+\alpha x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-e^x+\alpha x) = -\infty$.

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\varphi(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $M$ | $\searrow$ | $0$ |

$M = \varphi(\ln\alpha)$. Ainsi $\varphi$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Donc $\underline{f_{U_\alpha} = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\varphi \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$.

On peut alors dire que $\underline{Q_{\alpha,\beta} \text{ est une variable aléatoire à densité et}}$
$\underline{f_{Q_{\alpha,\beta}} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U_\alpha}(y) f_{-V_\beta}(x-y)\,dy \text{ en est une densité définie sur } \mathbb{R}}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f_{Q_{\alpha,\beta}}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^y+\alpha y}\, e^{-e^{-(x-y)}-\beta(x-y)}\,dy.$$

$$\underline{f_{Q_{\alpha,\beta}}(x) = \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+\beta)y}\, e^{-e^y(1+e^{-x})}\,dy}.$$

c) Soit $x\in\mathbb{R}$. Soit $(A,B)\in\mathbb{R}^2$. $y\mapsto e^y(1+e^{-x})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ce qui justifie le changement de variable $u=e^y(1+e^{-x})$ dans ce qui suit.

$$\int_A^B e^{(\alpha+\beta)y}e^{-e^y(1+e^{-x})}dy \underset{\begin{cases}u=e^y(1+e^{-x})\\ du=e^y(1+e^{-x})dy=u\,dy\end{cases}}{=} \int_{e^A(1+e^{-x})}^{e^B(1+e^{-x})}\left(\frac{u}{1+e^{-x}}\right)^{\alpha+\beta}e^{-u}\frac{du}{u} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+e^{-x})^{\alpha+\beta}}\int_{e^A(1+e^{-x})}^{e^B(1+e^{-x})} f_{X_{\alpha+\beta}}(u)\,du$$

$f_{X_{\alpha+\beta}}(u)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}e^{-u}u^{\alpha+\beta-1}$ si $u>0$

Or 1) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+\beta)y}e^{-e^y(1+e^{-x})}dy$ converge.

2) $\lim_{A\to-\infty} e^A(1+e^{-x})=0$ et $\lim_{B\to+\infty} e^B(1+e^{-x})=+\infty$

3) $\int_0^{+\infty} f_{X_{\alpha+\beta}}(u)\,du$ converge et vaut $1$.

Alors en faisant tendre $A$ vers $-\infty$ puis $B$ vers $+\infty$ il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha+\beta)y}e^{-e^y(1+e^{-x})}dy = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+e^{-x})^{\alpha+\beta}}.$$

Alors $f_{Q_{\alpha,\beta}}(x)= \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\;\dfrac{e^{-\beta x}}{(1+e^{-x})^{\alpha+\beta}} = \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)}\;\dfrac{e^{-\beta x}}{(1+e^{-x})^{\alpha+\beta}}$.

En multipliant haut et bas par $e^{(\alpha+\beta)x}$ il vient :

$$f_{Q_{\alpha,\beta}}(x)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\;\frac{e^{\alpha x}}{(e^x+1)^{\alpha+\beta}}$$ et ceci pour tout réel $x$.

**Remarques.** 1. $Q_{\alpha,\beta}$ suit la loi Bêta de deuxième espèce de paramètres $\alpha$ et $\beta$.

2. $B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$ ... voir plus loin (§5 e, fin de la page 13).

3. $f_{Q_{\alpha,\beta}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction de répartition $F_{Q_{\alpha,\beta}}$ de $Q_{\alpha,\beta}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ F'_{Q_{\alpha,\beta}}(x)=f_{Q_{\alpha,\beta}}(x)$.

d) $T_{\alpha,\beta} = \frac{X_\alpha}{X_\beta}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Notons $F_{T_{\alpha,\beta}}$ sa fonction de répartition.

$\forall x \in ]-\infty, 0]$, $F_{T_{\alpha,\beta}}(x) = 0$

$\forall x \in ]0, +\infty[$, $F_{T_{\alpha,\beta}}(x) = P(\frac{X_\alpha}{X_\beta} \leq x) = P(\ln X_\alpha - \ln X_\beta \leq \ln x) = F_{\varphi_{\alpha,\beta}}(\ln x)$

$F_{T_{\alpha,\beta}}$ est de classe $C^1$ sur $]-\infty, 0[$ car $F_{T_{\alpha,\beta}}$ est nulle sur $]-\infty, 0]$.

$x \mapsto \ln x$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $F_{\varphi_{\alpha,\beta}}$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. Par composition

$F_{T_{\alpha,\beta}}$ est de classe $C^1$ sur $]0, +\infty[$.

Alors $\underline{F_{T_{\alpha,\beta}} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*}$ et continue à gauche en 0.

$\lim_{x \to 0^+} F_{T_{\alpha,\beta}}(x) = \lim_{x \to 0^+} F_{\varphi_{\alpha,\beta}}(\ln x) = 0 = F_{T_{\alpha,\beta}}(0)$ car $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ ; $F_{T_{\alpha,\beta}}$ est

continue à droite en 0.

Finalement $\underline{F_{T_{\alpha,\beta}} \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

Ceci achève de montrer que $\underline{T_{\alpha,\beta} \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$

$\forall x \in ]-\infty, 0[$, $F_{T_{\alpha,\beta}}(x) = 0$ et $F'_{T_{\alpha,\beta}}(x) = 0$

$\forall x \in ]0, +\infty[$, $F_{T_{\alpha,\beta}}(x) = F_{\varphi_{\alpha,\beta}}(\ln x)$ et $F'_{T_{\alpha,\beta}}(x) = \frac{1}{x} F'_{\varphi_{\alpha,\beta}}(\ln x) = \frac{1}{x} f_{\varphi_{\alpha,\beta}}(\ln x)$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{T_{\alpha,\beta}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty, 0] \\ \frac{1}{x} f_{\varphi_{\alpha,\beta}}(\ln x) & \end{cases}$.

$f_{T_{\alpha,\beta}}$ est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec $F'_{T_{\alpha,\beta}}$ sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. $\underline{\underline{f_{T_{\alpha,\beta}} \text{ est une densité de } T_{\alpha,\beta}.}}$

Soit $x \in ]0, +\infty[$. $f_{T_{\alpha,\beta}}(x) = \frac{1}{x} f_{\varphi_{\alpha,\beta}}(\ln x) = \frac{1}{x} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \frac{e^{\alpha \ln x}}{(1+e^{\ln x})^{\alpha+\beta}}$.

$\underline{\underline{\forall x \in ]0, +\infty[,\ f_{T_{\alpha,\beta}}(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}}}$ et $\underline{\underline{\forall x \in ]-\infty, 0],\ f_{\alpha,\beta}(x) = 0.}}$

c) $J_{\alpha,\beta} = \dfrac{X_\alpha}{X_\alpha+X_\beta} = \dfrac{1}{1+T_{\beta,\alpha}}$ et $T_{\beta,\alpha}$ prend ses valeurs dans $]0,+\infty[$.

Alors $J_{\alpha,\beta}$ prend ses valeurs dans $]0,1[$. Notons $F_{J_{\alpha,\beta}}$ sa fonction de répartition.

$\forall z \in ]-\infty,0]$, $F_{J_{\alpha,\beta}}(z)=0$ ; $\underline{F_{J_{\alpha,\beta}} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } ]-\infty,0]}$

$\forall z \in [1,+\infty[$ $F_{J_{\alpha,\beta}}(z)=1$ ; $\underline{F_{J_{\alpha,\beta}} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [1,+\infty[}$.

$\forall z \in ]0,1[$, $F_{J_{\alpha,\beta}}(z) = P\left(\dfrac{1}{1+T_{\beta,\alpha}} \leq z\right) \underset{*}{=} P\left(\dfrac{1}{z} \leq 1+T_{\beta,\alpha}\right) = P\left(\dfrac{1-z}{z} \leq T_{\beta,\alpha}\right)$.

$*\begin{cases} 1+T_{\beta,\alpha} \text{ prend ses valeurs dans } ]1,+\infty[ . \\ z>0 \end{cases}$

$\forall z \in ]0,1[$, $F_{J_{\alpha,\beta}}(z) = 1 - P\left(T_{\beta,\alpha} < \dfrac{1-z}{z}\right) = 1 - P\left(T_{\beta,\alpha} \leq \dfrac{1-z}{z}\right) = 1 - F_{T_{\beta,\alpha}}\left(\dfrac{1-z}{z}\right)$.

$f_{T_{\beta,\alpha}}$ est au moins continue sur $\mathbb{R}^*$ donc $F_{T_{\beta,\alpha}}$ est au moins de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$\forall z \in \mathbb{R}^*$, $F'_{T_{\beta,\alpha}}(z) = f_{T_{\beta,\alpha}}(z)$.

$z \mapsto \dfrac{1-z}{z}$ est de classe $C^1$ sur $]0,1[$ et $\forall z \in ]0,1[$, $\dfrac{1-z}{z} \in \mathbb{R}^*$

Par composition $\underline{F_{J_{\alpha,\beta}} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } ]0,1[}$.

Ainsi 1) $F_{J_{\alpha,\beta}}$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

2) $F_{J_{\alpha,\beta}}$ est continue à gauche en 0 et à droite en 1.

$\lim\limits_{z\to 0^+} F_{J_{\alpha,\beta}}(z) = \lim\limits_{z \to 0^+} \left(1 - F_{T_{\beta,\alpha}}\left(\dfrac{1-z}{z}\right)\right) \underset{*}{=} 1-1=0 = F_{J_{\alpha,\beta}}(0)$ ; $F_{J_{\alpha,\beta}}$ est continue à droite en 0.

$*\ \lim\limits_{z\to 0^+} \dfrac{1-z}{z} = +\infty$

$\lim\limits_{z\to 1^-} F_{J_{\alpha,\beta}}(z) = \lim\limits_{z\to 1^-} \left(1 - F_{T_{\beta,\alpha}}\left(\dfrac{1-z}{z}\right)\right) = 1 - F_{T_{\beta,\alpha}}(0) = 1 - \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_{T_{\beta,\alpha}}(u)\,du = 1-0 = 1 = F_{J_{\alpha,\beta}}(1)$ ;

$F_{J_{\alpha,\beta}}$ est continue à gauche en 1.

Finalement $F_{J_{\alpha,\beta}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ceci achève de montrer que $J_{\alpha,\beta}$ est une variable aléatoire à densité.

$F_{J_{\alpha,\beta}}$ est constante sur $]-\infty,0[$ et sur $]1,+\infty[$. $\forall z \in ]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$, $F'_{J_{\alpha,\beta}}(z)=0$.

$\forall z \in ]0,1[$, $F_{J_{\alpha,\beta}}(z) = 1 - F_{T_{\beta,\alpha}}\left(\frac{1-z}{z}\right)$. Soit $z \in ]0,1[$. $\frac{1-z}{z} = \frac{1}{z} - 1$.

$$F'_{J_{\alpha,\beta}}(z) = 0 - \left(-\frac{1}{z^2}\right) f_{T_{\beta,\alpha}}\left(\frac{1-z}{z}\right) \underset{\frac{1-z}{z}\in]0,+\infty[}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{z^2} \times \frac{1}{B(\beta,\alpha)} \times \frac{\left(\frac{1-z}{z}\right)^{\beta-1}}{\left(1+\frac{1-z}{z}\right)^{\beta+\alpha}}.$$

$B(\beta,\alpha) = B(\alpha,\beta)$

$$F'_{J_{\alpha,\beta}}(z) \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{z^2}\,\frac{1}{B(\alpha,\beta)} \times \frac{(1-z)^{\beta-1}}{z^{\beta-1}\,(1/z)^{\beta+\alpha}} = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\, z^{-2-(\beta-1)+\beta+\alpha}\,(1-z)^{\beta-1}$$

$$F'_{J_{\alpha,\beta}}(z) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\, z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}.$$

$\forall z \in ]0,1[$, $\underline{F'_{J_{\alpha,\beta}}(z) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\, z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}.}$

Posons $\forall z \in \mathbb{R}$, $f_{J_{\alpha,\beta}}(z) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\, z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} & \text{si } z \in ]0,1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$f_{J_{\alpha,\beta}}$ est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec $F'_{J_{\alpha,\beta}}$ sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

$\underline{f_{J_{\alpha,\beta}} \text{ est une densité de } J_{\alpha,\beta} = \frac{X_\alpha}{X_\alpha + X_\beta}}$. $J_{\alpha,\beta}$ suit la loi bêta de première espèce de paramètres $\alpha$ et $\beta$.

<u>Remarque</u> : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{J_{\alpha,\beta}}(z)\,dz$ existe et vaut 1. Donc $\int_0^1 f_{J_{\alpha,\beta}}(z)\,dz$ existe et vaut 1.

Ainsi $\underline{\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}\,dz \text{ existe et vaut } B(\alpha,\beta) \text{ ou } \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}}$. $\underline{B(\alpha,\beta) = \int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}dz}$

R



PARTIE II



(Q6) * $S_0(\Omega)=\{0\}$ et $P(S_0=0)=1$. $E(S_0)=0$ et $V(S_0)=0$

* Soit $k\in\mathbb{N}^*$. 1) $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ sont indépendantes

2) $\forall i\in[\![1,k]\!]$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ ou $Y_i \hookrightarrow \Gamma(1,1)$

le cours indique alors que $Y_1+\dots+Y_k \hookrightarrow \Gamma(1,k)$ ou $S_k \hookrightarrow \gamma(k)$.

Alors $E(S_k)=k$ et $V(S_k)=k$.

(Q7) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{X_t+S_{k-1}}{X_t+S_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[\ln(X_t+S_{k-1})-\ln(X_t+S_k)\right]=\ln(X_t+S_0)-\ln(X_t+S_n)$

En remarquant que $S_0=0$ il vient : $\ln(X_t)=\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{X_t+S_{k-1}}{X_t+S_k}\right)+\ln(X_t+S_n)$.

⚠ b) Ici nous élargissons l'hypothèse insuffisante du texte en supposant que : les variables aléatoires de la suite $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et la variable aléatoire $X_\alpha$ sont (mutuellement) indépendantes pour tout réel $\alpha$ strictement positif.

Soit $m\in\mathbb{N}^*$, $Y_1, Y_2, \dots, Y_m, X_t$ sont indépendantes, alors $S_m$ et $X_t$ sont indépendantes. De plus $S_m \hookrightarrow \gamma(m)$ ou $S_m \hookrightarrow \Gamma(1,m)$, et $X_t \hookrightarrow \gamma(t)$ ou $X_t \hookrightarrow \Gamma(1,t)$

Alors $X_t+S_m$ suit la loi gamma de paramètre $t+m$.

Or $X_{t+m}$ suit la loi gamma de paramètre $t+m$.

Ainsi $X_t+S_m$ et $X_{t+m}$ ont même loi pour tout $m$ dans $\mathbb{N}^*$.

Mieux, pour tout $m$ dans $\mathbb{N}$, la loi de $X_t+S_m$ est celle de $X_{t+m}$.

(Q8) a) $R_{t,1}=\frac{X_t+S_0}{X_t+S_1}=\frac{X_t}{X_t+Y_1}$. $R_{t,2}=\frac{X_t+S_1}{X_t+S_2}=\frac{X_t+Y_1}{X_t+Y_1+Y_2}$.

$X_t$ et $Y_1$ sont indépendantes, $X_t \hookrightarrow \gamma(t)$ et $Y_1 \hookrightarrow \gamma(1)$. Alors d'après le troisième point admis : $\frac{X_t}{X_t+Y_1}$ et $X_t+Y_1$ sont indépendantes

Comme les variables $X_t, Y_1, Y_2$ sont indépendantes :

$\frac{X_t}{X_t+Y_1}$, $X_t+Y_1$ et $Y_2$ sont indépendantes. Alors

d'après le premier point admis, $\frac{X_t}{X_t+Y_1}$ et $\frac{X_t+Y_1}{X_t+Y_1+Y_2}$ sont indépendantes

car $u \mapsto u$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $(u,v) \to \frac{u}{u+v}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

Ainsi <u>$R_{t,1}$ et $R_{t,2}$ sont indépendantes.</u>

b) Ici nous étendons encore les hypothèses d'indépendance en supposant que :

les variables aléatoires des suites $(X_{t+k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont (mutuellement indépendantes).

Rappel ! Soient $\hat{U}, \hat{V}, \hat{U}', \hat{V}'$ quatre variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

On suppose que : 1) $\hat{U}$ et $\hat{U}'$ ont même loi.

2) $\hat{V}$ et $\hat{V}'$ ont même loi

3) $\hat{U}$ et $\hat{V}$ sont indépendantes

4) $\hat{U}'$ et $\hat{V}'$ sont indépendantes.

Alors $\hat{U}+\hat{V}$ et $\hat{U}'+\hat{V}'$ ont même loi. <u>Résultat que l'on peut généraliser à des sommes finies</u>

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\frac{X_t}{X_t+S_n}$ et $X_t+S_n$ sont indépendantes car $X_t$ et $S_n$ sont

indépendantes et $X_t \hookrightarrow \gamma(t)$ et $S_n \hookrightarrow \gamma(n)$.

Alors $\ln \frac{X_t}{X_t+S_n}$ et $\ln(X_t+S_n)$ sont indépendantes.

Notons alors qu'avec la seconde extension de l'indépendance proposée :

$\frac{X_t}{X_t+S_n}$ et $X_{t+n}$ sont indépendantes. Donc $\ln \frac{X_t}{X_t+S_n}$ et $\ln X_{t+n}$

sont également indépendantes.

De plus $\ln \frac{X_t}{X_t+S_n}$ a même loi que $\ln \frac{X_t}{X_t+S_n}$ (!!) et $\ln(X_t+S_n)$ et

$\ln X_{t+n}$ ont même loi puisque $X_{t+n}$ et $X_t+S_n$ ont même loi ($X_{t+n} \hookrightarrow \Gamma(t+n)$

et $X_t+S_n \hookrightarrow \Gamma(t+n)$ car $X_t \hookrightarrow \Gamma(t)$, $S_n \hookrightarrow \Gamma(n)$ et $X_t$ et $S_n$ sont indépendantes).

Le rappel permet de dire que $\ln \frac{X_t}{X_t+S_n} + \ln(X_t+S_n)$ a même loi que

$\ln \frac{X_t}{X_t+S_n} + \ln X_{t+n}$.

Notons alors que $\ln \frac{X_t}{X_t+S_n} = \ln\left(\prod_{\ell=1}^{n} \frac{X_t+S_{\ell-1}}{X_t+S_\ell}\right) = \sum_{\ell=1}^{n} \ln \frac{X_t+S_{\ell-1}}{X_t+S_\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} \ln R_{t,\ell}$

De plus $\ln \frac{X_t}{X_t+S_n} + \ln(X_t+S_n) = \ln X_t$.

Alors $\ln X_t$ et $\sum_{\ell=1}^{n} \ln R_{t,\ell} + \ln X_{t+n}$ ont même loi.

Q9 a) Posons $V = -\ln U$. Notons $F_U$ et $F_V$ les fonctions de répartition de $U$ et $V$.

Rappelons que $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1])$. $V$ prend ses valeurs dans $[0,+\infty[$.

$\forall x \in ]-\infty,0[,\ F_V(x) = 0$ et $\forall x \in [0,+\infty[,\ F_V(x) = P(-\ln U \leq x) = P(U \geq e^{-x})$.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ F_V(x) = 1 - P(U < e^{-x}) \underset{\uparrow}{=} 1 - P(U \leq e^{-x}) = 1 - F_U(e^{-x})$.

$U$ est une v.a.r. à densité

Rappelons que $\forall z \in [0,1],\ F_U(z) = z$.

Alors $\forall x \in [0,+\infty[,\ F_V(x) = 1 - e^{-x}$. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty,0[ \\ 1-e^{-x} & \text{si } x \in [0,+\infty[ \end{cases}$

Donc $V \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

$-\ln U$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

b) Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. $R_{t,\ell} = \dfrac{X_t + S_{\ell-1}}{X_t + S_\ell} = \dfrac{X_t + S_{\ell-1}}{(X_t + S_{\ell-1}) + Y_\ell}$.

1) $X_t + S_{\ell-1} \hookrightarrow \gamma(t+\ell-1)$ (y compris lorsque $\ell = 1$)

2) $Y_\ell \hookrightarrow \gamma(1)$

3) $X_t + S_{\ell-1}$ et $Y_\ell$ sont indépendantes.

Nous pouvons alors utiliser I Q 5 e) pour dire que <u>$R_{t,\ell}$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction $f_{J_{t+\ell-1,1}}$.</u>

$\forall z \in ]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[,\ f_{J_{t+\ell-1,1}}(z) = 0$.

$\forall z \in ]0,1[,\ f_{J_{t+\ell-1,1}}(z) = \dfrac{1}{B(t+\ell-1,1)}\ z^{t+\ell-2}$.

Or $B(t+\ell-1,1) = \dfrac{\Gamma(t+\ell-1)\Gamma(1)}{\Gamma((t+\ell-1)+1)} = \dfrac{\Gamma(t+\ell-1)\times 1}{(t+\ell-1)\Gamma(t+\ell-1)} = \dfrac{1}{t+\ell-1}$.

<u>Donc $\forall z \in \mathbb{R},\ f_{J_{t+\ell-1,1}}(z) = \begin{cases} (t+\ell-1) z^{t+\ell-2} & \text{si } z \in ]0,1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.</u>

c) Posons $H = U_\ell^{\frac{1}{t+\ell-1}}$. Notons $F_H$ la fonction de répartition de $H$.

$H$ prend ses valeurs dans $]0,1]$. $\forall z \in ]-\infty, 0]$, $F_H(z) = 0$ et $\forall z \in [1, +\infty[$, $F_H(z) = 1$.

Soit $z \in ]0,1[$. $F_H(z) = P(U_\ell^{\frac{1}{t+\ell-1}} \leq z) = P(U_\ell \leq z^{t+\ell-1}) \underset{\uparrow}{=} z^{t+\ell-1}$.

$z^{t+\ell-1} \in ]0,1[$

$\forall z \in \mathbb{R},\ F_H(z) = \begin{cases} z^{t+\ell-1} & \text{si } z \in ]0,1[ \\ 0 & \text{si } z \in ]-\infty, 0] \\ 1 & \text{si } z \in [1, +\infty[ \end{cases}$.

$F_H$ est de classe $C^1$ sur $]0,1[$, $]-\infty,0]$ et $[1,+\infty[$. En particulier $F_H$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$, continue à gauche en 0 et à droite en 1.

$\lim\limits_{z\to 0^+} F_H(z) = \lim\limits_{z\to 0^+} z^{t+\ell-1} = 0 = F_H(0)$ ; $F_H$ est continue à droite en 0.

$\lim\limits_{z\to 1^-} F_H(z) = \lim\limits_{z\to 1^-} z^{t+\ell-1} = 1 = F_H(1)$ ; $F_H$ est continue à gauche en 1.

Finalement $F_H$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. H est une variable aléatoire à densité.

$\forall z \in ]0,1[$, $F'_H(z) = (t+\ell-1)\, z^{t+\ell-2}$ et $\forall z \in ]-\infty,0[\,\cup\,]1,+\infty[$, $F'_H(z)=0$.

Alors $f_{J_{t+\ell-1,1}}$ est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec $F'_H$ sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Alors $f_{J_{t+\ell-1,1}}$ est une densité de $H = U_\ell^{\frac{1}{t+\ell-1}}$ ... et de $R_{t,\ell}$.

Donc $R_{t,\ell}$ et $U_\ell^{\frac{1}{t+\ell-1}}$ ont même loi.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $T_n = \sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\ell+1} - \frac{Y_{\ell+1}}{t+\ell}\right) + \ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right) + d_{n,t} - \gamma$ et simplifions.

$$T_n = \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell}}_{a_n} - \sum_{\ell=1}^{n} \frac{Y_\ell}{t+\ell-1} + \ln(X_{t+n}) - \ln(t+n) + \gamma + \ln(t+n) - \ln n - \gamma = -\sum_{\ell=1}^{n} \frac{Y_\ell}{t+\ell-1} + \ln(X_{t+n})$$

$$T_n = \sum_{\ell=1}^{n}\left(-\frac{Y_\ell}{t+\ell-1}\right) + \ln(X_{t+n}).$$

. Soit $\ell \in [\![1,n]\!]$. $Y_\ell$ a même loi que $-\ln U_\ell$ d'après a.

Alors $-Y_\ell$ a même loi que $\ln U_\ell$ et $-\frac{Y_\ell}{t+\ell-1}$ a même loi que $\frac{1}{t+\ell-1}\ln U_\ell$.

Pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$, $-\frac{Y_\ell}{t+\ell-1}$ a même loi que $\ln U_\ell^{\frac{1}{t+\ell-1}}$

Or pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$, $U_\ell^{\frac{1}{t+\ell-1}}$ a même loi que $R_{t,\ell}$ donc $\ln U_\ell^{\frac{1}{t+\ell-1}}$ a même loi que $\ln R_{t,\ell}$. Ainsi pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$, $-\frac{Y_\ell}{t+\ell-1}$ a même loi que $\ln R_{t,\ell}$.

De plus 1) $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sont indépendantes donc $-\frac{Y_1}{t}, -\frac{Y_2}{t+1}, \dots, -\frac{Y_n}{t+n-1}$ sont indépendantes

2) $R_{t,1}, R_{t,2}, \dots, R_{t,n}$ sont indépendantes donc $\ln R_{t,1}, \ln R_{t,2}, \dots, \ln R_{t,n}$ sont indépendantes.

Le rappel permet de dire alors que $\sum_{\ell=1}^{n} -\frac{Y_\ell}{t+\ell-1}$ et $\sum_{\ell=1}^{n} \ln R_{t,\ell}$ ont même loi.

De plus $\sum_{\ell=1}^{n}\left(-\frac{Y_\ell}{t+\ell-1}\right)$ et $X_{t+n}$ sont indépendantes ; $\sum_{\ell=1}^{n}\left(-\frac{Y_\ell}{t+\ell-1}\right)$ et $\ln X_{t+n}$ aussi.

Nous avons également vu que $\sum_{\ell=1}^{n} \ln R_{t,\ell} = \ln \frac{X_t}{X_t+S_n}$ et $\ln X_{t+n}$ sont indépendantes (fin de la page 15).

Alors $\sum_{\ell=1}^{n}\left(-\frac{Y_\ell}{t+\ell-1}\right) + \ln X_{t+n}$ et $\sum_{\ell=1}^{n} \ln R_{t,\ell} + \ln X_{t+n}$ ont même loi.

Or la loi de $\sum_{\ell=1}^{n} \ln R_{t,\ell} + \ln X_{t+n}$ est la même que celle de $\ln X_t$.

Ainsi $T_n = \sum_{\ell=1}^{n}\left(-\frac{Y_\ell}{t+\ell-1}\right) + \ln X_{t+n}$ a même loi que $\ln X_t$.

Finalement $\ln X_t$ a même loi que $\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\ell+1} - \frac{Y_{\ell+1}}{t+\ell}\right) + \ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right) + d_{n,t} - \gamma$.

(Q10) Notons que : 1) $E(\ln X_t)$ existe et vaut $\psi(t)$.

2) $E(Y_{\ell+1})$ existe et vaut 1 pour tout $\ell \in \mathbb{N}$.

3) d'après Q3 c) $E\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)$ existe et

$-\frac{1}{t+n-1} \leq E\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right) \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui donne par encadrement $\lim_{n \to +\infty} E\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right) = 0$.

4) La suite $(d_{n,t})_{n \geq 1}$ converge vers 0 d'après 1.c

~~d'après Q9 ln $X_t$ et $\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{Y_{\ell+1}}{t+\ell}\right)+\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)+d_{n,t}-\delta$ ont~~

même loi donc même espérance. ce qui précède et la linéarité de l'espérance

donne : $E(\ln X_t)=\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{E(Y_{\ell+1})}{t+\ell}\right)+E\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)+d_{n,t}-\delta$.

Donc $\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{1}{t+\ell}\right)=E(\ln X_t)-E\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)-d_{n,t}+\delta$ (car $E(Y_{\ell+1})=1$).

Alors $\lim_{n\to+\infty}\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{1}{t+\ell}\right)=E(\ln X_t)-0-0+\delta$.

La série de terme général $\frac{1}{\ell+1}-\frac{1}{t+\ell}$ converge et $\sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{1}{t+\ell}\right)=E(\ln X_t)+\delta$.

Ainsi $\underline{\underline{E(\ln X_t)=\psi(t)=-\delta+\sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{1}{t+\ell}\right)}}$.

1) $V(\ln X_t)$ existe et vaut $\psi'(t)$.

2) $V(Y_{\ell+1})$ existe et vaut 1 pour tout $\ell\in\mathbb{N}$.

3) $V\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)$ existe pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$ et pour tout $n\in[\![2,+\infty[\![$ :

$0\leq E\left(\ln^2\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)\leq\frac{2(t+n)}{(t+n-2)^2}$. Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{2(t+n)}{(t+n-2)^2}=0$ il

vient par encadrement $\lim_{n\to+\infty}E\left(\ln^2\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)=0$.

Alors $\lim_{n\to+\infty}V\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left[E\left(\ln^2\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)-\left(E\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)\right)^2\right]=0-0^2=0$.

4) Les variables aléatoires $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ et $\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)$ sont indépendantes

pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Même chose pour $-\frac{Y_1}{t},-\frac{Y_2}{t+1},\dots,-\frac{Y_n}{t+n-1}$ et $\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)$.

5) $\ln X_t$ a même loi que $\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{Y_{\ell+1}}{t+\ell}\right)+\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)+d_{n,t}-\delta$.

Ce qui précède donne alors :

$$\psi'(t) = V(\ln X_t) = V\left(\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\ell+1} - \frac{Y_{\ell+1}}{t+\ell}\right) + \ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right) + d_{n,t} - \gamma\right).$$

$$\psi'(t) = V(\ln X_t) = V\left(-\frac{Y_1}{t} - \frac{Y_2}{t+1} - \dots - \frac{Y_n}{t+n-1} + \ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right) + \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{1}{\ell+1} + d_{n,t} - \gamma\right)$$

$$\psi'(t) = V(\ln X_t) = V\left(-\frac{Y_1}{t}\right) + V\left(-\frac{Y_2}{t+1}\right) - \dots - V\left(\frac{Y_n}{t+n-1}\right) + V\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)$$

$$\psi'(t) = V(\ln X_t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{V(Y_{\ell+1})}{(t+k)^2} + V\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(t+k)^2} + V\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right).$$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(t+k)^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(V(\ln X_t) - V\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)\right) = V(\ln(X_t))$.

Alors la série de terme général $\frac{1}{(t+k)^2}$ converge et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(t+k)^2} = V(\ln(X_t)) = \psi'(t)$

donc $\underline{\underline{V(\ln X_t) = \psi'(t) = \sum\limits_{\ell=0}^{+\infty}\frac{1}{(t+\ell)^2}}}$.

**Q11** $\forall t\in\,]1,+\infty[$, $-\frac{1}{t-1} \leq E\left(\ln\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) = E(\ln X_t - \ln t) \leq 0$.

$\forall t\in\,]1,+\infty[$, $-\frac{1}{t-1} \leq E(\ln X_t) - \ln t \leq 0$.

$\forall t\in\,]1,+\infty[$, $-\frac{1}{t-1} \leq \psi(t) - \ln t \leq 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t-1}\right) = 0$

par encadrement on obtient : $\underline{\underline{\lim\limits_{t\to+\infty}(\psi(t) - \ln t) = 0}}$.

**Q12** • $G_p$ est une fonction du $p$-échantillon $(W_1, W_2, \dots, W_p)$ i.i.d. de la loi de $W = U^{1/\gamma}$ alors $G_p$ est une statistique $-p\left(\sum\limits_{i=1}^{p}\ln W_i\right)^{-1}$.

Ainsi, d'après le programme, $\underline{\underline{G_p \text{ est un estimateur du paramètre } p}}$.

Soit $i \in [\![1, p]\!]$. $W_i$ a même loi que $W$ donc $\ln W_i$ a même loi que $\ln W = \frac{1}{\mu} \ln U$.

Alors $-\mu \ln W_i$ a même loi que $-\ln U$ donc $-\mu \ln W_i \hookrightarrow \gamma(1)$.

Alors $\sum_{i=1}^{p} (-\mu \ln W_i) \hookrightarrow \Gamma(p)$ car $-\mu \ln W_1, -\mu \ln W_2, \dots, -\mu \ln W_p$ sont indépendantes.

Donc $\sum_{i=1}^{p}(-\mu \ln W_i)$ suit la même loi que $X_p$.

Donc $\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{p} (-\mu \ln W_i)}$ suit la même loi que $\dfrac{1}{X_p}$. Or $\dfrac{1}{X_p}$ possède une espérance

qui vaut $\dfrac{1}{p-1}$ (Q 3 a) car $p > 1$ !)

Donc $\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{p} (-\mu \ln W_i)}$ possède une espérance qui vaut $\dfrac{1}{p-1}$.

Donc $\dfrac{p}{\sum_{i=1}^{p} (-\ln W_i)}$ possède une espérance qui vaut $\dfrac{p\mu}{p-1}$. Or $\dfrac{p}{\sum_{i=1}^{p}(-\ln W_i)} = G_p$.

Donc $\underline{\underline{E(G_p) \text{ existe et vaut } \frac{p}{p-1}\mu}}$.

$\underline{\underline{G_p \text{ n'est pas un estimateur sans biais de } \mu}}$. $\underline{\underline{G_p \text{ est biaisé}}}$.

mais $\lim_{p \to +\infty} E(G_p) = \lim_{p \to +\infty} \left(\frac{p}{p-1} \mu\right) = \mu$ ; $\underline{\underline{G_p \text{ est un estimateur asymptotiquement}}}$

$\underline{\underline{\text{sans biais de } \mu}}$. Montrons que $G_p$ converge en probabilité vers $\mu$.

$p > 3$ donc $\left(\dfrac{1}{X_p}\right)^2$ possède une espérance qui vaut $\dfrac{1}{(p-1)(p-2)}$ comme nous

l'avons vu p 5 (ici $p > 3$).

Alors $\left(\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{p} (-\mu \ln W_i)}\right)^2$ possède une espérance qui vaut également $\dfrac{1}{(p-1)(p-2)}$

Alors $E(G_p^2)$ existe et vaut $\frac{(\mu p)^2}{(p-1)(p-2)}$.

$(G_p-\mu)^2 = G_p^2 - 2\mu G_p + \mu^2$. Or $G_p^2$ et $G_p$ possèdent une espérance.

Ainsi $E((G_p-\mu)^2)$ existe et vaut $E(G_p^2) - 2\mu E(G_p) + \mu^2$.

$E((G_p-\mu)^2) = \frac{(\mu p)^2}{(p-1)(p-2)} - 2\mu \frac{p}{p-1}\mu + \mu^2 = \frac{\mu^2}{(p-1)(p-2)}\left[p^2 - 2p(p-2) + (p-1)(p-2)\right]$.

$E((G_p-\mu)^2) = \frac{(p+2)\mu^2}{(p-1)(p-2)}$. Notons que $\lim_{p\to+\infty} E((G_p-\mu)^2) = 0$.

d'après Markov :
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq P(|G_p-\mu| \geq \varepsilon) = P((G_p-\mu)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E((G_p-\mu)^2)}{\varepsilon^2}$ car $(G_p-\mu)^2$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et possède une espérance.

Donc, par encadrement, on a : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{p\to+\infty} P(|G_p-\mu| \geq \varepsilon) = 0$.

G est un estimateur convergent de $\mu$.

(Q13) a) random fournit un nombre au hasard de l'intervalle $[0,1[$

1-random fournit un nombre au hasard de l'intervalle $]0,1]$

1-random simule alors une loi uniforme sur un intervalle (!) d'extrémités

0 et 1 ...

Alors $-\ln(1-\text{random})$ simulera une loi exponentielle de paramètre 1

d'après Q9a et $-\ln(1-\text{random})/\text{lambda}$ simule une loi exponentielle

de paramètre $\lambda$ (rappel.. si $X \hookrightarrow \Gamma(b,\nu)$ et si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha X \hookrightarrow \Gamma(\alpha b,\nu)$).

cette fonction simule une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle

de paramètre $\lambda$.

b)

```
Program HEC2010;

~~function X(lambda:real):real;~~

begin

X:=-ln(1-random)/lambda;
end;

function g(n:integer):real;

var k:integer;s:real;

begin
s:=0;
for k:=1 to n do s:=s+X(1);
g:=s;
end;
```

← une fonction g utilisant X

```
function g2(n:integer):real;

var k:integer;s:real;

begin
s:=0;
for k:=1 to n do s:=s-ln(1-random);
g2:=s;
end;
```

← une fonction g qui n'utilise pas X.

```
function m(p:integer):real;

var k:integer;s:real;

begin
s:=0;
for k:=1 to p do s:=s-ln(1-random);
m:=p/s;
end;
```

← une fonction m qui n'utilise ni X ni g.

```
var k:integer;


begin
randomize;

for k:=1 to 100 do
writeln(m(10*k));
readln;

end.
```

← on appelle m pour des valeurs de p de plus en plus grandes

cf comme $\left(\frac{p}{X_p}\right)_{p\geq 1}$ converge en probabilité vers 0 on doit constater que l'on obtient des valeurs qui se rapprochent de 0. Ce n'est pas évident lorsque l'on exécute le programme ...

⚠ Dans la suite nous supposerons que si $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels strictement positifs deux à deux distincts, l'ensemble des variables aléatoires appartenant aux suites $(X_{a_n})_{n\geq 0}$ et $(Y_k)_{k\geq 1}$ sont indépendantes.

## PARTIE III Quelques propriétés de la fonction $\Gamma$.

**Q15** a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$

indices pairs ! indices impairs !

$$2\sum_{k=0}^{2n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{k+1}}{t+k}\right)=2\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{a_{2k+1}}{t+2k}\right)+2\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2k+2}-\frac{a_{2k+2}}{t+2k+1}\right)\right.$$

$$2\sum_{k=0}^{2n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{k+1}}{t+k}\right)=2\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)\right)+4\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+2}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2k+1}}{\frac{t+2k}{2}}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2k+2}}{\frac{t+1+2k}{2}}.$$

$$2\sum_{k=0}^{2n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{k+1}}{t+k}\right)=2\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{2k+2}-\frac{a_{2k+1}}{\frac{t}{2}+k}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{2k+2}-\frac{a_{2k+2}}{\frac{t+1}{2}+k}\right).$$

Donc $$2\sum_{k=0}^{2n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{k+1}}{t+k}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{2k+1}}{\frac{t}{2}+k}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{2k+2}}{\frac{t+1}{2}+k}\right)+2\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)\right).$$

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $w_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Or $\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}$ ; $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=h_{2n}-\frac{1}{2}h_n$

Donc $w_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=h_{2n}-\frac{1}{2}h_n-\frac{1}{2}h_n$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ w_n=h_{2n}-h_n.$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $w_n=h_{2n}-\ln 2n-(h_n-\ln n)+\ln 2n-\ln n=\gamma_{2n}-\gamma_n+\ln 2$.

$\lim_{n\to+\infty} w_n=\gamma-\gamma+\ln 2$. $\lim_{n\to+\infty} w_n=\ln 2$.

c) D'après ce qui précède, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\mathbb{R}_+^*$

$$2\sum_{k=0}^{2n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{\gamma_{k+1}}{t+k}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{\gamma_{2k+1}}{\frac{t}{2}+k}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{\gamma_{2k+2}}{\frac{t+1}{2}+k}\right)+2w_n.$$

D'après Q9 d] $2\ln X_t$ a même loi que $2\sum_{\ell=0}^{2n-1}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{Y_{\ell+1}}{t+\ell}\right)+2\ln\left(\frac{X_{t+2n}}{t+2n}\right)+2d_{2n,t}-2\gamma$

Donc $2\ln X_t$ a même loi que :

$$\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{Y_{2\ell+1}}{\frac{t}{2}+\ell}\right)+\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{Y_{2\ell+2}}{\frac{t+1}{2}+\ell}\right)+2\omega_n+2\ln\left(\frac{X_{t+2n}}{t+2n}\right)+2d_{2n,t}-2\gamma .$$

ok pour $Y_{2\ell+1}$ ?!

Notons aussi que $\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{Y_{2\ell+1}}{\frac{t}{2}+\ell}\right)+\ln\left(\frac{X_{\frac{t}{2}+n}}{\frac{t}{2}+n}\right)+d_{n,\frac{t}{2}}-\gamma$ a même loi que $\ln X_{\frac{t}{2}}$.

ok pour $Y_{2\ell+2}$ ?!

$\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\ell+1}-\frac{Y_{2\ell+2}}{\frac{t+1}{2}+\ell}\right)+\ln\left(\frac{X_{\frac{t+1}{2}+n}}{\frac{t+1}{2}+n}\right)+d_{n,\frac{t+1}{2}}-\gamma$ a même loi que $\ln X_{\frac{t+1}{2}}$.

Alors $2\ln X_t$ a même loi que :

$$\ln X_{\frac{t}{2}}+\ln X_{\frac{t+1}{2}}-\underbrace{\ln\left(\frac{X_{\frac{t}{2}+n}}{\frac{t}{2}+n}\right)}_{A_n}-\underbrace{\ln\left(\frac{X_{\frac{t+1}{2}+n}}{\frac{t+1}{2}+n}\right)}_{B_n}+\underbrace{2\ln\left(\frac{X_{t+2n}}{t+2n}\right)}_{C_n}+\underbrace{2d_{2n,t}-d_{n,\frac{t}{2}}-d_{n,\frac{t+1}{2}}+2\omega_n}_{u_n}$$

$$D_n=A_n+B_n+C_n$$

$2\ln X_t$ a même loi que $\ln X_{\frac{t}{2}}+\ln X_{\frac{t+1}{2}}+D_n+u_n$.

D'après Q3 a] les suites $(A_n)_{n\geq1}$, $(B_n)_{n\geq1}$ et $(C_n)_{n\geq1}$ converge en probabilité vers 0 donc la suite $(D_n)_{n\geq1}$ converge également en probabilité vers 0 d'après Q4 a]

Notons que $\lim_{n\to+\infty}u_n=2\times0-0-0+2\ln2=2\ln2$.

$$\ln X_{\frac{t}{2}}+\ln X_{\frac{t+1}{2}}+2\ln2+\underbrace{D_n+u_n-2\ln2}_{v_n}=\ln X_{\frac{t}{2}}+\ln X_{\frac{t+1}{2}}+D_n+u_n .$$

Alors d'après Q4 b] $(\ln X_{\frac{t}{2}}+\ln X_{\frac{t+1}{2}}+D_n+u_n)$ converge en probabilité vers $\ln X_{\frac{t}{2}}+\ln X_{\frac{t+1}{2}}+2\ln2$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $\ln X_{\frac{t}{2}}+\ln X_{\frac{t+1}{2}}+D_n+u_n$ a même loi que $2\ln X_t$. Alors les variables aléatoires $2\ln X_t$ et $\ln X_{\frac{t}{2}}+\ln X_{\frac{t+1}{2}}+2\ln2$ ont même loi.

Ainsi $2\ln X_t$ est de même loi que la variable aléatoire

$\ln X_{\frac{t}{2}} + \ln X_{\frac{t+1}{2}} + 2\ln 2$.

d) D'après ce qui précède : $\ln X_s + \ln X_{s+\frac{1}{2}} + 2\ln 2$ a même loi que $2\ln X_{2s}$.

Donc $r\ln X_s + r\ln X_{s+\frac{1}{2}} + 2r\ln 2$ a même loi que $2r\ln X_{2s}$.

Alors $\ln(2^{2r} X_s^r \; X_{s+\frac{1}{2}}^r)$ a même loi que $\ln X_{2s}^{2r}$.

Donc $X_{2s}^{2r}$ et $2^{2r} X_s^r \; X_{s+\frac{1}{2}}^r$ ont même loi.

e) En prenant $s = 1/2$ on peut dire que $X_1^{2r}$ et $2^{2r} X_{1/2}^r X_1^r$ ont même loi.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $E(X_t^n)$ existe. Il suffit de montrer que :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \frac{e^{-x}x^{t-1}}{\Gamma(t)}\,dx$ est absolument convergente ou simplement convergente car

$x \mapsto x^n \dfrac{e^{-x}x^{t-1}}{\Gamma(t)}$ est positive sur $]0,+\infty[$.

$\forall x \in ]0,+\infty[$. $x^n \dfrac{e^{-x}x^{t-1}}{\Gamma(t)} = \dfrac{\Gamma(t+n)}{\Gamma(t)} \; \dfrac{e^{-x}x^{t+n-1}}{\Gamma(t+n)}$. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}x^{t+n-1}}{\Gamma(t+n)}\,dx$

existe et vaut 1. Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \frac{e^{-x}x^{t-1}}{\Gamma(t)}\,dx$ existe et vaut $\dfrac{\Gamma(t+n)}{\Gamma(t)}$.

Donc $E(X_t^n)$ existe et vaut $\dfrac{\Gamma(t+n)}{\Gamma(t)}$.

Alors $E(X_1^{2r})$ existe et vaut $\dfrac{\Gamma(1+2r)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1+2r) = 2r\,\Gamma(2r)$.

$E(X_{1/2}^r)$ existe et vaut : $\dfrac{\Gamma(1/2+r)}{\Gamma(1/2)} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(r+\frac{1}{2})$.

$E(X_1^r)$ existe et vaut $\frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1+r) = r\,\Gamma(r)$.

En supposant $X_{1/2}$ et $X_1$ indépendantes on a $X_{1/2}^r$ et $X_1^r$ indépendantes.

Ainsi $E(X_1^{2r}) = E(2^{2r} X_{1/2}^r X_1^r) = 2^{2r} E(X_{1/2}^r)\, E(X_1^r)$.

Donc $2r\,\Gamma(2r) = 2^{2r} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma(r+\tfrac{1}{2})\, r\,\Gamma(r)$.

Alors : $\sqrt{\pi}\,\Gamma(2r) = \frac{2^{2r} r}{2r}\, \Gamma(r)\,\Gamma(r+\tfrac{1}{2})$.

Donc $\underline{\underline{2^{2r-1}\,\Gamma(r)\,\Gamma(r+\tfrac{1}{2}) = \Gamma(2r)\sqrt{\pi}}}$.

## Q15 Deuxième application : la formule de Stirling.

a) Soit $u \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. $\frac{a}{u^2} + \frac{b}{(u+1)^2} + \frac{c}{u} + \frac{d}{u+1} = \frac{1}{u^2(u+1)^2}\left[a(u+1)^2 + bu^2 + cu(u+1)^2 + d(u+1)u^2\right]$

$$\frac{a}{u^2} + \frac{b}{(u+1)^2} + \frac{c}{u} + \frac{d}{u+1} = \frac{1}{u^2(u+1)^2}\left[(c+d)u^3 + (a+b+2c+d)u^2 + (2a+c)u + a\right]$$

Il suffit donc d'avoir $\begin{cases} c+d=0 \\ a+b+2c+d=0 \\ 2a+c=0 \\ a=1 \end{cases}$ pour avoir $\forall u \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{u^2(u+1)^2} = \frac{a}{u^2} + \frac{b}{(u+1)^2} + \frac{c}{u} + \frac{d}{u+1}$.

$$\begin{cases} c+d=0 \\ a+b+2c+d \\ 2a+c=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=-2 \\ d=2 \\ b=1 \end{cases}.$$

Ainsi $\forall u \in \mathbb{R}_+^*$, $\underline{\frac{1}{u^2(u+1)^2} = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{(u+1)^2} - \frac{2}{u} + \frac{2}{u+1}}$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. $\psi'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2}$ d'après Q10. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(t+k)^2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(t+k+1)^2} + 2\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{t+k+1} - \frac{1}{t+k}\right)\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(t+k)^2} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(t+k)^2} + 2\left(\frac{1}{t+n+1} - \frac{1}{t}\right)$$

Les séries de termes généraux $\frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2}$ et $\frac{1}{(t+k)^2}$ étant convergentes, en faisant tendre $n$ vers $+\infty$ il vient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2} = \psi'(t) + \psi'(t) - \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} = 2\psi'(t) - \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t}.$$

Alors $\underline{\psi'(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2}}$.

**b)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(t+k+\frac{1}{14})^3} - \frac{1}{(t+k+\frac{15}{4})^3}\right) \leq \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(t+k)^3} - \frac{1}{(t+k+1)^3}\right)$$

En sommant de $k=0$ à $n$ et par "télescopage" il vient :

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(t+\frac{1}{14})^3} - \frac{1}{(t+n+\frac{15}{4})^3}\right] \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2} \leq \frac{1}{3}\left[\frac{1}{t^3} - \frac{1}{(t+n+1)^3}\right]$$

En faisant tendre $n$ vers $+\infty$ on obtient : $\dfrac{1}{3(t+\frac{1}{14})^3} \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2} \leq \frac{1}{3t^3}$.

En divisant par 2 et en ajoutant $\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}$ il vient :

$$\frac{1}{6}\ \frac{1}{(t+\frac{1}{14})^3} + \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} \leq \psi'(t) \leq \frac{1}{6t^3} + \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}.$$

Donc $\quad \dfrac{1}{2t^2} + \dfrac{1}{6(t+\frac{1}{14})^3} \leq \psi'(t) - \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{2t^2} + \dfrac{1}{6t^3}$ et ceci pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$

---

Posons $\forall t \in ]0,+\infty[$, $\varphi_1(t) = \psi(t) - \ln t + \dfrac{1}{2t} + \dfrac{1}{12(t+\frac{1}{14})^2}$ et

$\varphi_2(t) = \psi(t) - \ln t + \dfrac{1}{2t} + \dfrac{1}{12t^2}$.

$\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$.

$\forall t \in ]0,+\infty[$, $\varphi_1'(t) = \psi'(t) - \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2t^2} - \dfrac{1}{6(t+\frac{1}{14})^3} \geq 0$.

$\forall t \in ]0,+\infty[$, $\varphi_2'(t) = \psi'(t) - \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2t^2} - \dfrac{1}{6t^3} \leq 0$.

$\varphi_1$ est croissante sur $]0,+\infty[$ et $\varphi_2$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

Rappelons que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} (\psi(t) - \ln t) = 0$. Alors $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \varphi_1(t) = \lim_{t\to+\infty} \varphi_2(t) = 0$.

Dans ces conditions $\forall t \in ]0,+\infty[$, $\varphi_1(t) \leq 0$ et $\varphi_2(t) \geq 0$.

Alors $\forall t \in ]0,+\infty[$, $\ln t - \dfrac{1}{2t} - \dfrac{1}{12t^2} \leq \psi(t) \leq \ln t - \dfrac{1}{2t} - \dfrac{1}{12(t+\frac{1}{14})^2}$.

~~V1 Soit $t \in ]1,+\infty[$. $\ln t > 0$. Alors:~~

$$1 - \frac{1}{2t\ln t} - \frac{1}{12t^2\ln t} \leq \frac{\psi(t)}{\ln t} \leq 1 - \frac{1}{2t\ln t} - \frac{1}{12(t+\frac{1}{14})^2\ln t}.$$

De plus $\lim_{t\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{2t\ln t} - \frac{1}{12t^2\ln t}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{2t\ln t} - \frac{1}{12(t+\frac{1}{14})^2\ln t}\right) = 1$.

Par encadrement il vient: $\lim_{t\to+\infty}\frac{\psi(t)}{\ln t} = 1$. $\underline{\underline{\psi(t) \underset{+\infty}{\sim} \ln t}}$.

V2 $\lim_{t\to+\infty}(\psi(t) - \ln t) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\ln t} = 0$.

Par produit $\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\psi(t)}{\ln t} - 1\right) = 0$. $\lim_{t\to+\infty}\frac{\psi(t)}{\ln t} = 1$. $\psi(t) \underset{+\infty}{\sim} \ln t$.

$\forall t \in ]0,+\infty[$, $\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6(t+\frac{1}{14})^3} + \frac{1}{t} \leq \psi'(t) \leq \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6t^3} + \frac{1}{t}$.

En multipliant par $t$ il vient: $\forall t \in ]0,+\infty[$, $\frac{1}{2t} + \frac{t}{6(t+\frac{1}{14})^3} + 1 \leq t\psi'(t) \leq \frac{1}{2t} + \frac{1}{6t^2} + 1$.

Or $\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{2t} + \frac{t}{6(t+\frac{1}{14})^3} + 1\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{2t} + \frac{1}{6t^2} + 1\right) = 1$.

Par encadrement il vient $\lim_{t\to+\infty}(t\psi'(t)) = 1$. $\underline{\underline{\psi'(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}}}$.

Finalement: $\underline{\underline{E(\ln X_t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \ln t}}$ et $\underline{\underline{V(\ln X_t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}}}$.

C] Soit $y$ un réel tel que $y > t > 0$.

$$\int_t^y \left(\psi(x) - \ln x + \frac{1}{2x}\right)dx \underset{\psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}}{=} \Big[\ln|\Gamma(x)| - (x\ln x - x) + \frac{1}{2}\ln x\Big]_t^y$$

$$\underline{\underline{\int_t^y \left(\psi(x) - \ln x + \frac{1}{2x}\right)dx = \ln\Gamma(y) - y\ln y + y + \frac{1}{2}\ln y - \ln\Gamma(t) + t\ln t - t - \frac{1}{2}\ln t.}}$$

Soit $y \in ]1,+\infty[$, ce qui précède donne :

$$\ln\Gamma(y) - \ln y^y + \ln e^y + \ln y^{1/2} = \int_1^y \left(\psi(u) - \ln u + \frac{1}{2u}\right)du + \ln\Gamma(1) - 1\ln 1 + 1 + \frac{1}{2}\ln 1$$

donc $\ln \dfrac{\Gamma(y)\, e^y y^{1/2}}{y^y} = \displaystyle\int_1^y \left(\psi(u) - \ln u + \frac{1}{2u}\right)du + \ln\Gamma(1) - 1\ln 1 + 1 + \frac{1}{2}\ln 1$

ou $\ln\left(\dfrac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}}e^{-y}}\right) = \displaystyle\int_1^y \left(\psi(u) - \ln u + \frac{1}{2u}\right)du + \ln\Gamma(1) - 1\ln 1 + 1 + \frac{1}{2}\ln 1.$

Pour montrer que $y \mapsto \ln\left(\dfrac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}}e^{-y}}\right)$ admet une limite finie en $+\infty$ il suffit donc

de montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\psi(u) - \ln u + \frac{1}{2u}\right)du$ converge.

$\forall x \in ]0,+\infty[, \quad -\dfrac{1}{12x^2} \leq \psi(x) - \ln x + \dfrac{1}{2x} \leq -\dfrac{1}{12\left(x+\frac{1}{14}\right)^2}$

$\forall x \in ]0,+\infty[, \quad -\dfrac{1}{12} \leq x^2\left(\psi(x) - \ln x + \dfrac{1}{2x}\right) \leq -\dfrac{x^2}{12\left(x+\frac{1}{14}\right)^2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{12\left(x+\frac{1}{14}\right)^2} = -\frac{1}{12}.$

Par encadrement il vient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\left(\psi(x) - \ln x + \frac{1}{2x}\right)\right) = -\frac{1}{12}.$

Alors $\quad \psi(x) - \ln x + \dfrac{1}{2x} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12x^2}.$

$-\left(\psi(x) - \ln x + \dfrac{1}{2x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12x^2}$ , $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{12x^2}$ converge et $\forall x \in [1,+\infty[, \dfrac{1}{12x^2} \geq 0$

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives

montrent que $\displaystyle\int_1^{+\infty} -\left(\psi(x) - \ln x + \frac{1}{2x}\right)dx$ converge ; $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\psi(u) - \ln u + \frac{1}{2u}\right)du$ converge.

Ainsi $y \mapsto \ln\left(\dfrac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}}\, e^{-y}}\right)$ admet une limite finie en $+\infty$ ... notée $\theta$

d) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $(x+\frac{1}{2})^x (1+\frac{1}{2x})^{-x} = (\frac{2x+1}{2})^x (\frac{2x+1}{2x})^{-x} = (\frac{1}{x})^{-x} = x^x$. (▲)

$\lim_{y \to +\infty} \ln\left(\frac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y}}\right) = \theta$. $\lim_{y\to+\infty} \left(\frac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y}}\right) = e^{\theta}$ et $e^{\theta} \neq 0$.

Alors $\frac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y}} \underset{y\to+\infty}{\sim} e^{\theta}$. $\underline{\underline{\Gamma(y) \underset{+\infty}{\sim} e^{\theta} y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y}}}$.

d'après e) $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $2^{2y-1}\Gamma(y)\Gamma(y+\frac{1}{2}) = \Gamma(2y)\sqrt{\pi}$.

Alors $2^{2y-1} e^{\theta} y^{y-1/2} e^{-y} e^{\theta} (y+\frac{1}{2})^y e^{-y-\frac{1}{2}} \underset{y\to+\infty}{\sim} e^{\theta} (2y)^{2y-\frac{1}{2}} e^{-2y} \sqrt{\pi}$

En simplifiant il vient

$e^{\theta} y^{y-\frac{1}{2}} (y+\frac{1}{2})^y e^{-1/2} \underset{y\to+\infty}{\sim} y^{2y-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{2\pi}{y}}\, y^{2y}$. En multipliant par $\sqrt{y}$

il vient $e^{\theta} y^y (y+\frac{1}{2})^y e^{-1/2} \underset{y\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, y^{2y}$ ou encore :

$e^{\theta} \underset{y\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, e^{1/2} y^y (y+\frac{1}{2})^{-y} = \sqrt{2\pi}\, e^{1/2} (1+\frac{1}{2y})^{-y}$
↑ (▲)

Alors $e^{\theta} = \lim_{y\to+\infty} (\sqrt{2\pi}\, e^{1/2}(1+\frac{1}{2y})^{-y})$.

$\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $(1+\frac{1}{2y})^{-y} = e^{-y\ln(1+\frac{1}{2y})}$. $-y\ln(1+\frac{1}{2y}) \underset{y\to+\infty}{\sim} -y(\frac{1}{2y}) = -\frac{1}{2}$.

Donc $\lim_{y\to+\infty}(-y\ln(1+\frac{1}{2y})) = -\frac{1}{2}$ ; $\lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{2y})^{-y} = e^{-1/2}$.

Alors $e^{\theta} = \lim_{y\to+\infty}\left(\sqrt{2\pi}\, e^{1/2}(1+\frac{1}{2y})^{-y}\right) = \sqrt{2\pi}\, e^{1/2} e^{-1/2} = \sqrt{2\pi}$. $\underline{\underline{e^{\theta} = \sqrt{2\pi}}}$

$\Gamma(y) \underset{y\to+\infty}{\sim} e^{\theta} y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y} = \sqrt{2\pi}\, y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y} =$

$\underline{\underline{\Gamma(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}.}}$

**Exercice.** "Retrouver"
$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.