

I Existence et propriétés élémentaires de l'opérateur U .

(Q1) a) Posons $\forall x \in I$, $h(x) = e^{ax} y(x)$. h est dérivable sur I comme produit de deux fonctions dérivables sur I .

$$\forall x \in I, h'(x) = -a e^{ax} y(x) + e^{ax} y'(x) = e^{ax} (y'(x) - a y(x)).$$

$$\forall x \in I, h'(x) = e^{ax} (y'(x) - a y(x)).$$

* Supposons que y est solution du problème (E_f)

Alors $\forall x \in I$, $h'(x) = e^{ax} (-f(x))$. Donc h est une primitive de $t \mapsto -e^{at} f(t)$ sur l'intervalle I . Notons que $x \mapsto \int_1^x e^{-at} f(t) dt$ est également une primitive de $t \mapsto -e^{at} f(t)$ sur I car cette dernière fonction est continue sur I .

Ainsi $\exists K \in \mathbb{R}$, $h(x) = - \int_1^x e^{at} f(t) dt + K$ pour tout x dans I car I est un intervalle.

$$\text{Rais } \forall x \in I, e^{ax} y(x) = K - \int_1^x e^{at} f(t) dt.$$

$$\forall x \in I, y(x) = e^{-ax} (K - \int_1^x e^{at} f(t) dt).$$

* Réciproquement soit K un réel et soit g l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in I$, $g(x) = e^{ax} (K - \int_1^x e^{-at} f(t) dt)$.

$x \mapsto \int_1^x e^{-at} f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I car c'est la primitive sur l'intervalle I de la fonction continue $t \mapsto e^{-at} f(t)$ qui prend les valeurs 0 à 1.

Alors $x \mapsto e^{ax}$ et $x \mapsto K - \int_1^x e^{-at} f(t) dt$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Le produit g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

$$\text{Rais } \forall x \in I, g'(x) = a e^{ax} (K - \int_1^x e^{-at} f(t) dt) + e^{ax} (0 - e^{-ax} f(x)).$$

$$\forall x \in I, g'(x) = a g(x) - f(x).$$

g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\forall x \in I$, $g'(x) - a g(x) + f(x) = 0$.

Donc g est solution du problème (E_f).

une application y de I dans $\mathbb{R}$ et solution du problème (E_f) et seulement si :

$$\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = e^{ax} \left(K - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right).$$

vi) Supposons qu'il existe deux solutions y_1 et y_2 de (E_f) bornées sur I .

$$\exists (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in I, y_1(x) = e^{ax} \left(K_1 - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right) \text{ et } y_2(x) = e^{ax} \left(K_2 - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right).$$

$\exists (\pi_1, \pi_2) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in I, |y_1(x)| \leq \pi_1 \text{ et } |y_2(x)| \leq \pi_2$. car y_1 et y_2 sont bornées sur I .

$$\forall x \in I, y_1(x) - y_2(x) = (K_1 - K_2) e^{ax}$$

$$\forall x \in I, |(K_1 - K_2) e^{ax}| = |y_1(x) - y_2(x)| \leq |y_1(x)| + |y_2(x)| \leq \pi_1 + \pi_2.$$

$$\forall x \in I, |K_1 - K_2| e^{ax} \leq \pi_1 + \pi_2. \quad \forall x \in I, |K_1 - K_2| \leq (\pi_1 + \pi_2) e^{-ax}$$

En faisant tendre x vers $+\infty$ il vient $|K_1 - K_2| \leq 0$ car $a > 0$.

$$\text{Ainsi } 0 \leq |K_1 - K_2| \leq 0; \quad |K_1 - K_2| = 0; \quad K_1 - K_2 = 0; \quad K_1 = K_2; \quad y_1 = y_2!$$

Il existe une solution de (E_f) bornée sur I elle est unique.

c) $t \mapsto e^{-at} f(t)$ est continue sur I

$$\exists \pi_f \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in I, 0 \leq |e^{-at} f(t)| = e^{-at} |f(t)| \leq \pi_f e^{-at} \text{ car}$$

f est bornée sur I .

$$\text{On a } \int_1^x e^{-at} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-at}}{-a} \right]_1^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{-a} (e^{-ax} - e^{-a}) \right) = \frac{e^{-a}}{a} \text{ donc}$$

$$\int_1^{+\infty} e^{-at} dt \text{ converge et vaut } \frac{e^{-a}}{a}.$$

On utilise la comparaison sur les intégrales généralisées de fonction positives montrant alors la convergence de $\int_1^{+\infty} |e^{-at} f(t)| dt$.

$$\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \text{ est absolument convergente donc converge.}$$

d) $t \mapsto e^{-at} f(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ converge.

Ainsi pour tout élément x de I , $\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ converge.

get bien définie sur I . Posons $K = \int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$.

$$\forall x \in I, g(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = e^{ax} \left(\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt + \int_x^1 e^{-at} f(t) dt \right).$$

$$\forall x \in I, g(x) = e^{ax} \left(K - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right). \text{ get donc solution de (Eg).}$$

get bornée sur $\mathbb{R}$ car $\exists \pi_f \in \mathbb{R}_+^0, \forall t \in \mathbb{R}, |e^{-at} f(t)| = e^{-at} |f(t)| \leq \pi_f e^{-at}$.

Notons aussi que $t \mapsto e^{-at} f(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ est absolument convergente. Alors pour tout $x \in I$, $\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ est absolument convergente.

$$\forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| = e^{ax} \left| \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \right| = e^{ax} \left| \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \right| \leq e^{ax} \int_x^{+\infty} |e^{-at} f(t)| dt$$

$\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0!$

A $\forall t \in \mathbb{R}, |e^{-at} f(t)| \leq \pi_f e^{-at}$ et $\int_1^{+\infty} e^{-at} dt$ converge pour tout x dans I .

(car $\int_1^{+\infty} e^{-at} dt$ converge).

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| \leq e^{ax} \int_x^{+\infty} \pi_f e^{-at} dt = e^{ax} \pi_f \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-at}}{-a} \right]_x^A$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| \leq e^{ax} \pi_f \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{a} (e^{-ax} - e^{-aA}) \right] = e^{ax} \pi_f \frac{1}{a} e^{-ax} = \frac{1}{a} \pi_f.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| \leq \frac{1}{a} \pi_f. \text{ get bornée sur } \mathbb{R}.$$

get solution de (Eg) et get bornée sur $\mathbb{R}$.

Alors $g: x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ est l'unique solution de (Eg) qui soit

bornée sur $\mathbb{R}$.

Remarque.. L'unicité aurait pu être traitée autrement et faire apparaître naturellement la solution proposée en d).

Reprenons donc b). Faisons une analyse.

Supposons que y est une fonction de $\mathcal{B}^1(I, \mathbb{R})$, bornée sur I et solution des problèmes (E_f) .

$$\text{Alors } \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I, y(x) = e^{ax} \left(K - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right).$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in I, \int_1^x e^{-at} f(t) dt = K - y(x) e^{-ax}.$$

y est bornée sur I donc $\exists \pi \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^p$!), $\forall x \in I, |y(x)| \leq \pi$.

Donc $\forall x \in I, 0 \leq |y(x) e^{-ax}| \leq \pi e^{-ax}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi e^{-ax}) = 0$ car $a > 0$.

Pour chaque x $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x) e^{-ax}) = 0$.

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x e^{-at} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} (K - y(x) e^{-ax}) = K.$$

Pour conclure qu'est 1° $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ existe et vaut K

$$2^\circ y(x) = e^{ax} \left(K - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right) = e^{ax} \left(\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right)$$

pour tout x dans I .

$$\text{Alors } \forall x \in I, y(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt.$$

ce à savoir bien que si (E_f) admet une solution bornée sur I elle est unique

(Q2) a) Supposons que $f = 1$. $f \in E$: calcul fait dans Q1 d)

$$\forall x \in I, U(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} 1 dt \stackrel{\downarrow}{=} e^{ax} \frac{1}{a} e^{-ax} = \frac{1}{a}.$$

Si $f = 1$: $U(f) = \frac{1}{a}$.

b) * Soit f dans E . $U(f)$ est la solution de (E_f) bornée sur I .

Donc $U(f)$ est bornée et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Alors $U(f)$ est continue et bornée sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}$. $U(f) \in E$.

$\forall f \in E, U(f) \in E$.

* Soit $f, g \in E^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\forall x \in I, U(\lambda f + g)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} (\lambda f + g)(t) dt = e^{ax} \int_x^{+\infty} (\lambda e^{-at} f(t) + e^{-at} g(t)) dt$$

$$\forall x \in I, U(\lambda f + g)(x) = \lambda e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt + e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} g(t) dt$$

car toutes les intégrales convergent.

$$\forall x \in I, U(\lambda f + g)(x) = \lambda U(f)(x) + U(g)(x) = (\lambda U(f) + U(g))(x).$$

$U(\lambda f + g) = \lambda U(f) + U(g)$. U est linéaire.

Finalement U est un endomorphisme de E .

c) Soit $f \in \ker U$. $U(f)$ est la solution de (E_f) et $U(f) = 0_E$.

$$\text{Alors } \forall x \in I, (U(f))'(x) - a U(f)(x) + f(x) = 0.$$

$$\forall x \in I, 0 - a \cdot 0 + f(x) = 0.$$

$$\forall x \in I, f(x) = 0. \quad f = 0_E.$$

Ainsi $\ker U = \{0_E\}$. U est injectif.

Remarque. - U n'est pas surjectif car $\exists u \in E \cap \mathcal{B}^1(I) \not\subseteq E$.

Par exemple $t \mapsto \frac{1}{1+t-2}$ est continue et bornée sur $\mathbb{I}$ mais n'est pas dérivable à 2 ; ainsi elle appartient à E mais appartient à $\tilde{E}$ sur U .

⌋ Faisons une récurrence sur tout pour $f \in E$!

Au premier dit nation que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in E, \forall t \in \mathbb{I}, U^{(n)}(f)(t) = e^{at} \int_t^{+\infty} \frac{(t-\tau)^n}{n!} e^{-a\tau} f(\tau) d\tau$
(et na pas $\forall f \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \dots$).

* la propriété est vraie pour $n=0$ par définition de U .

* Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}$ et nation la pour $n+1$.

Notons qu'en $\forall f \in E, \forall t \in \mathbb{I}, U^{(n+1)}(f)(t) = e^{at} \int_t^{+\infty} \frac{(t-\tau)^n}{n!} e^{-a\tau} f(\tau) d\tau$.

Soit $f \in E$.

$U^{(n+2)}(f) = U^{(n+1)}(U(f))$ et $U(f) \in E$. Alors l'hypothèse de récurrence appliquée à $U(f)$ donne :

$$\forall t \in \mathbb{I}, U^{(n+2)}(f)(t) = e^{at} \int_t^{+\infty} \frac{(t-\tau)^n}{n!} e^{-a\tau} U(f)(\tau) d\tau.$$

Effectuons une intégration par parties. Fixons t dans $\mathbb{I}$. Soit $A \in \mathbb{I}$.

• $u: t \mapsto \frac{(t-\tau)^{n+1}}{(n+1)!}$ et de classe $\mathcal{B}'$ sur $\mathbb{I}$ et $\forall t \in \mathbb{I}, u'(t) = \frac{(t-\tau)^n}{n!}$.

• Pour $\forall t \in \mathbb{I}, v(t) = e^{-at} U(f)(t)$. v est de classe $\mathcal{B}'$ sur $\mathbb{I}$ comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{B}'$ sur $\mathbb{I}$.

$$\forall t \in \mathbb{I}, v'(t) = -e^{-at} U(f)(t) + e^{-at} (U(f))'(t) = e^{-at} ((U(f))'(t) - a U(f)(t))$$

à $U(f)$ et dérivée de $(U(f))$.

$$\text{Donc } \forall t \in \mathbb{I}, v'(t) = e^{-at} (-f(t)) = -e^{-at} f(t).$$

$$\int_x^A \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} v(f)(t) dt = \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} v(f)(t) \right]_x^A - \int_x^A \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} (-e^{-at} f(t)) dt.$$

$$\int_x^A \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} v(f)(t) dt = \frac{(A-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-aA} v(f)(A) + \int_x^A \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} f(t) dt.$$

• En $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{(A-x)^{n+1} e^{-aA}}{(n+1)!} = 0$ par croissance comparée ($a > 0$) et $v(f)$ est

bornée sur $\mathbb{R}$ donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{(A-x)^{n+1} e^{-aA}}{(n+1)!} v(f)(A) \right) = 0$.

• De plus $\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} v(f)(t) dt$ converge par propriété de dérivées.

Donc si $\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} f(t) dt$ converge.

$$\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} v(f)(t) dt = \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} f(t) dt.$$

$$\text{Donc } v^{n+1}(v(f))(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} f(t) dt.$$

$$v^{n+2}(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} f(t) dt \text{ et ceci pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}.$$

ceci achève la récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathcal{E}, v^n(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) dt.$$

Q3) cas des fonctions exponentielles.

1) Soit $k \in \mathbb{R}_+$. f_k est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in \mathbb{R}, 0 \leq f_k(t) \leq 1$.

f_k est continue et bornée sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. $f_k \in \mathcal{E}$. calcul de $\int$ fait...

$$\forall k \in \mathbb{R}, v(f_k)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f_k(t) dt = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at+k/t} dt = \frac{e^{ax} e^{-ax-k}}{a+k}.$$

$$\forall k \in \mathbb{I}, U(f_k)(v) = \frac{1}{a+k} e^{-kv} = \frac{1}{a+k} f_k(v).$$

$$\forall k \in \mathbb{R}^+, f_k \in E \text{ et } U(f_k) = \frac{1}{a+k} f_k.$$

b) Soit $\lambda \in]0, \frac{1}{a}]$. $0 < \lambda \leq \frac{1}{a}$. $a \leq \frac{1}{\lambda}$; $0 \leq \frac{1}{\lambda} - a$.

Posons $k = \frac{1}{\lambda} - a$. $k \in \mathbb{R}^+$.

$$f_k \in E, f_k \neq 0_E \text{ et } U(f_k) = \frac{1}{a+k} f_k = \frac{1}{a + \frac{1}{\lambda} - a} f_k = \lambda f_k.$$

Alors $f_k \in E, f_k \neq 0_E$ et $f_k \in \ker(U - \lambda \text{Id}_E)$. Donc $\ker(U - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$.

$\forall \lambda \in]0, \frac{1}{a}], \ker(U - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$ ou $]0, \frac{1}{a}] \subset S_U$.

c) Soit $k \in \mathbb{R}_+$. $U(f_k) = \frac{1}{a+k} f_k$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $U^n(f_k) = \left(\frac{1}{a+k}\right)^n f_k$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{I}, U^n(f_k)(v) = \left(\frac{1}{a+k}\right)^n e^{-kv}.$$

↑ cours ou récurrence
immédiate.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a+k}\right)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } a+k > 1 \\ 1 & \text{si } a+k = 1 \\ +\infty & \text{si } a+k < 1 \end{cases}$$

Alors $\forall k \in \mathbb{I}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} U^n(f_k)(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } a+k > 1 \\ e^{-kv} & \text{si } a+k = 1 \\ +\infty & \text{si } a+k < 1 \end{cases}$

Q4

Cas des fonctions cosinus et sinus.

cos et sin sont dans E car elles sont bornées
et continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) $U(\cos)(v) = e^{av} \int_x^{+\infty} e^{-at} \cos t \, dt$ et $U(\sin)(v) = e^{av} \int_x^{+\infty} e^{-at} \sin t \, dt$ et

ceci pour tout x dans $\mathbb{I}$. Essayons de gagner un peu de temps pour

ne pas faire quatre intégrations par parties... mais traitons le cas
général.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. $f \mapsto \cos(\alpha t + \beta) e^{-at}$ est continue sur $\mathbb{I}$.

Soit $x \in \mathbb{I}$ et $A \in \mathbb{I}$. Une intégration par parties nous donne :

$$\int_x^A \cos(\alpha t + \beta) e^{-at} dt = \left[\cos(\alpha t + \beta) \left(-\frac{e^{-at}}{a} \right) \right]_x^A - \int_x^A (-\alpha \sin(\alpha t + \beta)) \left(-\frac{e^{-at}}{a} \right) dt.$$

$$\int_x^A \cos(\alpha t + \beta) e^{-at} dt = -\frac{1}{a} \cos(\alpha A + \beta) e^{-aA} + \frac{1}{a} \cos(\alpha x + \beta) e^{-ax} - \frac{\alpha}{a} \int_x^A \sin(\alpha t + \beta) e^{-at} dt \quad (*)$$

$f \mapsto \cos(\alpha t + \beta)$ et $f \mapsto \sin(\alpha t + \beta)$ sont continues et bornées sur $\mathbb{I}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Ce sont donc des éléments de $\mathcal{C}$. On conclut la convergence de $\int_x^{+\infty} \cos(\alpha t + \beta) e^{-at} dt$ et

$$\int_x^{+\infty} \sin(\alpha t + \beta) e^{-at} dt.$$

On peut lire $\left(-\frac{1}{a} \cos(\alpha A + \beta) e^{-aA} \right) = 0$ car $a > 0$ et $A \mapsto -\frac{1}{a} \cos(\alpha A + \beta) e^{-aA}$ est bornée sur $\mathbb{I}$.

En faisant tendre A vers $+\infty$ dans $(*)$ il vient :

$$\int_x^{+\infty} \cos(\alpha t + \beta) e^{-at} dt = \frac{1}{a} \cos(\alpha x + \beta) e^{-ax} - \frac{\alpha}{a} \int_x^{+\infty} \sin(\alpha t + \beta) e^{-at} dt.$$

$$\text{Pour } \alpha = 1 \text{ et } \beta = 0 \text{ on obtient } \int_x^{+\infty} \cos t e^{-at} dt = \frac{1}{a} \cos x e^{-ax} - \frac{1}{a} \int_x^{+\infty} \sin t e^{-at} dt.$$

$$\text{Pour } \alpha = -1 \text{ et } \beta = \frac{\pi}{2} \text{ on obtient } \int_x^{+\infty} \sin t e^{-at} dt = \frac{1}{a} \sin x e^{-ax} + \frac{1}{a} \int_x^{+\infty} \cos t e^{-at} dt.$$

$$\text{Alors } \int_x^{+\infty} \cos t e^{-at} dt = \frac{1}{a} \cos x e^{-ax} - \frac{1}{a} \left[\frac{1}{a} \sin x e^{-ax} + \frac{1}{a} \int_x^{+\infty} \cos t e^{-at} dt \right] \text{ et}$$

$$\int_x^{+\infty} \sin t e^{-at} dt = \frac{1}{a} \sin x e^{-ax} + \frac{1}{a} \left[\frac{1}{a} \cos x e^{-ax} - \frac{1}{a} \int_x^{+\infty} \sin t e^{-at} dt \right].$$

$$\text{D'où } \int_x^{+\infty} \cos t e^{-at} dt = \frac{1}{1 + \frac{1}{a^2}} \left[\frac{1}{a} \cos x e^{-ax} - \frac{1}{a^2} \sin x e^{-ax} \right] \text{ et}$$

$$\int_x^{+\infty} \sin t e^{-at} dt = \frac{1}{1 + \frac{1}{a^2}} \left[\frac{1}{a} \sin x e^{-ax} + \frac{1}{a^2} \cos x e^{-ax} \right].$$

$$U(\cos)(x) = e^{ax} \frac{a^2}{a^2+1} \left[\frac{a}{a^2} \cos x e^{-ax} - \frac{1}{a^2} \sin x e^{-ax} \right] = \frac{1}{a^2+1} (a \cos x - \sin x) \text{ et}$$

$$U(\sin)(x) = e^{ax} \frac{a^2}{a^2+1} \left[\frac{a}{a^2} \sin x e^{-ax} + \frac{1}{a^2} \cos x e^{-ax} \right] = \frac{1}{a^2+1} (a \sin x + \cos x).$$

$$\text{Donc } U(\cos) = \frac{1}{a^2+1} (a \cos - \sin) \text{ et } U(\sin) = \frac{1}{a^2+1} (a \sin + \cos),$$

$$\text{Avec } a=1 \text{ il vient : } U(\cos) = \frac{1}{2} (\cos - \sin) \text{ et } U(\sin) = \frac{1}{2} (\sin + \cos).$$

$$\text{b)} \quad U(P) = U(\text{Vect}(\cos, \sin)) = \text{Vect}(U(\cos), U(\sin)).$$

d'après a), $U(\cos)$ et $U(\sin)$ sont dans P . Par conséquent

$\text{Vect}(U(\cos), U(\sin))$ est contenu dans P car P est un sous-espace vectoriel de E .

Donc $U(P) \subset P$ et P est stable par U .

$(\sin, \cos)$ est une famille génératrice de P par définition de P .

Montrons que cette famille est libre. Soient α et β deux réels tels que

$$\alpha \sin + \beta \cos = 0_E. \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \sin x + \beta \cos x = 0.$$

$$\text{Donc } \alpha \sin \frac{\pi}{2} + \beta \cos \frac{\pi}{2} = \alpha \sin \pi + \beta \cos \pi = 0; \quad \alpha = -\beta = 0; \quad \alpha = \beta = 0.$$

Ceci achève de montrer la liberté de la famille $(\sin, \cos)$.

$(\sin, \cos)$ est une base de P

$$\text{d'après a)} \quad \pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ ou } \pi = \frac{1}{a^2+1} \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \text{ dans le cas général.}$$

$$\underline{c)} \quad \pi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \pi^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\pi^3 = \pi \pi^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\pi^4 = \pi \pi^3 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} I_2.$$

$$\underline{\pi^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi^3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \pi^4 = -\frac{1}{4} I_2.}$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}. \quad \pi^{4n} = (\pi^4)^n = \left(-\frac{1}{4} I_2\right)^n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n I_2; \quad \pi^{4n+1} = \pi \pi^{4n} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \pi;$$

$$\pi^{4n+2} = \pi^2 \pi^{4n} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \pi^2; \quad \pi^{4n+3} = \pi^3 \pi^{4n} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \pi^3. \text{ Ainsi :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \pi^{4n} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi^{4n+1} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \pi^{4n+2} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\pi^{4n+3} = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Reprenons le cas général.} \quad \pi = \frac{1}{a^2+1} \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+1} \left(a I_2 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{Posons } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \pi = \frac{1}{a^2+1} (a I_2 + C). \text{ Notons que } a I_2 \text{ et } C \text{ commutent.}$$

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \pi^n = \frac{1}{(a^2+1)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a I_2)^{n-k} C^k = \frac{1}{(a^2+1)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} C^k.$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2.$$

$$\text{Alors } \forall k \in \mathbb{N}, \quad C^{2k} = (-1)^k I_2 \text{ et } C^{2k+1} = (-1)^k C.$$

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \pi^n = \frac{1}{(a^2+1)^n} \left[\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} a^{n-2k} (-1)^k I_2 + \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} a^{n-(2k+1)} (-1)^k C \right]$$

$$a (a+i)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} i^k = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} a^{n-2k} (-1)^k + i \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} a^{n-(2k+1)} (-1)^k.$$

$$\text{donc } \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} a^{n-2k} (-1)^k = \operatorname{Re}((a+i)^n) = \frac{1}{2} [(a+i)^n + (a-i)^n] \quad \text{et}$$

$$\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} a^{n-(2k+1)} (-1)^k = \operatorname{Im}((a+i)^n) = \frac{1}{2i} [(a+i)^n - (a-i)^n].$$

$$\text{donc } \Pi^n = \frac{1}{(a+i)^n} \left[\frac{(a+i)^n (a-i)^n}{2} I_2 + \frac{(a+i)^n - (a-i)^n}{2i} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Exercice... Déduire de cela les résultats cités pour $a=1$.

Donnons une recade piste pour retrouver Π^n dans le cas général et pour noter également que les coefficients de Π^n tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

$$\Pi = \frac{1}{a^2+1} \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} & \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \end{pmatrix}.$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \right)^2 = 1. \text{ Alors } \exists \theta \in [0, 2\pi[, \quad \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \cos \theta \\ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \sin \theta \end{cases}$$

Notons que $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} > 0$ et $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} > 0$. Alors $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Dans ces conditions $\theta = \arccos \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ (resp. $\theta = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$).

Notons également que pour $a=1$: $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Alors $\pi = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Notons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^p$, $\pi^n = \left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right)^n \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$.

* c'est clair pour $n=1$ (et même pour $n=0$).

* Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}^p$ et montrons la pour $n+1$.

$$\pi^{n+1} = \pi^n \pi = \left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right)^n \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\pi^{n+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right)^{n+1} \begin{pmatrix} \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta & -\cos n\theta \sin \theta - \sin n\theta \cos \theta \\ \sin n\theta \cos \theta + \cos n\theta \sin \theta & -\sin n\theta \sin \theta + \cos n\theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\pi^{n+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right)^{n+1} \begin{pmatrix} \cos (n+1)\theta & -\sin (n+1)\theta \\ \sin (n+1)\theta & \cos (n+1)\theta \end{pmatrix} \text{ c'est évident par récurrence.}$$

(A) $\forall n \in \mathbb{N}^p$, $\pi^n = \begin{pmatrix} \frac{\cos n\theta}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right)^n} & -\frac{\sin n\theta}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right)^n} \\ \frac{\sin n\theta}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right)^n} & \frac{\cos n\theta}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right)^n} \end{pmatrix}$ avec $\theta = \arccos \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$
(resp. $\theta = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$).

$\forall n \in \mathbb{N}^p$, $0 \leq \left| \frac{\cos n\theta}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right)^n} \right| = \frac{|\cos n\theta|}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right)^n} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right)^n$

De même $\forall n \in \mathbb{N}^p$, $0 \leq \left| \frac{\sin n\theta}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right)^n} \right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right)^n$.

Or $\left| \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right| < 1$ car $c > 0$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right)^n = 0$.

Pour conclure il vient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n\theta}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n\theta}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right)^n} = 0$.

La limite de tous les coefficients de π^n lorsque n tend vers $+\infty$ est 0.

Exercices 1. Retrouver avec (A) les résultats obtenus pour $a=1$.
2. Réduire (A) au π^n de la p 12... et réciproquement.

↳ 3. Noter avec les résultats de la page 13 que les coefficients de π^n tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ lorsque $a=1$.

(Q5) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\varphi_n : t \mapsto e^{-t} t^n$ est continue sur $\mathbb{I}$ et

$\lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-t} t^n) = 0$ par croissance comparée. Ceci suffit pour dire

que φ_n est bornée sur $\mathbb{I}$, non ?

φ_n est bornée et continue sur $\mathbb{I}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc φ_n appartient à $\mathcal{C}_b$ et ceci pour tout élément n de $\mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit x et A deux éléments de $\mathbb{I}$. Une intégration par

parties simple donne : $\int_x^A e^{-at} \varphi_n(t) dt = \int_x^A e^{-(a+1)t} t^n dt = \left[-\frac{e^{-(a+1)t}}{a+1} t^n \right]_x^A -$

$$\int_x^A \left(-\frac{e^{-(a+1)t}}{a+1} \right) n t^{n-1} dt.$$

$$\int_x^A e^{-at} \varphi_n(t) dt = -\frac{1}{a+1} e^{-(a+1)A} A^n + \frac{1}{a+1} e^{-(a+1)x} x^n + \frac{n}{a+1} \int_x^A e^{-at} \varphi_{n-1}(t) dt.$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{a+1} e^{-(a+1)A} A^n \right) = 0 \text{ par croissance comparée } (a+1 > 0).$$

Donc $\int_x^{+\infty} e^{-at} \varphi_n(t) dt$ et $\int_x^{+\infty} e^{-at} \varphi_{n-1}(t) dt$ convergent car φ_n et φ_{n-1} sont des

éléments de $\mathcal{C}_b$. Alors $\int_x^{+\infty} e^{-at} \varphi_n(t) dt = \frac{1}{a+1} e^{-ax} \varphi_n(x) + \frac{n}{a+1} \int_x^{+\infty} e^{-at} \varphi_{n-1}(t) dt$

En multipliant par e^{ax} on obtient : $U(\varphi_n)(x) = \frac{1}{a+1} \varphi_n(x) + \frac{n}{a+1} U(\varphi_{n-1})(x).$

Donc $\forall x \in \mathbb{I}$, $\psi_n(x) = \frac{1}{a+1} \varphi_n(x) + \frac{n}{a+1} \psi_{n-1}(x).$

$$\underline{\underline{\psi_n = \frac{1}{a+1} \varphi_n + \frac{n}{a+1} \psi_{n-1}}}$$

b) Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}$, F_p est stable par U .

$$* U(F_0) = U(\text{Vect}(\varphi_0)) = \text{Vect}(U(\varphi_0)).$$

$$\text{Car } \forall t \in \mathbb{T}, \varphi_0(w) = e^{-t} = f_1(t) \quad (\text{notation de } \varphi_{30}).$$

$$\text{Dac } U(\varphi_0) = U(f_1) = \frac{1}{a+1} f_1 = \frac{1}{a+1} \varphi_0.$$

$$U(F_0) = \text{Vect}(U(\varphi_0)) = \text{Vect}\left(\frac{1}{a+1} \varphi_0\right) = \text{Vect}(\varphi_0) = F_0 \text{ dac } U(F_0) \subset F_0 !$$

* Supposons la propriété vraie pour p dans $\mathbb{N}$ et montrons le pour $p+1$.

$$U(F_{p+1}) = U(\text{Vect}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{p+1})) = \text{Vect}(U(\varphi_0), U(\varphi_1), \dots, U(\varphi_{p+1})).$$

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, U(\varphi_k) \in F_p \text{ grace à l'hypothèse de récurrence.}$$

$$\text{avec } \forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, U(\varphi_k) \in F_{p+1} \text{ car } F_p \subset F_{p+1}.$$

$$U(\varphi_{p+1}) = \frac{1}{a+1} \varphi_{p+1} + \frac{a}{a+1} U(\varphi_p)$$

$$\text{Car } U(\varphi_p) \in F_p \text{ dac } U(\varphi_p) \in F_{p+1}. \text{ De plus } \varphi_{p+1} \in F_{p+1}.$$

Ainsi $U(\varphi_{p+1})$ est combinaison linéaire de deux éléments de F_{p+1} .

Comme F_{p+1} est un sous-espace vectoriel : $U(\varphi_{p+1}) \in F_{p+1}$.

$$\text{Dac } \forall k \in \llbracket 0, p+1 \rrbracket, U(\varphi_k) \in F_{p+1}$$

$$\text{Alors } U(F_{p+1}) = \text{Vect}(U(\varphi_0), U(\varphi_1), \dots, U(\varphi_{p+1})) \subset F_{p+1}. \text{ Ceci achève la}$$

récurrence.

Pour tout p dans $\mathbb{N}$, $F_p = \text{Vect}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est stable par U .

Δ Suite
P. 17

$$\leq p=1. \text{ Nous venons de voir que } U(\varphi_0) = \frac{1}{a+1} \varphi_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p \text{ base} \\ \text{de } F \end{array} \right.$$

$$\text{D'après a) } U(\varphi_1) = \frac{1}{a+1} \varphi_1 + \frac{1}{a+1} U(\varphi_0) \text{ et } U(\varphi_2) = \frac{1}{a+1} \varphi_2 + \frac{2}{a+1} U(\varphi_1).$$

$$\text{Alors } U(\varphi_0) = \frac{1}{a+1} \varphi_0.$$

$$U(\varphi_1) = \frac{1}{a+1} \varphi_1 + \left(\frac{1}{1+a}\right)^2 \varphi_0.$$

$$U(\varphi_2) = \frac{1}{a+1} \varphi_2 + \frac{2}{a+1} \left(\frac{1}{a+1} \varphi_1 + \left(\frac{1}{1+a}\right)^2 \varphi_0\right) = \frac{1}{a+1} \varphi_2 + \frac{2}{(a+1)^2} \varphi_1 + \frac{2}{(1+a)^3} \varphi_0$$

$$\text{Ainsi } T_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a+1} & \frac{1}{(a+1)^2} & \frac{2}{(a+1)^3} \\ 0 & \frac{1}{a+1} & \frac{2}{(a+1)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Posons } b = \frac{1}{a+1} \quad T_2 = \begin{pmatrix} b & b^2 & 2b^3 \\ 0 & b & 2b^2 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 & b & 2b^2 \\ 0 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = b (I_3 + J_3) \quad \text{Posons } J_3 = \begin{pmatrix} 0 & b & 2b^2 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$T_2 = b (I_3 + J_3). \quad I_3 \text{ et } J_3 \text{ commutent donc}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_2^n = b^n \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} J_3^\ell.$$

$$J_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & b & 2b^2 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b & 2b^2 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$J_3^3 = \begin{pmatrix} 0 & b & 2b^2 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Supposons } n \geq 2 \quad T_2^n = b^n \left(I_3 + n J_3 + \frac{n(n-1)}{2} J_3^2 \right)$$

$$T_2^n = b^n \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & b & 2b^2 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Notons que ceci vaut encore pour $n=0$ et $n=1$.

$$T_2^n = b^n \begin{pmatrix} 1 & nb & n(n+1)b^2 \\ 0 & 1 & 2nb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^n & nb^{n+1} & n(n+1)b^{n+2} \\ 0 & b^n & 2nb^{n+1} \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} \text{ pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}. \\ \text{avec } b = \frac{1}{1+a}.$$

$$|b| = \left| \frac{1}{1+a} \right| = \frac{1}{1+a} < 1 \text{ car } a > 0.$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^n = 0$ et par croissance comparée $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nb^{n+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n(n+1)b^{n+2}) = 0.$

La limite des coefficients de T_2^n lorsque n tend vers $+\infty$ est 0.

suite et fin de Q5b.

montrons que $(e_0, e_1, \dots, e_p)$ est une base de F_p pour tout p dans $\mathbb{N}$.

soit $p \in \mathbb{N}$. Par définition de F_p , $(e_0, e_1, \dots, e_p)$ est une famille génératrice de F_p . Montrons que cette famille est l.h.c.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tel que $\sum_{k=0}^p \alpha_k e_k = 0_e$.

$$\forall x \in \mathbb{T}, \sum_{k=0}^p \alpha_k e^{-ix} x^k = 0. \quad \forall x \in \mathbb{T}, \sum_{k=0}^p \alpha_k x^k = 0.$$

Alors le polynôme $\sum_{k=0}^p \alpha_k x^k$ admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. Donc $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$. ce qui a dû être la motivation de la liberté de la famille $(e_0, e_1, \dots, e_p)$.

Donc $(e_0, e_1, \dots, e_p)$ est une base de F_p .

(Q6) Soit f un élément de E et soit $x \in I$.

Soit $A \in I$. $t \mapsto t-x$ et de dans E l'un I u qui justifie le changement de variable $u = t-x$ dans α qui suit.

$$\int_x^A e^{-at} f(t) dt = \int_0^{A-x} e^{-a(u+x)} f(u+x) du = e^{-ax} \int_0^{A-x} e^{-au} f(x+u) du.$$

Donc $(A-x) \rightarrow +\infty$ et $\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ converge.

Alors $\int_0^{+\infty} e^{-au} f(x+u) du$ converge et $\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = e^{-ax} \int_0^{+\infty} e^{-au} f(x+u) du$.

$$U(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = e^{ax} e^{-ax} \int_0^{+\infty} e^{-au} f(x+u) du = \int_0^{+\infty} e^{-au} f(x+u) du.$$

$$\forall f \in E, \forall x \in I, U(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t) dt.$$

(Q7) α doit être un élément de E . Soit α une fonction bornée sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. K α et de même pour $|f|$. Ainsi $|f|$ appartient à E .

Soit $x \in I$. Soit $A \in [x, +\infty[$.

$$\left| \int_x^A e^{-at} f(t) dt \right| \leq \int_x^A e^{-at} |f(t)| dt = \int_x^A e^{-at} |f(t)| dt.$$

et $\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ et $\int_x^{+\infty} e^{-at} |f(t)| dt$ convergent. Donc :

$$\left| \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \right| \leq \int_x^{+\infty} e^{-at} |f(t)| dt.$$

$$|U(f)(x)| = e^{ax} \left| \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \right| = e^{ax} \left| \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \right| \leq e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} |f(t)| dt = U(|f|)(x).$$

$$\forall f \in E, \forall x \in I, |U(f)(x)| \leq U(|f|)(x). \text{ ou } \forall f \in E, |U(f)| \leq U(|f|).$$

b) v1 φ est à valeurs positives donc $|\varphi| = \varphi$. Alors $0 \leq |U(\varphi)| \leq U(|\varphi|) = U(\varphi)$ car $\varphi \in E$ donc $U(\varphi)$ est à valeurs positives.

v2 φ est un élément de E tel que $\forall x \in I, \varphi(x) \geq 0$. Posons $\psi = U(\varphi)$.

Soit $x \in I$. $\forall t \in [x, +\infty[$, $e^{-at} \varphi(t) \geq 0$

d'où $\int_x^{+\infty} e^{-at} \varphi(t) dt \geq 0$ ($x \leq +\infty$!). A $e^{ax} \geq 0$ d'où

$$\psi(x) = U(\varphi)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} \varphi(t) dt \geq 0.$$

Si φ est un élément de E à valeurs positives, $\psi = U(\varphi)$ est à valeurs positives.

□ Supposons φ décroissante sur I

Soit $x \in I$. $\forall t \in [x, +\infty[$, $\varphi(t) \leq \varphi(x)$ et $e^{-at} \geq 0$.

$\forall t \in [x, +\infty[$, $e^{-at} \varphi(t) \leq e^{-at} \varphi(x)$ car on a déjà fait.

$$\text{Rais } \int_x^{+\infty} e^{-at} \varphi(t) dt \leq \varphi(x) \int_x^{+\infty} e^{-at} dt = \varphi(x) \times \frac{e^{-ax}}{a} \text{ et } e^{ax} \geq 0$$

$$\text{Ainsi } U(\varphi)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} \varphi(t) dt \leq e^{ax} \varphi(x) \frac{e^{-ax}}{a} = \frac{1}{a} \varphi(x).$$

$$\text{Alors } a \psi(x) = a U(\varphi)(x) \leq \varphi(x).$$

$$\underline{\underline{\forall x \in I, a \psi(x) \leq \varphi(x).}}$$

$\forall x \in I$, $\psi'(x) = a \psi(x) + \varphi(x) = 0$ par définition de $\psi = U(\varphi)$.

$\forall x \in I$, $\psi'(x) = a \psi(x) + \varphi(x) \leq 0$. ψ est décroissante sur I .

Si φ est décroissante sur I , $\psi = U(\varphi)$ est décroissante sur I .

(Q8) Notons que si f est un élément de E_1 , $f' \in E$.

On peut également aisément démontrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de E .

a) Soit f un élément de E_1 . Soit x dans J et soit A dans I .

$u: t \mapsto f(x+t)$ et $v: t \mapsto -\frac{e^{-at}}{a}$ sont dans $\mathcal{D}'$ sur I

$\forall t \in I, u'(t) = f'(x+t)$ et $v'(t) = e^{-at}$. En intégrant par parties il vient alors

$$\int_0^A e^{-at} f(x+t) dt = \left[-\frac{e^{-at}}{a} f(x+t) \right]_0^A - \int_0^A \left(-\frac{e^{-at}}{a} \right) f'(x+t) dt.$$

$$a \int_0^A e^{-at} f(x+t) dt = -e^{-aA} f(x+A) + f(x) + \int_0^A e^{-at} f'(x+t) dt.$$

f et f' sont dans E donc $\int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t) dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-at} f'(x+t) dt$ convergent et valent respectivement $U(f)(x)$ et $U(f')(x)$.

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} (-e^{-aA} f(x+A)) = 0 \text{ car } \lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-aA} = 0 \text{ et } f \text{ est bornée sur } J.$$

Alors $a U(f)(x) = 0 + f(x) + U(f')(x)$ et ceci pour tout x dans J .

$$\underline{\underline{\forall f \in E_1, a U(f) = f + U(f')}}.$$

b) Soit $f \in E_1$. $(U(f))' - a U(f) + f = 0_E$ par définition de $U(f)$.

$$\text{d'où } (U(f))' = a U(f) - f = f + U(f') - f = U(f').$$

$$\underline{\underline{\forall f \in E_1, D(U(f)) = U(D(f))}}.$$

c) Soit f un élément de E_1 . Supposons que f ait des valeurs positives et décroissantes.

$-D(f)$ est positive sur I et ainsi $U(-D(f))$ est positive sur I .

d'après 7 b) (appelons que $-D(f) \in E$ car $f \in E_1$).

Alors $D(U(f)) = U(D(f)) = -U(-D(f))$ est négative sur I .

d'où $\underline{\underline{U(f) \text{ est décroissante sur } I}}.$

II Comportement asymptotique de $V(f)$ au voisinage de $+\infty$

(Q1) Résultats préliminaires.

1) Notons que α est continue sur I . De plus:

$$1^\circ \quad \alpha(u) = o(\beta(u)) \text{ d'ac } | \alpha(u) | = o(|\beta(u)|) = o(\beta(u))$$

$u \rightarrow +\infty$ $u \rightarrow +\infty$ $u \rightarrow +\infty$

$$2^\circ \quad \forall u \in I, \quad |\alpha(u)| \geq 0 \text{ et } \beta(u) \geq 0.$$

$$3^\circ \quad \int_1^{+\infty} \beta(t) dt \text{ converge.}$$

des règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrant que $\int_1^{+\infty} |\alpha(t)| dt$ converge. $\int_1^{+\infty} \alpha(t) dt$ est absolument convergente d'ac convergente.

$$\alpha(u) = o(\beta(u)). \text{ Ainsi } \exists A_1 \in I, \exists \varepsilon \in \mathcal{O}([A_1, +\infty[; \mathbb{R}),$$

$u \rightarrow +\infty$

$$\forall u \in [A_1, +\infty[, \alpha(u) = \varepsilon_1(u) \times \beta(u) \text{ et } \lim_{u \rightarrow +\infty} \varepsilon_1(u) = 0.$$

$$\text{Soit } \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*. \exists A \in [A_1, +\infty[, \forall u \in [A, +\infty[, |\varepsilon_1(u)| \leq \varepsilon \text{ car}$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \varepsilon_1(u) = 0.$$

$$\text{Alors } \forall u \in [A, +\infty[, |\alpha(u)| = |\varepsilon_1(u)| \beta(u) \leq \varepsilon \beta(u) = \varepsilon \beta(u).$$

$$\text{Alors } \forall u \in [A, +\infty[, \forall t \in [x, +\infty[, |\alpha(t)| \leq \varepsilon \beta(t).$$

$$\text{d'ac } \int_x^{+\infty} |\alpha(t)| dt \leq \varepsilon \int_x^{+\infty} \beta(t) dt \text{ pour tout } x \text{ dans } [A, +\infty[\text{ (car}$$

$$\int_1^{+\infty} |\alpha(t)| dt \text{ et } \int_1^{+\infty} \beta(t) dt \text{ convergent).}$$

$$\text{d'ac } \left| \int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \right| \leq \int_x^{+\infty} |\alpha(t)| dt \leq \varepsilon \int_x^{+\infty} \beta(t) dt \text{ pour tout } x \text{ dans } [A, +\infty[$$

$$\text{Finalement } \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}_+, \forall u \in [A, +\infty[, \left| \int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \right| \leq \varepsilon \int_x^{+\infty} \beta(t) dt,$$

Rappelons que β est continue et strictement positive sur I .

Alors $\forall x \in I, \int_x^{+\infty} \beta(t) dt > 0$.

Donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in [1, +\infty[, \forall x \in [A, +\infty[, \left| \frac{\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt}{\int_x^{+\infty} \beta(t) dt} \right| \leq \varepsilon$

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt}{\int_x^{+\infty} \beta(t) dt} = 0$.

Ainsi $\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt = o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t) dt\right)$.

b) $\alpha(x) \sim \beta(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Donc $1/\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x))$.

2°/ $\alpha - \beta$ et β sont continues sur I , β est strictement positive et $\int_x^{+\infty} \beta(t) dt$ converge

on peut donc appliquer ce qui précède et dire que :

$$\int_x^{+\infty} (\alpha(t) - \beta(t)) dt = o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t) dt\right).$$

$\int_x^{+\infty} (\alpha(t) - \beta(t)) dt$ et $\int_x^{+\infty} \beta(t) dt$ convergent pour tout x dans I .

Alors pour tout x dans I $\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt$ converge et

$$\int_x^{+\infty} (\alpha(t) - \beta(t)) dt = \int_x^{+\infty} \alpha(t) dt - \int_x^{+\infty} \beta(t) dt.$$

$$\text{Alors } \int_x^{+\infty} \alpha(t) dt - \int_x^{+\infty} \beta(t) dt = o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t) dt\right)$$

ce qui donne : $\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \sim \int_x^{+\infty} \beta(t) dt$.

Q2 Ces des fonctions admettant une limite en $+\infty$.

Supposons que $f \in E$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = b$. ($b \in \mathbb{R}$).

1^{er} cas.. $b=0$. $f(t) = o(1)$.
 $t \rightarrow +\infty$

Ainsi $e^{-at} f(t) = o(e^{-at})$.
 $t \rightarrow +\infty$

$t \mapsto e^{-at} f(t)$ et $t \mapsto e^{-at}$ sont continues sur I

$t \mapsto e^{-at}$ est strictement positive sur I

$\int_1^{+\infty} e^{-at} dt$ converge.

Alors qd donne: $\int_k^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = o\left(\int_k^{+\infty} e^{-at} dt\right) = o\left(\frac{e^{-ak}}{a}\right)$.
 $k \rightarrow +\infty$

donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^{-ak}} \int_k^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \right) = 0$; $\lim_{k \rightarrow +\infty} (e U(f)(k)) = 0$.

Or $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} = 0$. Au produit d'avec alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} U(f)(k) = 0$.

2nd cas.. b est quelconque. Posons $\tilde{f} = f - b$

$\tilde{f} \in E$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{f}(t) = 0$. Alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} U(\tilde{f})(k) = 0$.

$U(\tilde{f}) = U(f) - U(b) = U(f) - b U(1) = U(f) - b U(f_0) = U(f) - \frac{b}{a} f_0$.

$\forall k \in I$, $U(f)(k) = U(\tilde{f})(k) + \frac{b}{a}$.

$\lim_{k \rightarrow +\infty} U(f)(k) = 0 + \frac{b}{a}$. Notons que le résultat du 2nd cas vient dans le 1^{er} cas.

$\forall b \in \mathbb{R}$, $\forall f \in E$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = b \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} U(f)(k) = \frac{b}{a}$.

Q3 Cas des fonctions puissances.

Notons que f_ω est continue et bornée sur I ($\forall t \in I, 0 \leq f_\omega(t) \leq 1$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Ainsi f_ω appartient à E .

a) **V1** doit $x \in I$ et soit $A \in \mathbb{R}$. En intégrant par parties il vient ainsi et

$$\int_x^A e^{-at} f_\omega(t) dt = \int_x^A e^{-at} t^{-\omega} dt = \left[-\frac{e^{-at}}{a} t^{-\omega} \right]_x^A - \int_x^A \left(-\frac{e^{-at}}{a} \right) (-\omega t^{-\omega-1}) dt$$

$$\int_x^A e^{-at} f_\omega(t) dt = -\frac{1}{a} e^{-aA} \frac{1}{A^\omega} + \frac{e^{-ax}}{a} \frac{1}{x^\omega} - \frac{\omega}{a} \int_x^A e^{-at} f_{\omega+1}(t) dt.$$

$$\int_x^{+\infty} e^{-at} f_\omega(t) dt \text{ et } \int_x^{+\infty} e^{-at} f_{\omega+1}(t) dt \text{ convergent et } \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{a} e^{-aA} \frac{1}{A^\omega} \right) = 0.$$

$$\text{Ainsi } \int_x^{+\infty} e^{-at} f_\omega(t) dt = \frac{1}{a} e^{-ax} f_\omega(x) - \frac{\omega}{a} \int_x^{+\infty} e^{-at} f_{\omega+1}(t) dt.$$

En multipliant par e^{ax} on obtient :

$$U(f_\omega)(x) = \frac{1}{a} f_\omega(x) - \frac{\omega}{a} U(f_{\omega+1})(x).$$

$$g_\omega(x) = \frac{1}{a} f_\omega(x) - \frac{\omega}{a} g_{\omega+1}(x).$$

$$\forall x \in I, g_\omega(x) = \frac{1}{a} f_\omega(x) - \frac{\omega}{a} g_{\omega+1}(x).$$

$$\frac{1}{f_{\omega+1}} = O\left(\frac{1}{f_\omega}\right); \quad e^{-at} f_{\omega+1}(t) = o\left(e^{-at} f_\omega(t)\right) \text{ as } t \rightarrow +\infty$$

et pour $\forall t \in I, e^{-at} f_\omega(t) > 0$ et $\int_x^{+\infty} e^{-at} f_\omega(t) dt$ converge car $f_\omega \in E$

$$\text{Ainsi d'après Q1 } \int_x^{+\infty} e^{-at} f_{\omega+1}(t) dt > 0 \quad \left(\int_x^{+\infty} e^{-at} f_\omega(t) dt \right).$$

V2 IQ8 a donné immédiatement

$aU(f_\omega) = f_\omega + U(f'_\omega)$. En remarquant que $f'_\omega = -\omega f_{\omega+1}$ il vient en utilisant la linéarité de U :
 $aU(f_\omega) = f_\omega - \omega U(f_{\omega+1})$ ce qui donne
 $a g_\omega = f_\omega - \omega g_{\omega+1}$ ou
 $g_\omega = \frac{f_\omega}{a} - \frac{\omega}{a} g_{\omega+1}$

$$\text{Dac } e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f_{\omega_H}(t) dt = o \left(e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f_{\omega}(t) dt \right).$$

$$\text{Ainsi } f_{\omega_H}(x) = o(f_{\omega}(x)) \text{ as } x \rightarrow +\infty.$$

$$\text{Alors } \frac{\omega}{a} f_{\omega_H}(x) = o(f_{\omega}(x)) \text{ dac } f_{\omega}(x) + \frac{\omega}{a} f_{\omega_H}(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} f_{\omega}(x).$$

$$\text{Dac } \frac{f_{\omega}(x)}{a} = f_{\omega}(x) + \frac{\omega}{a} f_{\omega_H}(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} f_{\omega}(x).$$

$$\underline{\underline{f_{\omega}(x) \sim \frac{f_{\omega}(x)}{a} \text{ as } x \rightarrow +\infty.}}$$

$$\text{b) soit } t \in [1, +\infty[. \quad e^{-at} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-at)^k}{k!}. \text{ Soit } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Alors on a que } \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt = \int_1^x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-at)^k}{k!} \cdot \frac{1}{t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_1^x \frac{(-at)^k}{k!} \cdot \frac{1}{t} dt.$$

$$\text{Il s'agit de montrer que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_1^x \frac{(-at)^k}{k!} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt.$$

$$\text{Ou que : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t} \left(e^{-at} - \sum_{k=0}^n \frac{(-at)^k}{k!} \right) dt = 0.$$

$$\varphi : t \mapsto e^{-at} \text{ admet donc } \varphi^{(n)} \text{ sur }]-\infty, 0]. \quad \forall k \in \mathbb{N}, \varphi^{(k)} = \varphi. \text{ Soit } n \in \mathbb{N}.$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre n en 0 donne :

$$\forall u \in]-\infty, 0], \left| \varphi(u) - \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) \right| \leq \frac{|u|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{\xi \in [u, 0]} |\varphi^{(n+1)}(\xi)|$$

$$\forall u \in]-\infty, 0], \left| \varphi(u) - \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} \right| \leq \frac{|u|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{\xi \in [u, 0]} e^{\xi} = \frac{|u|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\text{Alors } \forall t \in [x, +\infty[, \left| e^{-at} - \sum_{k=0}^n \frac{(-at)^k}{k!} \right| \leq \frac{1 \cdot at^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\forall t \in [x, +\infty[, \left| \frac{e^{-at}}{t} - \sum_{k=0}^n \frac{(-at)^k}{k!} \cdot \frac{1}{t} \right| \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} t^n.$$

$x > 1$ donc

$$\left| \int_1^x \left(\frac{e^{-at}}{t} - \sum_{k=0}^n \frac{(-a)^k}{k!} \frac{1}{t} \right) dt \right| \leq \int_1^x \left| \frac{e^{-at}}{t} - \sum_{k=0}^n \frac{(-a)^k}{k!} \frac{1}{t} \right| dt \leq \int_1^x \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} t^n dt.$$

$$\left| \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt - \sum_{k=0}^n \int_1^x \frac{(-a)^k}{k!} \frac{1}{t} dt \right| \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_1^x = \frac{a^{n+1}}{(n+1)(n+1)!} (x^{n+1} - 1) \leq \frac{(ax)^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}.$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(ax)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ car la série de terme général $\frac{(ax)^{n+1}}{(n+1)!}$ converge et

est $\frac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(ax)^{n+1}}{(n+1)! (n+1)} = 0$.

Il est alors par encadrement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_1^x \frac{(-a)^k}{k!} \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt$.

$$\int_1^x \frac{(-a)^0}{0!} \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^x = \ln x.$$

$$\text{Ainsi } \forall k \in \mathbb{N}^*, \int_1^x \frac{(-a)^k}{k!} \frac{1}{t} dt = \frac{(-a)^k}{k!} \int_1^x t^{k-1} dt = \frac{(-a)^k}{k!} \frac{x^k - 1}{k}.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\ln x + \sum_{k=1}^n \frac{(-a)^k}{k!} \frac{x^k - 1}{k} \right] = \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt.$$

$$\ln x + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{a^k}{k k!} (x^k - 1) = \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt.$$

Ainsi la série de terme général $(-1)^k \frac{a^k}{k k!} (x^k - 1)$ converge.

$$\text{2° } \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt = \ln x + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k k!} (x^k - 1).$$

Ceci pour tout x dans I

$$\forall x \in I, g_1(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt = e^{ax} \left[- \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt \right]$$

$$\forall x \in I, g_1(x) = e^{ax} \left[- \ln x - \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k k!} (x^k - 1) + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt \right].$$

Q4) Cas des fonctions comparables aux fonctions puissances f_w

a) soit $w \in \mathbb{R}_+^p$. Supposons que $f \underset{t \rightarrow \infty}{=} o(f_w)$.

$$\text{si } e^{-at} f(t) = o(e^{-at} f_w(t))$$

et $x \mapsto e^{-ax} f(x)$ et $x \mapsto e^{-ax} f_w(x)$ sont continues sur $\mathbb{J}$

et $\forall x \in \mathbb{J}, e^{-ax} f_w(x) > 0$ et $\int_1^{+\infty} e^{-at} f_w(t) dt$ converge ($f_w \in E$).

$$\text{Alors } \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = o\left(\int_x^{+\infty} e^{-at} f_w(t) dt\right) \text{ d'après II 9.1}$$

$$\text{d'où } e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = o\left(e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f_w(t) dt\right).$$

$$\text{Ainsi } U(f) \underset{t \rightarrow \infty}{=} o(U(f_w))$$

Si w est un idéal strictement positif et si $f \underset{t \rightarrow \infty}{=} o(f_w)$ alors $U(f) \underset{t \rightarrow \infty}{=} o(U(f_w))$

$$\text{ou } g \underset{t \rightarrow \infty}{=} o(g_w).$$

b) Soit w un idéal strictement positif. Supposons $f \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} f_w$

$$f - f_w \in E \text{ et } f - f_w \underset{t \rightarrow \infty}{=} o(f_w)$$

$$\text{d'où } U(f - f_w) \underset{t \rightarrow \infty}{=} o(U(f_w)); \quad g - g_w = U(f) - U(f_w) = U(f - f_w) \underset{t \rightarrow \infty}{=} o(g_w)$$

$$\text{Ainsi } g \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} g_w. \text{ Or } g_w \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{f_w}{a}; \text{ , d'où } g \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{f_w}{a} \sim \frac{f}{a}.$$

Si w est un idéal strictement positif et si $f \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} f_w$: $U(f) = g \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{f}{a}$.

III Convergence absolue de $\int_1^{+\infty} U(t) dt$

Q1 Etudes d'exemples

a) Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. $q_k = U(f_k) = \frac{1}{a+k} f_k$ d'après I 93

Notons en particulier que $\int_1^{+\infty} e^{-kt} dt$ existe et vaut $\frac{e^{-1}}{k}$.

Donc $\int_1^{+\infty} f_k(t) dt$ converge. Alors $\int_1^{+\infty} q_k(t) dt$ converge.

b) Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. $g_\omega \sim \frac{f_\omega}{a}$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+, \frac{f_\omega(t)}{a} \gg 0$.

Alors $\int_1^{+\infty} g_\omega(t) dt$ a de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{f_\omega(t)}{a} dt$ donc que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\omega}$.

Ainsi $\int_1^{+\infty} g_\omega(t) dt$ converge si et seulement si $\omega > 1$.

Q2 a) Notons que F (resp. G) est la primitive de f (resp. g) sur l'intervalle I qui prend la valeur 0 à 1.

Pour $\forall k \in I$, $\ell(k) = G'(k) - a G(k) + F(k) = g(k) - a G(k) + F(k)$.

Est-elle nulle sur I et $\forall k \in I$, $\ell'(k) = g'(k) - a g(k) + f(k) = 0$
 $\hat{=}$ $g = U(f)$ et relation de E11.

Est-elle constante sur l'intervalle I .

On plus $\ell(1) = g(1) - a \ell(1) + F(1) = g(1)$.

Alors $\forall k \in I$, $\ell(k) = g(1)$.

$\forall k \in I$, $G'(k) - a G(k) = -F(k) + g(1)$.

b) F n'est donc pas nulle sur I car c'est une primitive d'une fonction continue sur I .

Alors F est continue sur I .

$$\forall t \in I, f(t) \geq 0 \text{ et } \int_1^{+\infty} f(t) dt \text{ converge.}$$

$$\forall x \in I, 0 \leq \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^{+\infty} f(t) dt.$$

$$\text{Alors } \forall x \in I, 0 \leq F(x) \leq \int_1^{+\infty} f(t) dt.$$

F est continue sur I , bornée sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. $F \in E$.

$$\text{Prenons } \forall x \in I, H(x) = U(F)(x) - \frac{g(1)}{a}.$$

$$\text{H est dérivable sur } I \text{ et } \forall x \in I, H'(x) - a H(x) = \underbrace{(U(F))'(x) - a U(F)(x)}_{= F(x)} + g(x)$$

$$\text{Alors } H' - aH = -F + g(x) = G' - aG$$

Donc $(G-H)' - a(G-H) = 0$. $G-H$ est solution de l'équation différentielle

$$y' - ay = 0. \text{ Alors } \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (G-H)(x) = K e^{ax}$$

$$\text{Donc } \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I, G(x) = K e^{ax} + H(x)$$

$$\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I, G(x) = K e^{ax} + (U(F))(x) - \frac{g(1)}{a}.$$

c) g est bornée sur I . $\exists C \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in I, |g(x)| \leq C$.

$$\forall x \in I, \left| \frac{G(x)}{x} \right| = \frac{1}{x} \left| \int_1^x g(t) dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_1^x |g(t)| dt \leq \frac{1}{x} \int_1^x C dt = \frac{x-1}{x} C \leq C.$$

$x \geq 1$

$$\underline{\underline{x \mapsto \frac{G(x)}{x} \text{ est bornée sur } I.}}$$

d) $\forall x \in I, K = e^{-ax} G(x) - e^{-ax} U(F)(x) + \frac{g(1)}{a} e^{-ax}. \quad \textcircled{1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-ax} G(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{-ax} \frac{G(x)}{x} \right) = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{-ax}) = 0 \text{ par}$$

la croissance comparée et $x \mapsto \frac{G(x)}{x}$ est bornée sur I .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-ax} U(F)(x)) = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-ax} = 0 \text{ et } U(F) \text{ est bornée sur } I.$$

$$\text{De plus } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(k)}{a} e^{-k/a} \right) = 0.$$

En faisant tendre k vers $+\infty$ dans $\odot$ il vient : $K=0$.

$$\text{Alors } \underline{\underline{G = U(F) - \frac{g(1)}{a}}}$$

Remarque... ce résultat est clair dès que l'on a montré que $F \in E$. En effet si $F \in E$:

$$G' - aG = -F + g(1). \quad G = \frac{1}{a} (G' + F - g(1)) = \frac{1}{a} (g + F - g(1))$$

$$\textcircled{*} \quad G = \frac{1}{a} (g - (U(F))' + a U(F) - g(1)) = U(F) - \frac{1}{a} g(1); \text{ d'où le résultat !}$$

$$\uparrow$$

$$(U(F))' - aU(F) + F = 0 \quad (U(F))' = U(F') = U(g) = g.$$

$$\underline{\underline{e)} \quad G = U(F) - \frac{g(1)}{a}}. \quad (\text{comme } U(F) \text{ est bornée sur } I : \underline{\underline{G \text{ est bornée sur } I}}).$$

Remarque... cela est clair dès que $F \in E$ car $G = \frac{1}{a} (G' + F - g(1)) = \frac{1}{a} (g + F - g(1))$!

En particulier $\exists n \in \mathbb{R}_+, \forall k \in I, |G(k)| \leq n$. $\forall \epsilon > 0, \int_1^n g(t) dt \leq n$

Alors g est continue et positive sur I et $x \mapsto \int_1^x g(t) dt$ est majorée sur I

d'où $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ converge.

$\textcircled{Q3}$ Soit $\int_1^{+\infty} p(t) dt$ absolument convergente. Alors $|f| \in E$, $|f|$ est à valeurs positives et $\int_1^{+\infty} |f(t)| dt$ converge. D'après 2 $\int_1^{+\infty} U(|f|)(t) dt$ converge.

$$a \quad \forall t \in I, 0 \leq |U(f)(t)| \leq U(|f|)(t).$$

$$\text{Alors } \int_1^{+\infty} |U(f)(t)| dt \text{ converge.}$$

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{\int_1^{+\infty} g(t) dt \text{ est absolument convergente.}}}$$

$\textcircled{*}$ Si $F \in E$, g et F sont bornées et ainsi G est bornée

$\textcircled{*}$ et $\textcircled{*}$ montrent que l'on a beaucoup considéré les choses...