

PARTIE I

(Q1) a) $AX=0$. $\forall i \in \overline{1, n}$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = 0$

$\stackrel{a)}{=} \stackrel{b)}{=} \text{ Soit } i_0 \in \overline{1, n} \text{ tel que } |x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j = 0$

$$a_{i_0,i_0} x_{i_0} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n a_{i_0,j} x_j$$

$$\forall j \in \overline{1, n}, |x_j| \leq |x_{i_0}| \text{ et } |a_{i_0,j}| \geq 0$$

$$|a_{i_0,i_0}| |x_{i_0}| = |a_{i_0,i_0} x_{i_0}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n a_{i_0,j} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0,j}| |x_j| \leq |x_{i_0}| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0,j}|$$

$$\text{Alors } |x_{i_0}| \left[|a_{i_0,i_0}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0,j}| \right] \leq 0.$$

La hypothèse $|a_{i_0,i_0}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0,j}| > 0$ et $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| > 0$ car $X \neq 0$

d'ac $|x_{i_0}| \left[|a_{i_0,i_0}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0,j}| \right] > 0$. La hypothèse, $AX=0$ et $X \neq 0$ donne

une contradiction.

c) Par conséquent $\forall X \in \Pi_{n,1}(\mathbb{C})$, $AX=0 \Rightarrow X=0$. A est inversible.

(Q2) a) soit λ un élément de $\mathbb{C}$ qui n'appartient pas à $\bar{0}$.

$$\forall i \in \overline{1, n}, \lambda \notin 0_i. \forall i \in \overline{1, n}, |a_{i,i} - \lambda| = |\lambda - a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|.$$

Ponons $B = (b_{i,j}) = A - \lambda I_n$.

$$\forall i \in \overline{1, n}, b_{i,i} = \begin{cases} a_{i,i} - \lambda & i=j \\ a_{i,j} & i \neq j \end{cases}$$

car $\forall i \in \overline{1, n}, |b_{i,i}| = |a_{i,i} - \lambda| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |b_{i,j}|$. B est d'ac une matrice

de $\Pi_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante. Ainsi $B = A - \lambda I_n$ est inversible

car λ n'est pas valeur propre.

Ainsi, si λ n'appartient pas à D , λ n'est pas valeur propre de A .

Pour conclure si λ est valeur propre de A , λ appartient à D .

Le spectre de A est contenu dans D .

b)

```
const Dimmax=10;
```

```
type Matrice=array[1..DimMax,1..DimMax] of real;  
    tableau=array[1..DimMax] of real;
```

```
procedure EntreMatrice(n:integer; var A:Matrice);
```

```
var i,j:integer;
```

```
begin
```

```
for i:=1 to n do  
    for j:=1 to n do  
        begin  
            write('Donner le coefficient de la ligne ',i,' et de la colonne ',j,' ');  
            readln(A[i,j]);  
        end;  
    end;
```

```
end;
```

```
Function Rayon(n:integer; A: matrice; var R:tableau) : real;
```

```
var i,j:integer;
```

```
begin
```

```
for i:=1 to n do  
    begin  
        R[i]:=0;  
        for j:=1 to n do  
            if i <> j then R[i]:=R[i]+abs(A[i,j])  
        end;  
    end;
```

```
end;
```

```
var n,i:integer;A:matrice; s: real; R:tableau;
```

```
begin
```

```
n:=3;
```

```
EntreMatrice(n,A);
```

```
s:=rayon(n,A,R);
```

```
For i:=1 to n do  
    begin  
        writeln('r',i,'=',R[i]);  
    end;
```

```
end.
```

c) i) A est une matrice symétrique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ à coefficients réels, donc A est diagonalisable.

ii) Notons r_1, r_2 et r_3 les rangs de D_1, D_2 et D_3 .

$$r_1 = 1 - 1 + 1 = 1; \quad r_2 = 1 - 1 + 1 - 1 = 2 \text{ et } r_3 = 1 + 1 - 1 = 1.$$

$$\text{Ainsi } D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| \leq 2\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 1\}.$$

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 1 \text{ ou } |z - 2| \leq 2\}$$

soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - 1| \leq 1$.

$$|z - 2| = |(z - 1) + (-1)| \leq |z - 1| + |-1| \leq 1 + 1 = 2.$$

$$\text{Donc } \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 1\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| \leq 2\}.$$

$$\text{Ainsi } \underline{D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| \leq 2\}}.$$

Ainsi $S_A \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| \leq 2\}$. A est une matrice symétrique à coefficients réels, $S_A \subset \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| \leq 2\}$.

$$\text{Or } \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| \leq 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x - 2 \leq 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\} = [0, 4].$$

La valeur propre de A est contenue dans l'intervalle $[0, 4]$ de $\mathbb{R}$.

ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \lambda x \\ -x + 2y - z = \lambda y \\ -y + z = \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (1 - \lambda)x = (1 - \lambda)z \\ -x + (2 - \lambda)y - z = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\text{Donc... } \lambda = 1.} \quad AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}$$

est valeur propre de A et $\text{SEP}(A, 1) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$

$$\lambda \neq 1$$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = (2-\lambda)x \\ -x + (2-\lambda)y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = (2-\lambda)x \\ 0 = x[-2 + (2-\lambda)(2-\lambda)] = x\lambda(\lambda-3) \end{cases}$$

$$\underline{a) \lambda = 0} \quad AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = x \end{cases}$$

0 est valeur propre de A et $\text{SEP}(A, 0) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$$\underline{b) \lambda = 3} \quad AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = -2x \end{cases}$$

3 est valeur propre de A et $\text{SEP}(A, 3) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

c) $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 3$ $AX = \lambda X \Leftrightarrow x = y = z = 0 \Leftrightarrow X = 0$. $\lambda \neq 0, 1, 3$ pas valeur propre de A.

Finalement $\underline{\underline{\text{Sp } A = \{0, 1, 3\}}}$. $\underline{\underline{\text{SEP}(A, 0) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}}$, $\underline{\underline{\text{SEP}(A, 1) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}}$,

et $\underline{\underline{\text{SEP}(A, 3) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}}$.

$\pi_{3,1}(\mathbb{R}) = \text{SEP}(A, 0) \oplus \text{SEP}(A, 1) \oplus \text{SEP}(A, 3)$, $B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\text{SEP}(A, 0)$,

$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\text{SEP}(A, 1)$ et $B_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\text{SEP}(A, 3)$.

Alors $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ est une base de $\pi_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres 0, 1, 3.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\pi_{3,1}(\mathbb{R})$ à B.

$$1^\circ \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 2^\circ \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Remarque $\therefore P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

2. Soit $(A, 0)$, $(A, 1)$ et $(A, 3)$ est orthogonale de B et une base orthogonale de $\pi_{3,(\mathbb{R})}$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $0, 1, 3$.

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3}, \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2} \text{ et } \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{6}.$$

Alors $\tilde{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base orthogonale de $\pi_{3,(\mathbb{R})}$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $0, 1, 3$. Soit $\hat{P}$ la matrice de passage de la base canonique B_0 de $\pi_{3,(\mathbb{R})}$ à $\tilde{B}$.

$$1^{\circ} \quad \hat{P} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \text{ ou } \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

2 $^{\circ}$ $\hat{P}$ est orthogonale car B_0 et $\tilde{B}$ sont orthogonales.

$$3^{\circ} \quad \hat{P}^{-1} A \hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Q3) a) Soit $i \in \overline{1, n}$.

$$|a_{i,i}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}| = a_{i,i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (-a_{i,j}) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} > 0.$$

$\uparrow$
 $a_{i,i} > 0$ et $a_{i,j} \leq 0$ si $i \neq j$

$\forall i \in \overline{1, n}$, $|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$. A est à diagonale strictement dominante.

Ainsi A est inversible ($\exists \varphi^{-1}$).

b) Soit $X \in \pi_{n,(\mathbb{R})}$ tel que AX ait toutes ses coordonnées strictement positives ou nulles.

Posons $AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Soit i_0 dans $\overline{1, n}$ tel que $x_{i_0} = \min_{1 \leq i \leq n} x_i$.

$$0 \leq y_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j = a_{i_0,i_0} x_{i_0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n a_{i_0,j} x_j \leq a_{i_0,i_0} x_{i_0} + x_{i_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n a_{i_0,j}$$

$$\begin{cases} a_{i_0,j} \leq 0 & \forall j \neq i_0 \\ x_{i_0} \leq x_j \end{cases}$$

donc $0 \leq x_{i_0} \left[a_{i_0,i_0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n a_{i_0,j} \right] = x_{i_0} \sum_{j=1}^n a_{i_0,j}$.

Or $\sum_{j=1}^n a_{i_0,j} > 0$ d'ac $x_{i_0} > 0$. Alors $0 \leq x_{i_0} = \min_{1 \leq i \leq n} x_i$.

Ainsi $\forall i \in \overline{1, n}, x_i \geq 0$.

c) Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit $j \in \overline{1, n}$. $\begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix}$ est la j -ième colonne de A^{-1} d'ac $\begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} = A^{-1} e_j$.

Alors $A \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} = A A^{-1} e_j = e_j$. $A \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} = \underline{\underline{e_j}}$ où e_j est la

j -ième élément de la base canonique de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$.

d) soit $j \in \overline{1, n}$. Les coordonnées de $A \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix}$ sont positives ou nulles

d'ac $\forall i \in \overline{1, n}, b_{i,j} \geq 0$.

Ainsi $\forall j \in \overline{1, n}, \forall i \in \overline{1, n}, b_{i,j} \geq 0$

les coefficients de A^{-1} sont tous positifs ou nuls.

c) Pour $A_\alpha = (b_{ij})$.

- $b_{1,1} = 1+\alpha > 0$, $b_{2,2} = 2+\alpha > 0$ et $b_{3,3} = 3+\alpha > 0$
- $b_{1,2} = -1$, $b_{1,3} = 0$, $b_{2,1} = -1$, $b_{2,3} = -1$, $b_{3,1} = 0$, $b_{3,2} = -1$.
- Donc $\forall (i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^3$, $i \neq j \Rightarrow b_{i,j} < 0$.
- $\sum_{j=1}^3 b_{1,j} = \alpha > 0$, $\sum_{j=1}^3 b_{2,j} = \alpha > 0$ et $\sum_{j=1}^3 b_{3,j} = \alpha > 0$.

Donc A_α vérifie (P).

Soient $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $x' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ tels que $A_\alpha x = x'$

$$\begin{cases} (1+\alpha)x - y = x' \\ -x + (2+\alpha)y - z = y' \\ -y + (1+\alpha)z = z' \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{1+\alpha} (x' + y) \\ z = \frac{1}{1+\alpha} (z' + y) \\ y' = -\frac{1}{1+\alpha} (x' + y) + (2+\alpha)y - \frac{1}{1+\alpha} (z' + y). \end{cases}$$

Alors $(1+\alpha)y' + x' + z' = y [-2 + (1+\alpha)(2+\alpha)]$; $y = \frac{1}{\alpha(\alpha+3)} [x' + (1+\alpha)y' + z']$.

$$x = \frac{1}{1+\alpha} \left[x' + \frac{1}{\alpha(\alpha+3)} x' + \frac{(1+\alpha)}{\alpha(\alpha+3)} y' + \frac{1}{\alpha(\alpha+3)} z' \right] = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)} [(x^2+3\alpha+1)x' + (\alpha+1)y' + z']$$

$$z = \frac{1}{1+\alpha} \left[z' + \frac{1}{\alpha(\alpha+3)} x' + \frac{1+\alpha}{\alpha(\alpha+3)} y' + \frac{1}{\alpha(\alpha+3)} z' \right] = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)} [x' + (\alpha+1)y' + (x^2+3\alpha+1)z']$$

Ainsi $A_\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)} \begin{pmatrix} \alpha^2+3\alpha+1 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha+1 & (\alpha+1)^2 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha+1 & \alpha^2+3\alpha+1 \end{pmatrix}$

partie II : convergence de suites de matrices.

(Q1) a) * Supposons que $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers X . $\forall i \in \{1, n\}$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_i^{(k)} = x_i$

$$\forall k \in \mathbb{N}, m(X_k - X) = \max_{i \in \{1, n\}} |x_i^{(k)} - x_i|.$$

$$\text{Alors } \forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq m(X_k - X) \leq \sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - x_i|.$$

$$\text{de plus } \forall i \in \{1, n\}, \lim_{k \rightarrow +\infty} |x_i^{(k)} - x_i| = 0 \text{ d'où } \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - x_i| = 0.$$

$$\text{A d'où il est alors par encadrement : } \lim_{k \rightarrow +\infty} m(X_k - X) = 0.$$

* Réciproquement supposons $\lim_{k \rightarrow +\infty} m(X_k - X) = 0$. Soit $i \in \{1, n\}$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq |x_i^{(k)} - x_i| \leq m(X_k - X). \text{ Par encadrement il vient } \lim_{k \rightarrow +\infty} |x_i^{(k)} - x_i| = 0.$$

$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_i^{(k)} = x_i$ et ceci pour tout i dans $\{1, n\}$. Ainsi $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers X .

$(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers X si et seulement si $\lim_{k \rightarrow +\infty} m(X_k - X) = 0$.

b) * Supposons que $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers M .

$$\forall (i, j) \in \{1, n\}^2, \lim_{k \rightarrow +\infty} m_{ij}^{(k)} = m_{ij} \text{ d'où } \forall (i, j) \in \{1, n\}^2, \lim_{k \rightarrow +\infty} |m_{ij}^{(k)} - m_{ij}| = 0$$

$$\text{Alors } \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |m_{ij}^{(k)} - m_{ij}| = 0 \text{ d'où } \lim_{k \rightarrow +\infty} s(M_k - M) = 0.$$

* Réciproquement supposons que $\lim_{k \rightarrow +\infty} s(M_k - M) = 0$. Soit $(i, j) \in \{1, n\}^2$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq |m_{ij}^{(k)} - m_{ij}| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |m_{ij}^{(k)} - m_{ij}| = s(M_k - M)$$

$$\text{Par encadrement on obtient : } \lim_{k \rightarrow +\infty} |m_{ij}^{(k)} - m_{ij}| = 0.$$

d'où $\lim_{k \rightarrow +\infty} m_{ij}^{(k)} = m_{ij}$ et ceci pour tout (i, j) dans $\{1, n\}^2$. $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers M .

Ainsi $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers M si et seulement si $\lim_{k \rightarrow +\infty} s(M_k - M) = 0$.

c) $\pi = (\pi_{ij})$ est un élément de $\pi_n(\mathbb{R})$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un élément de $\pi_{n,d}(\mathbb{R})$.

Posons $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \pi x$.

$$\forall i \in \overline{1, n}, |y_i| = \left| \sum_{j=1}^n \pi_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |\pi_{i,j}| |x_j| \leq m(x) \sum_{j=1}^n |\pi_{i,j}|.$$

$$\forall i \in \overline{1, n}, |y_i| \leq m(x) \sum_{j=1}^n |\pi_{i,j}| \leq m(x) s(\pi).$$

$$m(x) \geq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^n |\pi_{i,j}| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\pi_{i,j}| = s(\pi)$$

$$\forall i \in \overline{1, n}, |y_i| \leq m(x) s(\pi).$$

$$\text{Donc } m(\pi x) = m(y) = \max_{i \in \overline{1, n}} |y_i| \leq m(x) s(\pi).$$

$$\forall x \in \pi_{n,d}(\mathbb{R}), \forall \pi \in \pi_n(\mathbb{R}), m(\pi x) \leq m(x) s(\pi).$$

d) soit $(\pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\pi_n(\mathbb{R})$ qui converge vers la matrice π de $\pi_n(\mathbb{R})$. $\lim_{k \rightarrow +\infty} s(\pi_k - \pi) = 0$ (II § 3 b)).

Soit $x \in \pi_{n,d}(\mathbb{R})$. $\forall k \in \mathbb{N}$, on a $m(\pi_k x - \pi x) = m((\pi_k - \pi)x) \leq m(x) s(\pi_k - \pi)$ $\downarrow$ II § 3 c)

Pour chaque x on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} m(\pi_k x - \pi x) = 0$. II § 3 c) permet de

déduire que $(\pi_k x)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers πx .

si la suite $(\pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices de $\pi_n(\mathbb{R})$ converge vers la matrice π de $\pi_n(\mathbb{R})$

alors pour tout x dans $\pi_{n,d}(\mathbb{R})$, $(\pi_k x)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers πx .

e) soit $(\pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\pi_n(\mathbb{R})$ et soit π une matrice de $\pi_n(\mathbb{R})$

supposons que pour tout élément x de $\pi_{n,d}(\mathbb{R})$, $(\pi_k x)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers πx .

Montrons que $(\pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers π .

"En posant" : $\pi = (\pi_{i,j})$ et pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\pi_k = (\pi_{i,j}^{(k)})$.

Soit $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\Pi_n(\mathbb{R})$. Soit $j \in \overline{1, n}$.

la suite $(\pi_k E_j)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers πE_j .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\pi_k E_j$ est la $j^{\text{ième}}$ colonne de π_k , et πE_j est la $j^{\text{ième}}$ colonne de π .

$$\forall k \in \mathbb{N}, \pi_k E_j = \begin{pmatrix} m_{1,j}^{(k)} \\ m_{2,j}^{(k)} \\ \vdots \\ m_{n,j}^{(k)} \end{pmatrix} \text{ et } \pi E_j = \begin{pmatrix} m_{1,j} \\ m_{2,j} \\ \vdots \\ m_{n,j} \end{pmatrix}$$

Comme $(\pi_k E_j)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers πE_j : $\forall i \in \overline{1, n}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} m_{i,j}^{(k)} = m_{i,j}$.

Finalement $\forall j \in \overline{1, n}$, $\forall i \in \overline{1, n}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} m_{i,j}^{(k)} = m_{i,j}$.

Ainsi $(\pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers π .

Soit $(\pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\Pi_n(\mathbb{R})$ et π une matrice de $\Pi_n(\mathbb{R})$.

si pour tout élément X de $\Pi_n(\mathbb{R})$, $(\pi_k X)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers πX alors $(\pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$

converge vers π .

[] Soient $\pi = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ deux éléments de $\Pi_n(\mathbb{R})$. $\pi N \in \Pi_n(\mathbb{R})$.

Pour $\pi N = (t_{i,j})$.

$$\forall (i,j) \in \overline{1, n}^2, |t_{i,j}| = \left| \sum_{\ell=1}^n m_{i,\ell} n_{\ell,j} \right| \leq \sum_{\ell=1}^n |m_{i,\ell}| |n_{\ell,j}|$$

$$\text{Alors } s(\pi N) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |t_{i,j}| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^n |m_{i,\ell}| |n_{\ell,j}|$$

$$s(\pi N) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{\ell=1}^n \left[|m_{i,\ell}| \sum_{j=1}^n |n_{\ell,j}| \right]$$

$$\text{Or } \forall (\ell,j) \in \overline{1, n}^2, |m_{i,\ell}| \geq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^n |n_{\ell,j}| \leq \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n |n_{r,j}| = s(N)$$

$$\text{Donc } \forall (\ell,j) \in \overline{1, n}^2, |m_{i,\ell}| \sum_{j=1}^n |n_{\ell,j}| \leq |m_{i,\ell}| s(N).$$

$$\text{Dac } s(\pi N) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{e=1}^n [|m_{i,e}| \sum_{j=1}^n |m_{e,j}|] \leq \sum_{i=1}^n \sum_{e=1}^n [|m_{i,e}| s(N)] = s(N) \sum_{i=1}^n \sum_{e=1}^n |m_{i,e}|$$

$$\text{Ainsi } s(\pi N) \leq s(N) s(\pi) = s(\pi) s(N).$$

$$\forall (\pi, N) \in \Pi_n(\mathbb{R})^2, \quad s(\pi N) \leq s(\pi) s(N).$$

g) Soient $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ deux éléments de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$. $Y+Z = \begin{pmatrix} y_1+z_1 \\ y_2+z_2 \\ \vdots \\ y_n+z_n \end{pmatrix}$.

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |y_i + z_i| \leq |y_i| + |z_i| \leq m(Y) + m(Z).$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |y_i + z_i| \leq m(Y) + m(Z) \text{ dac } \text{Rap } |y_i + z_i| \leq m(Y) + m(Z).$$

$$\text{Alors } m(Y+Z) \leq m(Y) + m(Z).$$

$$\forall (Y, Z) \in (\Pi_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \quad m(Y+Z) \leq m(Y) + m(Z).$$

Soient Y et Z deux éléments de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$m(Y) = m((Y-Z)+Z) \leq m(Y-Z) + m(Z); \quad m(Y) - m(Z) \leq m(Y-Z).$$

$$m(Z) = m((Z-Y)+Y) \leq m(Z-Y) + m(Y); \quad m(Z) - m(Y) \leq m(Z-Y) = m(Y-Z).$$

$$\text{Alors } m(Y) - m(Z) \leq m(Y-Z) \text{ et } -(m(Y) - m(Z)) \leq m(Y-Z) \text{ dac } |m(Y) - m(Z)| \leq m(Y-Z).$$

$$\forall (Y, Z) \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R}), \quad |m(Y) - m(Z)| \leq m(Y-Z).$$

(Q2) a) Soit x un élément de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit E un élément de $\mathcal{W}$.

$$\pi_E' - \pi' = \pi'(\pi \pi_E' - I_n) = \pi'(\pi - \pi_E)\pi_E'.$$

$$\text{dacs } \pi_E' x - \pi' x = (\pi_E' - \pi')(x) = (\pi'(\pi - \pi_E))(\pi_E' x)$$

$$\text{Alors } m(\pi_E' x - \pi' x) = m(\pi'(\pi - \pi_E)(\pi_E' x)) \leq s(\pi'(\pi - \pi_E)) m(\pi_E' x)$$

$$\in \Pi \Phi \leq c$$

$$m(\pi_E' x - \pi' x) \leq s(\pi') s(\pi - \pi_E) m(\pi_E' x) \quad (\text{Et } \Phi \leq c \text{ et } m(\pi_E' x) \geq 0).$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \Pi_{n,k}(\mathbb{R}), m(\pi_k'x - \pi'x) \leq s(\pi')s(\pi - \pi_k) m(\pi_k'x).$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \Pi_{n,k}(\mathbb{R})$.

$$m(\pi_k'x) - m(\pi'x) \leq |m(\pi_k'x) - m(\pi'x)| \stackrel{\pi \Phi \pi g)}{\leq} m(\pi_k'x - \pi'x) \leq s(\pi')s(\pi - \pi_k) m(\pi_k'x).$$

$$\text{Alors } m(\pi_k'x)(1 - s(\pi')s(\pi - \pi_k)) \leq m(\pi'x).$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \Pi_{n,k}(\mathbb{R}), m(\pi_k'x)(1 - s(\pi')s(\pi - \pi_k)) \leq m(\pi'x).$$

b) $(\pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers π d'ac $\lim_{k \rightarrow +\infty} s(\pi_k - \pi) = 0$.

$$\text{Alors } \lim_{k \rightarrow +\infty} (1 - s(\pi')s(\pi_k - \pi)) = 1.$$

Donc $\exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket k_0, +\infty \llbracket, 1 - s(\pi')s(\pi_k - \pi) \geq \frac{1}{2}$. Soit $x \in \Pi_{n,k}(\mathbb{R})$

$$\forall k \in \mathbb{N}, m(\pi_k'x) \geq 0.$$

$$\text{Donc } \forall k \in \llbracket k_0, +\infty \llbracket, \frac{1}{2} m(\pi_k'x) \leq m(\pi_k'x)(1 - s(\pi')s(\pi_k - \pi)) \leq m(\pi'x).$$

$$\text{Donc } \forall k \in \llbracket k_0, +\infty \llbracket, m(\pi_k'x) \leq 2 m(\pi'x).$$

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket k_0, +\infty \llbracket, \forall x \in \Pi_{n,k}(\mathbb{R}), m(\pi_k'x) \leq 2 m(\pi'x).$$

c) Soit $x \in \Pi_{n,k}(\mathbb{R})$.

$$\forall k \in \llbracket k_0, +\infty \llbracket, 0 \leq m(\pi_k'x - \pi'x) \leq s(\pi')s(\pi - \pi_k) m(\pi_k'x) \leq s(\pi')s(\pi - \pi_k) 2 m(\pi')$$

$$\forall k \in \llbracket k_0, +\infty \llbracket, 0 \leq m(\pi_k'x - \pi'x) \leq 2 m(\pi'x) s(\pi')s(\pi - \pi_k). \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi \Phi \pi g \\ s(\pi - \pi_k)s(\pi') \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\text{a) } \lim_{k \rightarrow +\infty} (2 m(\pi'x) s(\pi')s(\pi - \pi_k)) = 0 \quad \text{car } \lim_{k \rightarrow +\infty} s(\pi - \pi_k) = 0 \text{ puisque}$$

$(\pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers π . Pour chaque x d'ac $\lim_{k \rightarrow +\infty} m(\pi_k'x - \pi'x) = 0$. Ainsi :

$(\pi_k'x)$ converge vers $\pi'x$ d'ac pour tout x dans $\Pi_{n,k}(\mathbb{R})$.

d) Pour tout x dans $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$, $(\Pi_k^{-1}x)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\Pi^{-1}x$ d'ac,
d'après II § 2, $(\Pi_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers Π^{-1} .

Q3) Pour tout k dans $\mathbb{N}$, Π_k vérifie la propriété (P) d'ac d'après
I § 3, Π_k est inversible et les coefficients de Π_k^{-1} sont positifs ou nuls.
 Π_k est inversible, pour tout k dans $\mathbb{N}$ Π_k est inversible et $(\Pi_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ converge
vers Π d'ac d'après II § 2 $(\Pi_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers Π^{-1} .

Pour $\forall k \in \mathbb{N}$, $\Pi_k^{-1} = (a_{i,j}^{(k)})$ et $\Pi^{-1} = (a_{i,j})$.

Notons remarquer de voir que $\forall (i,j) \in \{1, n\} \times \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, a_{i,j}^{(k)} \geq 0$

et $\forall (i,j) \in \{1, n\} \times \mathbb{N}^*, \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}$

Dans ces conditions $\forall (i,j) \in \{1, n\} \times \mathbb{N}^*, a_{i,j} \geq 0$.

les coefficients de la matrice Π^{-1} sont positifs ou nuls.

Q4) a) soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$. $AX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j} x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{n,j} x_j \end{pmatrix}$

$$(AX|X) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right) x_i.$$

$$(AX|X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j.$$

$$(AX|X) = \sum_{j=1}^n a_{1,j} x_j x_j + \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j + \sum_{j=1}^n a_{n,j} x_n x_j$$

$$(AX|X) = 2x_1^2 - x_1 x_2 + \sum_{i=2}^{n-1} x_i (-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1}) - x_n x_{n-1} + 2x_n^2$$

$$(AX|X) = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - x_1 x_2 - x_{n-1} x_n - \sum_{i=2}^{n-1} x_i x_{i-1} - \sum_{i=2}^{n-1} x_i x_{i+1}.$$

$$(AX|X) = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=2}^n x_i x_{i-1} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$$

$$(AX|X) = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=2}^n x_i x_{i-1} - \sum_{i=2}^n x_{i-1} x_i = 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - 2 \sum_{i=2}^n x_i x_{i-1}.$$

$$(AX|X) = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=2}^n (-2x_i x_{i-1}) = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=2}^n ((x_i - x_{i-1})^2 - x_i^2 - x_{i-1}^2).$$

$$(AX|X) = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=2}^n x_{i-1}^2$$

$$(AX|X) = 2x_1^2 + 2x_n^2 + 2 \sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 + \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1})^2 = \sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 - x_1^2 - \sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 + x_1^2$$

$$(AX|X) = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1})^2$$

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R}), \quad (AX|X) = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1})^2.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors $(AX|X) = 0$.

$$x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1})^2 = 0 \quad \text{d'où} \quad x_1^2 = x_n^2 = 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, (x_i - x_{i-1})^2 = 0.$$

$$\text{Alors } x_1 = x_n = 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, x_i - x_{i-1} = 0.$$

$$\text{d'où } x_1 = x_n = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = x_2 = \dots = x_n. \quad \text{Alors } x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0. \quad X = 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}.$$

$$\forall X \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R}), \quad AX = 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow X = 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}. \quad \underline{\underline{\text{A est inversible.}}}$$

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $A_\alpha = (a_{i,j}(\alpha))$.

$$\bullet \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,i}(\alpha) = 2 + \alpha > 0.$$

$$\bullet \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow a_{i,j}(\alpha) = a_{j,i}(\alpha) = \begin{cases} -\alpha & \text{si } j \in \{i-1, i+1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{d'où } \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow a_{i,j}(\alpha) \leq 0$$

$$\bullet \quad \sum_{j=1}^n a_{1,j}(\alpha) = (2+\alpha) - 1 = 1+\alpha > 0.$$

$$\sum_{j=1}^n a_{n,j}(\alpha) = -1 + (2+\alpha) = 1+\alpha > 0$$

$$\forall i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j}(\alpha) = -1 + (2+\alpha) + 1 = \alpha > 0.$$

$$\text{Donc } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j}(\alpha) > 0.$$

ceci achève de montrer que pour tout réel α , strictement positif, A_α vérifie la propriété' (P).

$$\underline{c)} \quad \text{Pour } \forall k \in \mathbb{N}, \quad \pi_k = A + \frac{1}{k+1} I_n.$$

$\forall k \in \mathbb{N}, \pi_k = A + \frac{1}{k+1} I_n$. Pour tout k dans $\mathbb{N}$, π_k vérifie la propriété (P) !

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad S(\pi_k - A) = S\left(\frac{1}{k+1} I_n\right) = \frac{n}{k+1} ; \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} (S(\pi_k - A)) = 0.$$

Donc $(\pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers A .

$(A + \frac{1}{k+1} I_n)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété (P)

et cette suite converge vers A .

d) A est inversible et A est limite d'une suite de matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété (P).

D'après II Q 3 les coefficients de A^{-1} sont positifs ou nuls.

Partie III : résolution du système (S)

- Q1 a) soit F la primitive de f sur $[0,1]$ qui prend la valeur 0 à 0
 soit G la primitive de F sur $[0,1]$ qui prend la valeur 0 à 0.
 f étant de classe $\mathcal{B}^1$ sur $[0,1]$, F est de classe $\mathcal{B}^2$ sur $[0,1]$ et G
 est de classe $\mathcal{B}^3$ sur $[0,1]$.

Notons encore que $\forall x \in [0,1]$, $F'(x) = \int_0^x f(t) dt$ et $G'(x) = \int_0^x F(t) dt$.

On a aussi $\forall x \in [0,1]$, $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = F(x)$ et $G''(x) = f(x)$.

* Supposons que u est solution du système (S).

$\forall x \in [0,1]$, $u''(x) = -f(x) = -G'(x)$. $[0,1]$ étant un intervalle :

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -G'(x) + \alpha$. Alors $\exists \beta \in \mathbb{R}$, $u(x) = -G(x) + \alpha x + \beta$.

$u(0) = 0$ donc $0 = -G(0) + \beta = \beta$ car $G(0) = 0$. $\beta = 0$.

$u(1) = 0$ donc $0 = -G(1) + \alpha$; $\alpha = G(1)$

Ainsi $\forall x \in [0,1]$, $u(x) = -G(x) + G(1)x$.

Ceci montre que le système admet au plus une solution.

* Pour $\forall x \in [0,1]$, $u(x) = -G(x) + G(1)x$.

G et $x \mapsto G(1)x$ sont de classe $\mathcal{B}^2$ sur $[0,1]$ donc u est de classe $\mathcal{B}^2$ sur $[0,1]$

$\forall x \in [0,1]$, $u'(x) = -G'(x) + G(1)$ et $u''(x) = -G''(x) = -f(x)$; $u'' = -f$

$u(0) = -G(0) + G(1) \times 0 = -G(0) = 0$ et $u(1) = -G(1) + G(1) = 0$.

Donc u est solution du système.

Le système (S) admet une solution et une seule.

Rappelons que G est de classe $\mathcal{B}^2$ sur $[0,1]$ et que $x \mapsto G(1)x$ est de même pour
 $x \mapsto G(1)x$. Ainsi la solution du système est de classe $\mathcal{B}^2$ sur $[0,1]$

On peut donc très facilement dire que (S) admet une unique solution u de
classe $\mathcal{B}^2$ sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$, $u(x) = -G(x) + G(1)x$.

b) Supposons f positive. Alors u'' est négative sur $[0,1]$ donc u' est décroissante sur $[0,1]$.

u est donc $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et $u(0)=u(1)=0$. Ceci suffit bien largement pour appliquer le théorème de Rolle et pour affirmer qu'il existe un réel x_0 appartenant à $]0,1[$ tel que $u'(x_0)=0$. Ceci a ajouté à la décroissance de u' sur $[0,1]$ montre que $\forall x \in [0, x_0], u'(x) \geq 0$ et $\forall x \in [x_0, 1], u'(x) \leq 0$. Alors u est croissante sur $[0, x_0]$ et u est décroissante sur $[x_0, 1]$.
 $\forall x \in [0, x_0], 0 = u(0) \leq u(x)$ et $\forall x \in [x_0, 1], u(x) \geq u(1) = 0$.
 u est donc positive sur $[0,1]$.

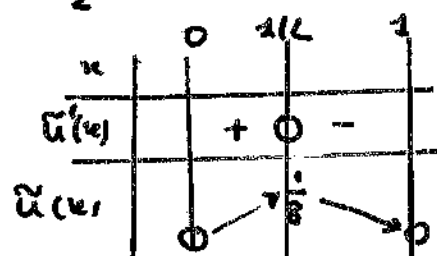
Si f est positive sur $[0,1]$, la solution du système (S) est positive sur $[0,1]$

c) $\forall x \in [0,1], F(x) = \int_0^x 1 dt = x$. $\forall x \in [0,1], G(x) = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}$.

$\forall x \in [0,1], \tilde{u}(x) = -G(x) + G(1)x = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x$.

$\forall x \in [0,1], \tilde{u}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

$\sup_{[0,1]} \tilde{u} = \frac{1}{8}$



(Q2) a) L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre 3 à u qui est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0,1]$ donne :

$$\forall y \in [0,1], |u(y) - u(x) - (y-x)u'(x) - \frac{(y-x)^2}{2}u''(x) - \frac{(y-x)^3}{3!}u'''(x)| \leq \frac{|y-x|^4}{4!} \max_{t \in [x,y]} |u^{(4)}(t)|$$

Pour $\pi_4 = \sup_{t \in [0,1]} |u^{(4)}(t)| = \max_{t \in [0,1]} |u^{(4)}(t)|$.

Alors $\forall y \in [0,1], |u(y) - u(x) - (y-x)u'(x) - \frac{(y-x)^2}{2}u''(x) - \frac{(y-x)^3}{3!}u'''(x)| \leq \frac{|y-x|^4}{4!} \pi_4$ car

$\forall y \in [0,1], \max_{t \in [x,y]} |u^{(4)}(t)| \leq \max_{t \in [0,1]} |u^{(4)}(t)| = \pi_4$.

Comme $x-h \in [0,1]$ et $x+h \in [0,1]$:

$$|u(x+h) - u(x) - hu'(x) - \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x)| \leq \frac{|h|^4}{4!} \pi_4 = \frac{h^4}{24} \pi_4.$$

$$|u(x-h) - u(x) + hu'(x) - \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x)| \leq \frac{|h|^4}{4!} \pi_4 = \frac{h^4}{24} \pi_4.$$

Rappelons que $\forall (A,B) \in \mathbb{R}^1$, $|A+B| \leq |A|+|B|$

$$\text{Alors } |u(x+h) - u(x) - hu'(x) - \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x) + u(x-h) - u(x) + hu'(x) - \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x)| \leq 2$$

$$|u(x+h) - u(x) - hu'(x) - \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x)| + |u(x-h) - u(x) + hu'(x) - \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x)| \leq \frac{h^4}{24} \pi_4 + \frac{h^4}{24} \pi_4$$

$$\text{Alors } |u(x+h) - 2u(x) + u(x-h) - h^2u''(x)| \leq \frac{h^4}{12} \pi_4 = \frac{h^4}{12} \sup_{t \in [0,1]} |u^{(4)}(t)|.$$

b) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. $x_i \in [0,1]$, $x_i-h = x_{i-1} \in [0,1]$ et $x_i+h = x_{i+1} \in [0,1]$.

$$\text{Alors } |u(x_i+h) - 2u(x_i) + u(x_i-h) - h^2u''(x_i)| \leq \frac{h^4}{12} \sup_{t \in [0,1]} |u^{(4)}(t)|.$$

$$|u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}) - h^2u''(x_i)| \leq \frac{h^4}{12} \sup_{t \in [0,1]} |u^{(4)}(t)|$$

$$\text{Donc } |h^2u''(x_i) - (u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))| \leq \frac{h^4}{12} \sup_{t \in [0,1]} |u^{(4)}(t)|.$$

En divisant par h^2 qui est strictement positif on obtient :

$$|u''(x_i) - \frac{1}{h^2} [u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))]| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{t \in [0,1]} |u^{(4)}(t)|.$$

Pour mettre sur la piste. On cherche à approximer $u(x_0), u(x_1), \dots, u(x_{n+1})$.

Noter que l'a a déjà $u(x_0) = u(x_{n+1}) = 0$ et que l'a connaît u'' qui vaut $-f$.

La majoration précédente nous à permis que pour un assez grand :

$$\frac{1}{h^2} [u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))] \approx u''(x_i) = -f(x_i)$$

l'idée et donc d'approximer $u(x_0), u(x_1), \dots, u(x_n), u(x_{n+1})$ par des
vols $u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1}$ tels que $u_0 = 0 = u_{n+1}$ et

$$\forall i \in \overline{1, n}, \frac{1}{h^2} [u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}] = -f(x_i) \text{ ou}$$

$$\forall i \in \overline{1, n}, -u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} = h^2 f(x_i).$$

Il convient alors de trouver $u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1}$ tels que :

$$u_0 = u_{n+1} = 0 \text{ et } A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \text{ où } A \text{ est la matrice de } \Pi \text{ (3).}$$

Il convient également de trouver un majorant de l'erreur que l'on commet
lors que l'on remplace $u(x_i)$ par u_i .

C'est ce qui est fait dans la suite.

(Q3) a) $\forall t \in [0, 1], \tilde{u}(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t, \tilde{u}'(t) = -t + \frac{1}{2}, \tilde{u}''(t) = -1 \text{ et}$
 $\tilde{u}'''(t) = \tilde{u}^{(4)}(t) = 0.$

Alors $\forall i \in \overline{1, n}, | -1 - \frac{1}{h^2} [\tilde{u}(x_{i-1}) - 2\tilde{u}(x_i) + \tilde{u}(x_{i+1})] | \leq \frac{h^4}{12} \sup_{t \in [0, 1]} |\tilde{u}^{(4)}(t)|.$

ou $\forall i \in \overline{1, n}, | -1 + \frac{1}{h^2} [-\tilde{u}(x_{i-1}) + 2\tilde{u}(x_i) - \tilde{u}(x_{i+1})] | \leq 0$

ou $\forall i \in \overline{1, n}, -\tilde{u}(x_{i-1}) + 2\tilde{u}(x_i) - \tilde{u}(x_{i+1}) = h^2$

b) Observons que $\tilde{u}(x_0) = \tilde{u}(x_{n+1}) = 0$ car $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 1$.

Alors
$$\begin{cases} 2\tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(x_2) = h^2 \\ \forall i \in \overline{2, n-1}, -\tilde{u}(x_{i-1}) + 2\tilde{u}(x_i) - \tilde{u}(x_{i+1}) = h^2 \\ -\tilde{u}(x_{n-1}) + 2\tilde{u}(x_n) = h^2 \end{cases}$$

ceci s'écrit matriciellement $A \begin{pmatrix} \tilde{u}(u_1) \\ \tilde{u}(u_2) \\ \vdots \\ \tilde{u}(u_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^2 \end{pmatrix}$

Ainsi $A\tilde{U} = h^2 \tilde{F}$ donc $\frac{1}{h^2} A\tilde{U} = \tilde{F}$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{h^2} A\tilde{U} = \tilde{F}$ donc $\frac{1}{h^2} \tilde{U} = A^{-1} \tilde{F}$.

Alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{1}{h^2} \tilde{u}(u_i) = \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j$

Rappelons que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \tilde{u}(u_i) \in [0, \frac{1}{8}]$.

Alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 \leq \sum_{j=1}^n b_{ij} \leq \frac{1}{8h^2} = \frac{(n+1)^2}{8}$.

Q4 $V = A \begin{pmatrix} u_1 - u(u_1) \\ u_2 - u(u_2) \\ \vdots \\ u_n - u(u_n) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} u(u_1) \\ u(u_2) \\ \vdots \\ u(u_n) \end{pmatrix}$.

Or $A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = AU = h^2 F = h^2 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} u''(u_1) \\ u''(u_2) \\ \vdots \\ u''(u_n) \end{pmatrix}$.

donc $V = h^2 \begin{pmatrix} -u''(u_1) \\ -u''(u_2) \\ \vdots \\ -u''(u_n) \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} u(u_1) \\ u(u_2) \\ \vdots \\ u(u_n) \end{pmatrix}$.

donc $\begin{cases} v_1 = -h^2 u''(u_1) - [2u(u_1) - u(u_2)] \\ \forall i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, v_i = -h^2 u''(u_i) - [-u(u_{i-1}) + 2u(u_i) - u(u_{i+1})] \\ v_n = -h^2 u''(u_n) - [-u(u_{n-1}) + 2u(u_n)] \end{cases}$

Et remarquons que $u(u_0) = u(0) = 0$ et $u(u_{n+1}) = u(1) = 0$ ceci s'écrit

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, v_i = -[h^2 u''(u_i) - (u(u_{i-1}) - 2u(u_i) + u(u_{i+1}))]$

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, v_i = -h^2 \left[u''(u_i) - \frac{1}{h^2} (u(u_{i-1}) - 2u(u_i) + u(u_{i+1})) \right]$

$$\text{Alors } \forall i \in \overline{1, n}, |v_i| = h^2 |u''(c_i)| - \frac{1}{h^2} (u(c_{i-1}) - 2u(c_i) + u(c_{i+1})) \leq h^2 \times \frac{h^2}{12} \sup_{t \in [0,1]} |u^{(4)}(t)|$$

$$\text{Or } u^{(4)} = (u^{(3)})' = -f''. \text{ donc } \sup_{t \in [0,1]} |u^{(4)}(t)| = \sup_{t \in [0,1]} |f''(t)| = \sup_{t \in [0,1]} |f''(t)|.$$

$$\text{Ainsi } \forall i \in \overline{1, n}, |v_i| \leq \frac{h^4}{12} \sup_{t \in [0,1]} |f''(t)|.$$

$$\Delta U = A^T V. \quad \forall i \in \overline{1, n}, \Delta u_i = \sum_{j=1}^n b_{i,j} v_j. \quad \text{car } V = A \Delta U \text{ donc } \Delta U = A^T V.$$

$$\forall i \in \overline{1, n}, |\Delta u_i| \leq \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| |v_j| \leq \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| \frac{h^4}{12} \sup_{t \in [0,1]} |f''(t)| = \left(\sum_{j=1}^n |b_{i,j}| \right) \frac{h^4}{12} \sup_{t \in [0,1]} |f''(t)|$$

$$\forall i \in \overline{1, n}, |\Delta u_i| \leq \frac{1}{8h^2} \frac{h^4}{12} \sup_{t \in [0,1]} |f''(t)|.$$

les coefficients de A^T ont pour 1/8 au max

$$\forall i \in \overline{1, n}, |\Delta u_i| \leq \frac{h^2}{96} \sup_{t \in [0,1]} |f''(t)| \quad \text{ou } |u_i - u(c_i)| \leq \frac{h^2}{96} \sup_{t \in [0,1]} |f''(t)|.$$

Q5) $\Rightarrow$ fait de donc $\forall u \in [0,1]$.

$$\forall u \in [0,1], f'(u) = \cos e^{nu} \text{ et } f''(u) = (-n \sin u + \cos^2 u) e^{nu}.$$

$$\forall u \in [0,1], |f''(u)| \leq [1 + n] e^{nu} \leq (1+n) e^{nu} \leq 2e^1.$$

$$\text{Alors } \forall i \in \overline{1, n}, |\Delta u_i| \leq \frac{h^2}{96} \times 2e = \frac{h^2}{48} e = \frac{e}{48(n+1)^2}.$$

$$\forall i \in \overline{1, n}, \leq 10^{-4} \text{ dès que } \frac{e}{48(n+1)^2} \leq 10^{-4}.$$

$$\frac{e}{48(n+1)^2} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{30^4 e}{48} \leq (n+1)^2 \Leftrightarrow n+1 \geq \frac{300 \sqrt{e}}{4 \sqrt{3}} = \frac{25 \sqrt{e}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow n \geq \frac{25 \sqrt{e}}{\sqrt{3}} - 1$$

$$\bullet \frac{25 \sqrt{e}}{\sqrt{3}} - 1 \leq 24 \text{ donc } \underline{n = 24 \text{ garantit } |u_i - u(c_i)| \leq 10^{-4} \text{ pour tout } i \in \overline{1, n}}.$$

$$\bullet \text{ Avec la machine à calculer } \frac{25 \sqrt{e}}{\sqrt{3}} - 1 \approx 22.797 \dots \text{ donc } \underline{n = 23 \text{ convient.}}$$

b) $f: x \mapsto (x^4 + x - 1)e^x$ est dérivable sur $[0, 1]$.

$$\forall x \in [0, 1], f'(x) = (4x^3 + 1)e^x + (x^4 + x - 1)e^x = (x^4 + 3x^3 + x)e^x.$$

$\forall x \in [0, 1], f'(x) \geq 0$. f est croissante sur $[0, 1]$.

$$\forall x \in [0, 1], f(0) \leq f(x) \leq f(1).$$

$$\forall x \in [0, 1], -1 \leq f(x) \leq e. \quad \forall x \in [0, 1], |f(x)| \leq e.$$

$$\forall x \in [0, 1], f''(x) = (-\sin x + \cos^3 x)e^{ix} = (-\sin x + 1 - \sin^2 x)e^{ix}.$$

$$\forall x \in [0, 1], \sin x \in [0, 1] \text{ donc } \forall x \in [0, 1], f''(x) = -h(\sin x).$$

$$\text{Alors } \forall x \in [0, 1], |f''(x)| = |-h(\sin x)| = |h(\sin x)| \leq e.$$

$$\text{Alors } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |u_i - u(x_i)| \leq \frac{e^2}{96} = \frac{e}{96(n+1)^2}.$$

$$\frac{e}{96(n+1)^2} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow (n+1)^2 \geq \frac{10^4 e}{96} \Leftrightarrow n+1 \geq \frac{100\sqrt{e}}{4\sqrt{6}} = \frac{25\sqrt{e}}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow n \geq \frac{25\sqrt{e}}{\sqrt{6}} - 1$$

• Alors avec $\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{6}} \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 0,71$ et $25 \times 0,71 - 1 = 16,75$

donc si $n = 17$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |u_i - u(x_i)| \leq \frac{e}{96(n+1)^2} \leq 10^{-4}$

$n = 17$ convient

• Avec la machine: $\frac{25\sqrt{e}}{\sqrt{6}} - 1 \approx 15,83$. $n = 16$ convient.

Remarque.. En étudiant f'' on a f'' décroissante sur $[0, 1]$, $f''(0) = 1$ et

$$f''(1) = (-\sin 1 + \cos^3 1)e^{i1} \approx -1,27482037.$$

$$\text{Alors } \forall x \in [0, 1], |f''(x)| \leq 1,28.$$

$$\text{donc } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |u_i - u(x_i)| \leq \frac{1,28}{96(n+1)^2}.$$

$$\text{de plus } \frac{1,28}{96(n+1)^2} \leq 10^{-4} \text{ pour } n \geq 100\sqrt{\frac{1,28}{96}} - 1 = 10\sqrt{\frac{128}{96}} - 1 = 10\sqrt{\frac{4}{3}} - 1 = \frac{20}{\sqrt{3}} - 1 \approx 10,5$$

donc $n = 11$ convient.