

PARTIE I

Le programme exige à identifier polynômes et fonctions polynômes.

Ainsi nous confondons $\mathcal{P}$ et $\mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{P}_r$ et $\mathbb{R}_r[X] \dots$ et sans doute x et X !

Q1) a) doit $P \in \mathcal{P}$. $P(X+1)$ est encore un élément de $\mathcal{P}$ donc $\Delta P = P(X+1) - P(X)$ appartient aussi à $\mathcal{P}$. Δ est une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$.

• Soit $(P, Q) \in \mathcal{P}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\Delta(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) = \lambda(P(X+1) - P(X)) + Q(X+1) - Q(X) = \lambda \Delta P + \Delta Q.$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P, Q) \in \mathcal{P}^2, \Delta(\lambda P + Q) = \lambda \Delta P + \Delta Q. \quad \underline{\Delta \text{ est linéaire.}}$$

Ainsi Δ est un endomorphisme de $\mathcal{P}$.

b) soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\Delta X^k = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$, donc ΔX^k est de degré $k-1$. Notons aussi que $\Delta 1 = 1+1-1=0$.

soit $r \in \mathbb{N}^*$ et P un élément de $\mathcal{P}$ de degré r . $\exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $P = \sum_{k=0}^r a_k X^k$ et $a_r \neq 0$

$$\Delta P = \sum_{k=0}^r a_k \Delta X^k = \sum_{k=1}^r a_k \Delta X^k.$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, ΔX^k est un polynôme de degré $k-1$.

Ainsi pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $a_k \Delta X^k$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $k-1$ donc inférieur ou égal à $r-1$. (à un abus près, $r=1$).

et $a_r \Delta X^r$ est un polynôme de degré $r-1$ car a_r n'est pas nul.

Ainsi ΔP est de degré $r-1$.

Si P est un élément de $\mathcal{P}$ de degré r strictement positif, ΔP est de degré $r-1$.

c) • doit $P \in \mathbb{R} \setminus \Delta$. Supposons que le degré de P soit r et que r soit strictement positif. Alors ΔP est de degré $r-1$ donc ΔP n'est pas nul !
Ainsi $\deg P \leq 0$. $P \in \mathcal{P}_0$.

• Réciproquement, supposons que $P \in \mathcal{G}_0$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}, P = \lambda$.

$$\Delta P = P(X+1) - P(X) = \lambda - \lambda = 0, \quad P \in \text{Ker } \Delta.$$

Ainsi $\forall P \in \mathcal{G}, P \in \text{Ker } \Delta \Leftrightarrow P \in \mathcal{G}_0$.

$\text{Ker } \Delta = \mathcal{G}_0$ ou $\text{Ker } \Delta$ est l'ensemble des fonctions polynomiales constantes.

Q2) 1) • Soit $P \in \mathcal{G}_r$. Notons que $\Delta_r P \in \mathcal{G}$ car $\Delta_r P = \Delta P$!
1^{ère} cas... le degré de P est un entier k strictement positif. $k \leq r$.
 Mais $\deg \Delta P = k-1$. Mais $\deg \Delta P \leq r-1 \leq r$.
 Ainsi $\Delta_r P = \Delta P \in \mathcal{G}_r$ (et même $\mathcal{G}_{r-1}$).

2^{ème} cas... P est constant. Mais $\Delta_r P = \Delta P = 0$ donc $\Delta_r P \in \mathcal{G}_r$.

$\forall P \in \mathcal{G}_r, \Delta_r P \in \mathcal{G}_r$. Δ_r est bien une application de $\mathcal{G}_r$ dans $\mathcal{G}_r$.

• Δ est linéaire donc Δ_r l'est également. Δ_r est linéaire.

Δ_r est un endomorphisme de $\mathcal{G}_r$.

$$\text{Ker } \Delta = \mathcal{G}_0$$

$$\text{b) } \text{Ker } \Delta_r = \{P \in \mathcal{G}_r \mid \Delta_r P = 0\} = \{P \in \mathcal{G}_r \mid \Delta P = 0\} \stackrel{\downarrow}{=} \{P \in \mathcal{G}_r \mid P \in \mathcal{G}_0\} = \mathcal{G}_r \cap \mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_0.$$

$$\underline{\underline{\text{Ker } \Delta_r = \mathcal{G}_0.}}$$

$$\Delta 1 = 0$$

$$\text{c) } \text{Im } \Delta_r = \Delta_r(\text{Vect}(1, X, \dots, X^r)) = \text{Vect}(\Delta 1, \Delta X, \dots, \Delta X^r) \stackrel{\downarrow}{=} \text{Vect}(\Delta X, \Delta X^2, \dots, \Delta X^r).$$

$$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \deg \Delta X^i = i-1.$$

Mais $(\Delta X, \Delta X^2, \dots, \Delta X^r)$ est une famille de polynômes non nuls de $\mathcal{G}_{r-1}$ de degrés é décroissants. C'est donc une famille libre de cardinal r de $\mathcal{G}_{r-1}$.

Comme $\mathcal{G}_{r-1}$ est de dimension r , c'est donc une base de $\mathcal{G}_{r-1}$.

$$\text{Ainsi } \text{Im } \Delta_r = \text{Vect}(\Delta X, \Delta X^2, \dots, \Delta X^r) = \mathcal{G}_{r-1}.$$

$$\underline{\underline{\text{Im } \Delta_r = \mathcal{G}_{r-1}.}}$$

d) soit $P \in \mathcal{P}$. $\exists r \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathcal{P}_{r-1}$ (puisque $r=1$ si P est nul et $r = \deg P + 1$ si P n'est pas nul).

Alors $P \in \mathcal{P}_{r-1} = \text{Im } \Delta_r$. Donc $\exists Q \in \mathcal{P}_r$, $\Delta_r Q = P$.

Ainsi $Q \in \mathcal{P}$ et $\Delta Q = \Delta_r Q = P$.

$\forall P \in \mathcal{P}$, $\exists Q \in \mathcal{P}$, $\Delta P = Q$. Δ est surjective.

Q3) Notons Δ' la restriction de Δ à $\mathcal{E}$

• Δ' est une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{P}$ car Δ est linéaire de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$.

• soit $P \in \text{Ker } \Delta'$. $\Delta' P = 0$. $\Delta P = 0$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $P = \lambda \cdot 1$. ($P(0) = 0$ donc $\lambda = 0$)
Ainsi $P = 0$.

Ker $\Delta' = \{0\}$. Δ' est injective.

• soit $P \in \mathcal{P}$. $\exists Q \in \mathcal{P}$, $\Delta Q = P$ car Δ est surjective.

Prenons $\lambda = Q(0)$ et $\tilde{Q} = Q - \lambda$.

Alors $\tilde{Q}(0) = 0$ donc $\tilde{Q} \in \mathcal{E}$ et $\Delta' \tilde{Q} = \Delta \tilde{Q} = \Delta Q - \Delta \lambda = \Delta Q - 0 = \Delta Q = P$.

Ainsi $\forall P \in \mathcal{P}$, $\exists \tilde{Q} \in \mathcal{E}$, $\Delta' \tilde{Q} = P$. Δ' est surjective.

Finalement la restriction de Δ à $\mathcal{E}$ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{P}$.

Q4) a) • considérons la suite $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant la récurrence suivante :

$$N_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, N_n = \Delta'^{-1}(N_{n-1}).$$

noter par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, N_n existe et appartient à $\mathcal{P}$.

→ B'et donc pour $n=0$

→ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

$N_{n-1} \in \mathcal{P}$ et Δ' est une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{E}$, ainsi $\Delta'(N_{n-1})$ est défini et appartient à $\mathcal{E}$ donc à $\mathcal{P}$. N_n est défini et appartient à $\mathcal{P}$.

ceci achève la récurrence.

1°/ $N_0 = 1$.

2°/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $N_n = \Delta'^{-1}(N_{n-1})$. Alors $N_n \in \mathcal{E}$ et $\Delta' N_n = N_{n-1}$.

Ainsi $N_n(0) = 0$ et $\Delta N_n = N_{n-1}$.

La suite $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc telle que : $N_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta N_n = N_{n-1}$ et $N_n(0) = 0$.
Considérons une suite de suite $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\pi_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta \pi_n = \pi_{n-1}$ et $\pi_n(0) = 0$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\pi_n = N_n$.

→ C'est vrai pour $n=0$.

→ Supposons que pour n dans $\mathbb{N}^*$ on ait : $\pi_{n-1} = N_{n-1}$.

$\pi_n \in \mathcal{E}$, $N_n \in \mathcal{E}$, $\Delta' \pi_n = \Delta \pi_n = \pi_{n-1} = N_{n-1} = \Delta N_n = \Delta' N_n$ et Δ' est injective. Alors $\pi_n = N_n$ ce qui achève la récurrence.

Finalement il existe une suite et une suite d'éléments de $\mathcal{P}$ vérifiant :

$N_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta N_n = N_{n-1}$ et $N_n(0) = 0$.

b) Poser $T_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (x-k)$. (T_n est une suite d'éléments de $\mathcal{P}$).

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = N_n$.

• $T_0 = 1$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $T_n(0) = 0$ * 1^{er} cas $n \geq 2$

$$\Delta T_n = T_n(x+1) - T_n(x) = \frac{1}{n!} \left[\prod_{k=0}^{n-1} (x-k+1) - \prod_{k=0}^{n-1} (x-k) \right] = \frac{1}{n!} \left[\prod_{k=-1}^{n-2} (x-k) - \prod_{k=0}^{n-1} (x-k) \right].$$

$$\Delta T_n = \frac{1}{n!} \left(\prod_{k=0}^{n-2} (x-k) \right) (x+1 - (x-(n-1))) = \frac{n}{n!} \prod_{k=0}^{n-2} (x-k) = T_{n-1}.$$

2nd cas... $n=1$. $\Delta T_1 = \Delta(x-1) = (x+1-1) - (x-1) = 1 = T_0$.

Ainsi $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{P}$ telle que :

$T_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta T_n = T_{n-1}$ et $T_n(0) = 0$.

Alors d'après a) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = N_n$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $N_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (x-k)$.

c) doit r ∈ ℕ. ∀ i ∈ [0, r], deg N_i = i.

Ainsi (N_0, N_1, ..., N_r) est une famille de polynômes non nuls de ℙ_r de degrés échelonnés. c'est donc une famille libre de cardinal r+1 de ℙ_r. Comme ℙ_r est de dimension r+1, c'est une base de ℙ_r.

Pour tout r dans ℕ, (N_0, N_1, ..., N_r) est une base de ℙ_r.

le vote est has-programme, voir à la fin... si j'ai le temps !

d) Soit k ∈ ℕ*.

∀ i ∈ ℕ*, ΔN_i = N_{i-1}. Une récurrence des plus simples n'estre alors que :

∀ n ∈ [0, k], Δ^n N_k = N_{k-n}. Ceci vaut aussi pour k=0.

Alors ∀ k ∈ ℕ, ∀ n ∈ [0, k], Δ^n N_k = N_{k-n}.

Soit k ∈ ℕ. Δ^k N_k = N_0 = 1. Alors Δ^{k+1} N_k = Δ1 = 0.

∀ n ∈ [k+1, +∞], Δ^n N_k = Δ^{n-(k+1)} (Δ^{k+1} N_k) = Δ^{n-(k+1)} 0 = 0.

Ainsi ∀ k ∈ ℕ, ∀ n ∈ ℕ, Δ^n N_k =
$$\begin{cases} N_{k-n} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit r ∈ ℕ et Q ∈ ℙ_r. (N_0, N_1, ..., N_r) est une base de ℙ_r donc

∃ (a_0, a_1, ..., a_r) ∈ ℝ^{r+1}, Q = ∑_{k=0}^r a_k N_k.

∀ n ∈ [0, r], Δ^n Q = ∑_{k=0}^r a_k Δ^n N_k = ∑_{k=n}^r a_k N_{k-n}

∀ n ∈ [0, r], Δ^n Q(0) = ∑_{k=n}^r a_k N_{k-n}(0).

Or ∀ i ∈ ℕ, N_i(0) = $\begin{cases} 1 & \text{si } i=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi ∀ n ∈ [0, r], Δ^n Q(0) = a_n. Alors Q = ∑_{k=0}^r Δ^k Q(0) N_k = ∑_{n=0}^r Δ^n Q(0) N_n.

∀ r ∈ ℕ, ∀ Q ∈ ℙ_r, Q = ∑_{n=0}^r Δ^n Q(0) N_n ... ce qui répond à la question.

Soit $Q \in \mathcal{D}$. $\exists r \in \mathbb{N}$, $Q \in \mathcal{D}_r$.

Alors $Q = \sum_{n=0}^r \Delta^n Q(0) N_n$. $\deg Q \leq r$.

$\forall i \in \llbracket r+1, +\infty \llbracket$, $\Delta^i Q = \sum_{n=0}^r \Delta^n Q(0) \Delta^i N_n = 0$ car $\forall i \in \llbracket r+1, +\infty \llbracket$, $\forall n \in \llbracket 0, r \rrbracket$, $\Delta^i N_n = 0$.

Ainsi $\forall i \in \llbracket r+1, +\infty \llbracket$, $\Delta^i Q(0) = 0$. Cela entraîne l'écriture $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n Q(0) N_n$.

$\forall Q \in \mathcal{D}$, $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n Q(0) N_n$

e) Soit $Q \in \mathcal{D}$. $\exists r \in \mathbb{N}$, $Q \in \mathcal{D}_r$. $Q = \sum_{n=0}^r \Delta^n Q(0) N_n$

On a : $Q = \sum_{n=0}^r \Delta^n Q(0) \Delta N_{n+1} = \Delta \left(\sum_{n=0}^r \Delta^n Q(0) N_{n+1} \right)$.

Pour $P_Q = \sum_{n=0}^r \Delta^n Q(0) N_{n+1}$. $P_Q \in \mathcal{D}$ et $P_Q(x+1) - P_Q(x) = \overset{\Delta P_Q = Q}{Q}$.

Soit $P \in \mathcal{D}$.

$P(x+1) - P(x) = Q \Leftrightarrow \Delta P = Q \Leftrightarrow \Delta P = \Delta P_Q \Leftrightarrow \Delta(P - P_Q) = 0 \Leftrightarrow P - P_Q \in \mathcal{D}_0$

$P(x+1) - P(x) = Q \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, P = P_Q + \lambda$.

$P_Q = \sum_{n=0}^r \Delta^n Q(0) N_{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n Q(0) N_{n+1}$ car $Q \in \mathcal{D}_r$ et donc

$\Delta^n Q(0) = 0$ si $n \in \llbracket r+1, +\infty \llbracket$. Ainsi :

$\forall Q \in \mathcal{D}$, $\{P \in \mathcal{D} \mid P(x+1) - P(x) = Q\} = \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n Q(0) N_{n+1} + \lambda ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

f) Soit Q un élément de $\mathcal{D}$. Soit P un élément de $\mathcal{D}$ tel que $P(x+1) - P(x) = Q$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n Q(k) = \sum_{k=0}^n (P(k+1) - P(k)) = P(n+1) - P(0)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n Q(k) = P(n+1) - P(0)$

Pour $Q = x^2$ et $P = P_Q = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n Q(0) N_{n+1}$.

$$\Delta^0 \mathcal{Q} = \mathcal{Q} = X^2. \quad \Delta^1 \mathcal{Q} = (X+1)^2 - X^2 = 2X+1. \quad \Delta^2 \mathcal{Q} = 2(X+1)+1 - (2X+1) = 2$$

$$\Delta^3 \mathcal{Q} = 0 \text{ d'ac } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \Rightarrow \Delta^n \mathcal{Q} = 0.$$

$$\text{Ainsi } \Delta^0 \mathcal{Q}(0) = 0, \Delta^1 \mathcal{Q}(0) = 1, \Delta^2 \mathcal{Q}(0) = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \Rightarrow \Delta^n \mathcal{Q}(0) = 0.$$

$$\text{Ainsi } P = 1XN_2 + 2N_3 = \frac{1}{2}X(X-1) + \frac{2}{6}X(X-1)(X-2) = \frac{1}{6}X(X-1)(2X-4+3).$$

$$P = \frac{1}{6}X(X-1)(2X-1).$$

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 = \sum_{k=0}^n \mathcal{Q}(k) = P(n+1) - P(0) = \frac{1}{6}(n+1)(n+1)(2(n+1)-1) = 0.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

(Q5) Soit $\mathcal{Q} \in \mathcal{S}$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta^n \mathcal{Q} = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \mathcal{Q}(X+i).$

- $\sum_{i=0}^0 (-1)^{0-i} \binom{0}{i} \mathcal{Q}(X+i) = \mathcal{Q}(X) = \Delta^0 \mathcal{Q}$, la propriété est vraie pour $n=0$.

- Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

Par hypothèse de récurrence $\Delta^n \mathcal{Q} = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \mathcal{Q}(X+i)$. Par linéarité de Δ :

$$\Delta^{n+1} \mathcal{Q} = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \Delta(\mathcal{Q}(X+i)) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} [\mathcal{Q}(X+i+1) - \mathcal{Q}(X+i)].$$

$$\Delta^{n+1} \mathcal{Q} = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \mathcal{Q}(X+i+1) - \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \mathcal{Q}(X+i).$$

$$\Delta^{n+1} \mathcal{Q} = \sum_{i=1}^{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ou } (-1)^{n+1-i}}}{(-1)^{n-i}} \binom{n}{i-1} \mathcal{Q}(X+i) + \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \mathcal{Q}(X+i).$$

$$\Delta^{n+1} \mathcal{Q} = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+1-i} \underbrace{\left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right]}_{\binom{n+1}{i}} \mathcal{Q}(X+i) + \binom{n}{n} \mathcal{Q}(X+n+1) + (-1)^{n+1} \binom{n}{0} \mathcal{Q}(X).$$

$$\Delta^{n+1} \mathcal{Q} = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+1-i} \binom{n+1}{i} \mathcal{Q}(X+i) + \mathcal{Q}(X+n+1) + (-1)^{n+1} \mathcal{Q}(X) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n+1-i} \binom{n+1}{i} \mathcal{Q}(X+i).$$

ce qui achève la récurrence.

$$\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \forall i \in \mathbb{N}, \Delta^i \varphi = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \varphi(x+i).$$

(Q6) 1 i. g et h sont deux endomorphismes de $\mathcal{D}_r$. Pour montrer que $g=h$ il suffit de prouver que $\forall i \in \llbracket 0, r \rrbracket, g(N_i) = h(N_i)$ car $(N_0, N_1, \dots, N_r)$ est une base de $\mathcal{D}_r$.

On va chercher à montrer que $\forall j \in \llbracket 0, r \rrbracket, g(N_{r-j}) = h(N_{r-j})$.

Rappelons que l'on suppose que $g \in C(\Delta_r), h \in C(\Delta_r)$ et $g(N_r) = h(N_r)$.

- Par hypothèse la propriété est vraie pour $j=0$.
- Supposons la propriété vraie pour j dans $\llbracket 0, r-1 \rrbracket$ et montrons la pour $j+1$.

$$g(N_{r-(j+1)}) = g(N_{r-j-1}) = g(\Delta N_{r-j}) = g(\Delta_r N_{r-j}) = (g \circ \Delta_r)(N_{r-j}) \text{ et } g \in C(\Delta_r).$$

$$g(N_{r-(j+1)}) = (\Delta_r \circ g)(N_{r-j}) = \Delta_r g(N_{r-j}) \text{ car } g \circ \Delta_r = \Delta_r \circ g.$$

$$\text{De même } h(N_{r-(j+1)}) = \Delta_r h(N_{r-j})$$

$$\text{A l'hypothèse de récurrence dans } g(N_{r-j}) = h(N_{r-j}).$$

$$\text{d'où } g(N_{r-(j+1)}) = \Delta_r g(N_{r-j}) = \Delta_r h(N_{r-j}) = h(N_{r-(j+1)}). \text{ Ceci achève la récurrence.}$$

Ceci achève également de montrer que $g=h$.

$$\text{Si } g \in C(\Delta_r), h \in C(\Delta_r) \text{ et } g(N_r) = h(N_r) \text{ alors } g=h.$$

ii. $N_r \in \mathcal{D}_r$ et $g \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_r)$ d'où $g(N_r) \in \mathcal{D}_r$. $(N_0, N_1, \dots, N_r)$ est une base de $\mathcal{D}_r$.

$$\text{Ainsi } \exists! (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}, g(N_r) = a_0 N_0 + a_1 N_1 + \dots + a_{r-1} N_{r-1} + a_r N_r.$$

$$\exists! (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}, g(N_r) = a_0 N_0 + a_1 N_1 + \dots + a_r N_r.$$

iii. • $\forall i \in \llbracket 0, r \rrbracket, \Delta_r \circ \Delta_r^i = \Delta_r^{i+1} = \Delta_r^i \circ \Delta_r, \forall i \in \llbracket 0, r \rrbracket, \Delta_r^i \in \mathcal{C}(\Delta_r).$

Soit $g \in \text{Vect}(\text{Id}_{\mathcal{G}_r}, \Delta_r, \dots, \Delta_r^r).$

$$\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^{r+1}, g = \sum_{i=0}^r \alpha_i \Delta_r^i.$$

$$\text{Alors } \Delta_r \circ g = \Delta_r \circ \left(\sum_{i=0}^r \alpha_i \Delta_r^i \right) = \sum_{i=0}^r \alpha_i \Delta_r^{i+1} = \left(\sum_{i=0}^r \alpha_i \Delta_r^i \right) \circ \Delta_r = g \circ \Delta_r.$$

Ainsi $g \in \mathcal{C}(\Delta_r).$

Par conséquent $\text{Vect}(\text{Id}_{\mathcal{G}_r}, \Delta_r, \dots, \Delta_r^r) \subset \mathcal{C}(\Delta_r).$

• Réciproquement soit $g \in \mathcal{C}(\Delta_r).$

$$g \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_r) \text{ donc } \exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^{r+1}, g(N_r) = \alpha_r N_r + \alpha_{r-1} N_{r-1} + \dots + \alpha_0 N_0.$$

$$\text{Notons que } g(N_r) = \alpha_r \text{Id}_{\mathcal{G}_r}(N_r) + \alpha_{r-1} \Delta_r(N_r) + \alpha_{r-2} \Delta_r^2(N_r) + \dots + \alpha_0 \Delta_r^r(N_0).$$

$$\text{Posons alors } h = \alpha_r \text{Id}_{\mathcal{G}_r} + \alpha_{r-1} \Delta_r + \dots + \alpha_0 \Delta_r^r.$$

d'après ce qui précède $h \in \mathcal{C}(\Delta_r).$

$$\text{Alors } g \in \mathcal{C}(\Delta_r), h \in \mathcal{C}(\Delta_r) \text{ et } g(N_r) = h(N_r). \text{ Ainsi } g = h$$

$$\text{Par conséquent } g \in \text{Vect}(\text{Id}_{\mathcal{G}_r}, \Delta_r, \Delta_r^2, \dots, \Delta_r^r).$$

$$\text{Finalement } \underline{\underline{\mathcal{B}(\Delta_r) = \text{Vect}(\text{Id}_{\mathcal{G}_r}, \Delta_r, \Delta_r^2, \dots, \Delta_r^r)}}.$$

ce qui montre que $\mathcal{B}(\Delta_r)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{G}_r)$ et que $(\text{Id}_{\mathcal{G}_r}, \Delta_r, \Delta_r^2, \dots, \Delta_r^r)$ en est une famille génératrice.

Il nous reste à montrer que cette famille est libre.

$$\text{Soit } (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_r) \in \mathbb{R}^{r+1} \text{ tel que } \beta_0 \text{Id}_{\mathcal{G}_r} + \beta_1 \Delta_r + \dots + \beta_r \Delta_r^r = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{G}_r)}$$

$$\text{Alors } \beta_0 N_r + \beta_1 \Delta_r N_r + \dots + \beta_r \Delta_r^r N_r = 0_{\mathcal{G}_r}.$$

$$\text{Ainsi } \beta_0 N_r + \beta_1 N_{r-1} + \dots + \beta_r N_0 = 0_{\mathcal{G}_r}. \text{ La liberté de la famille } (N_0, N_1, \dots, N_r)$$

donne $\beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_r = 0.$ Ceci achève de montrer que $(\text{Id}_{\mathcal{G}_r}, \Delta_r, \dots, \Delta_r^r)$ est libre.

$$\underline{\underline{(\text{Id}_{\mathcal{G}_r}, \Delta_r, \dots, \Delta_r^r) \text{ est une base de } \mathcal{C}(\Delta_r).}}$$

iv. Soit $P \in \mathcal{P}$. $(d \circ \Delta)(P) = d(P(x+1) - P(x)) = P'(x+1) - P'(x) = \Delta(P'(x)) = (\Delta \circ d)(P)$

Ainsi $d \circ \Delta = \Delta \circ d$.

Supposons qu'il existe $a_0, a_1, \dots, a_r$ dans $\mathbb{R}$ tels que $d = \sum_{k=0}^r a_k \Delta_r^k$.

$$d(N_{r+1}) = \sum_{k=0}^r a_k \Delta_r^k(N_{r+1}) = \sum_{k=0}^r a_k N_{r+1-k} = a_0 N_{r+1} + a_1 N_r + \dots + a_r N_1.$$

0 est une racine de $N_{r+1}, N_r, \dots, N_1$ donc 0 est racine de $d(N_{r+1}) = N'_{r+1}$.

Ci donc 0 est racine d'au moins 1 de N_{r+1} donc $N'_{r+1}(0) \neq 0$!!

Ainsi $d \circ \Delta = \Delta \circ d$ mais quelle que soit la valeur de r il n'existe pas

$a_0, a_1, \dots, a_r$ dans $\mathbb{R}$ tels que $d = \sum_{k=0}^r a_k \Delta_r^k$.

b) $\Delta_r(N_0) = 0$ et $\forall n \in \llbracket 1, r \rrbracket, \Delta_r(N_n) = N_{n-1}$

Alors la matrice de Δ_r dans la base $(N_n)_{n \in \llbracket 0, r \rrbracket}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons avant de passer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \llbracket 0, r \rrbracket, \Delta_r^k N_n = \begin{cases} N_{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\forall n \in \llbracket 0, r \rrbracket, \Delta_r^{r+1} N_n = 0$. $\Delta_r^{r+1} = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{B}_r)}$. (*)

Δ_r^{r+1} est un polynôme annulateur de Δ_r . Alors $\text{Sp } \Delta_r \subset \{0\}$.

Notons que $\Delta_r(N_0) = 0$ et $N_0 = 1 \neq 0$ donc $0 \in \text{Sp } \Delta_r$. $\text{Sp } \Delta_r = \{0\}$.

Supposons que Δ_r est diagonalisable alors $\text{Ker } \Delta_r = \text{SEP}(\Delta_r, 0) = \mathcal{B}_r$.

Donc $\Delta_r = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{B}_r)}$. Or $\Delta_r N_1 = 1 \neq 0$ (c'est évident !)

Ainsi Δ_r n'est pas diagonalisable ... si $r \in \mathbb{N}^*$.

(*) car Δ_r^{r+1} est $0_{\mathcal{L}(\mathcal{B}_r)}$ est donc un polynôme annulateur de Δ_r qui coïncide avec un bon de $\mathcal{B}_r$.

c) Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_r)$ tel que $g \circ g = \Delta_r$.

Alors $g \circ \Delta_r = g \circ (g \circ g) = (g \circ g) \circ g = \Delta_r \circ g$. Ainsi $g \in C(\Delta_r)$.

Sous ces conditions $\exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $g = \sum_{k=0}^r a_k \Delta_r^k$.

$$\text{Alors } \Delta_r = \left(\sum_{k=0}^r a_k \Delta_r^k \right) \circ \left(\sum_{i=0}^r a_i \Delta_r^i \right) = \sum_{k=0}^r \sum_{i=0}^r a_k a_i \Delta_r^{k+i}.$$

Rappelons que $\forall j \in \overline{[r+1, +\infty[}$, $\Delta_r^j = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{G}_r)}$ car $\Delta_r^{r+1} = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{G}_r)}$.

$$\text{D'où } \Delta_r = \sum_{k=0}^r \sum_{i=0}^{r-k} a_k a_i \Delta_r^{k+i} = \sum_{k=0}^r \sum_{j=k}^r a_k a_{j-k} \Delta_r^j$$

$$\Delta_r = \sum_{j=0}^r \left(\sum_{k=0}^j a_k a_{j-k} \right) \Delta_r^j.$$

La linéarité de $(\text{id}_{\mathcal{G}_r}, \Delta_r, \Delta_r^2, \dots, \Delta_r^r)$ donne $\forall j \in \overline{[0, r]}$, $\sum_{k=0}^j a_k a_{j-k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\text{Alors } 0 = \sum_{k=0}^0 a_k a_{0-k} \text{ et } \sum_{k=0}^1 a_k a_{1-k} = 1.$$

$$\text{D'où } 0 = a_0^2 \text{ et } a_0 a_1 + a_1 a_0 = 1. \text{ Ainsi } a_0 = 0 \text{ et } 2a_0 a_1 = 1 !!$$

Il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathcal{G}_r$ tels que $g \circ g = \Delta_r$.

PARTIE II

(Q1) $t \in \mathbb{R}$. a) soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a défini (!) et $u_n > 0$ car $x \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$.

$$v_n = h \frac{u_{n+1}}{u_n} = h \left[\frac{(n+1)^t N_{n+1}(x)}{n^t N_n(x)} \right] = h \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^t \left| \frac{x-n}{n+1} \right| \right].$$

Supposons alors $x > x$ (ce qui n'est en rien restrictif pour étudier la nature de la série de terme général v_n).

$$\text{Alors } v_n = t h \frac{n+1}{n} + h \frac{n-x}{n+1} = t h \left(1 + \frac{1}{n} \right) + h \frac{1 - \frac{x}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = (t-1) h \left(1 + \frac{1}{n} \right) + h \left(1 - \frac{x}{n} \right).$$

$$h \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } h \left(1 - \frac{x}{n} \right) = -\frac{x}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{n} \right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$\text{Ainsi } v_n = \frac{t-1}{n} - \frac{t-1}{2n^2} - \frac{x}{n} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{t-1-x}{n} - \frac{t-1+x^2}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

1^{er} cas.. $t-1-x \neq 0$. Alors $v_n \sim (t-1-x) \frac{1}{n}$.

La série de terme général $(t-1-x) \frac{1}{n}$ est divergente et de signe constant. Ceci suffit alors pour dire que la série de terme général v_n diverge.

2nd cas.. $t-1-x = 0$. Alors $\frac{t-1+x^2}{2} = \frac{x+x^2}{2}$

a) $\frac{x+x^2}{2} \neq 0$. $v_n \sim -\frac{x+x^2}{2} \frac{1}{n^2}$; $|v_n| \sim \frac{|x+x^2|}{2} \frac{1}{n^2}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{|x+x^2|}{2} \frac{1}{n^2} \geq 0$ et la série de terme général $\frac{|x+x^2|}{2} \frac{1}{n^2}$

converge. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général $|v_n|$.

b) $\frac{x+x^2}{2} = 0$. $v_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|v_n| \geq 0$ et $\frac{1}{n^2} \geq 0$

comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge, les règles de comparaison des séries à termes positifs démontrent la convergence de la série de terme général $|v_n|$.

Ainsi si $t-1-x = 0$ la série de terme général v_n est absolument convergente donc convergente.

Finalement la suite de terme général v_n converge si et seulement si $t = k+1$.

b) Montrons que: $\forall n \in [t, +\infty[$, $h u_n = \sum_{k=1}^{n-1} (h(u_{k+1}) - h(u_k)) + h u_1$.

$$\forall n \in [2, +\infty[\quad h u_n = \sum_{k=1}^{n-1} v_k + h u_1.$$

1^{er} cas... $t-1-k > 0$. Rappelons que $v_n \sim (t-1-k) \times \frac{1}{n}$ et que la suite de terme général v_n diverge.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(t-1-k) \times \frac{1}{n} > 0$. Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in [n_0, +\infty[$, $v_n > 0$.

Donc ces conditions: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} v_k = +\infty$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} h u_n = +\infty$.

Finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2^{er} cas... $t-1-k < 0$. Rappelons que $v_n \sim (t-1-k) \times \frac{1}{n}$ et que la suite de terme général v_n diverge.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(t-1-k) \times \frac{1}{n} < 0$. Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in [n_0, +\infty[$, $v_n < 0$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} v_k = -\infty$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (h u_n) = -\infty$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

3^{er} cas... $t-1-k=0$. La suite de terme général v_n converge et:

$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $h u_n = \sum_{k=1}^{n-1} v_k + h u_1$ donc la suite de terme général

$h u_n$ converge vers $\sum_{k=1}^{+\infty} v_k + h u_1$.

Alors $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $u_2 \in \mathbb{R}^+$; notons que $u_2 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

si $t-1-k > 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. si $t-1-k < 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

si $t = k+1$: $(u_n)_{n \geq 1}$ converge et a une limite strictement positive.

Posez $t = n+1$. Alors nous pouvons dire qu'il existe un réel strictement positif tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = C(x)$. Ainsi $u_n \sim C(x)$ car $C(x) \neq 0$.

$$\text{Alors } n^{k+1} |N_n(u)| \sim C(x); \quad |N_n(u)| \sim \frac{C(x)}{n^{k+1}}.$$

* Il existe un réel strictement positif $C(x)$ tel que : $|N_n(u)| \sim \frac{C(x)}{n^{k+1}}.$

Q2) a) $b \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in [0, n]$, $f(x) = b^x$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(i) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} b^i = (b-1)^n.$$

si $b \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = b^x$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (b-1)^n$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\varphi \in \mathcal{G}_n$ et appelons que $(N_k)_{k \in [0, n]}$ est une base de $\mathcal{G}_n$.

La démonstration faite au 3 Q4d) donne $\varphi = \sum_{k=0}^n \Delta^k(\varphi)(0) N_k$.

Ainsi $\sum_{k=0}^n \Delta^k(\varphi)(0) N_k = \sum_{k=0}^n a_k N_k$. La linéarité de $(N_0, N_1, \dots, N_n)$ donne alors :

$$\forall k \in [0, n], a_k = \Delta^k(\varphi)(0).$$

D'après I Q5 : $\forall k \in [0, n]$, $a_k = \Delta^k(\varphi)(0) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \varphi(i)$.

$$\text{donc } \forall k \in [0, n], \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(i) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \varphi(i).$$

Notons alors par récurrence facile que $\forall k \in [0, n]$, $f(k) = \varphi(k)$.

$$\bullet \sum_{i=0}^0 (-1)^{0-i} \binom{0}{i} f(i) = \sum_{i=0}^0 (-1)^{0-i} \binom{0}{i} \varphi(i) \text{ donc } f(0) = \varphi(0).$$

• Soit $k \in [0, n-1]$. Supposons que $\forall i \in [0, k]$, $f(i) = \varphi(i)$.

$$\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^{k+1-i} \binom{k+1}{i} f(i) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^{k+1-i} \binom{k+1}{i} \varphi(i). \text{ l'hypothèse de récurrence}$$

$$\text{donc : } \sum_{i=0}^k (-1)^{k+1-i} \binom{k+1}{i} \varphi(i) + f(k+1) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^{k+1-i} \binom{k+1}{i} \varphi(i), \text{ donc } f(k+1) = \varphi(k+1).$$

ce qui achève la récurrence.

Finalement $\forall k \in [0, n] , f(k) = g(k)$.

Alors $x \mapsto f(x) - g(x)$ s'annule en $0, 1, \dots, n$.

↳ Soit x un élément de $[0, +\infty[$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

1^{re} Cas : $x \in [0, +\infty[- [0, n]$. Rappelons que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$.

Soit $A \in \mathbb{R}$. Alors $\forall t \in [0, +\infty[, p(t) = f(t) - \sum_{k=0}^n a_k N_k(t) - N_{n+1}(t) A$.

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow A N_{n+1}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n a_k N_k(x)$$

$x \notin [0, n]$ donc x n'est pas un zéro de N_{n+1} .

$$\text{Alors } p(x) = 0 \Leftrightarrow A = \frac{1}{N_{n+1}(x)} \left[f(x) - \sum_{k=0}^n a_k N_k(x) \right].$$

dans la suite nous supposons que $A = \frac{1}{N_{n+1}(x)} \left[f(x) - \sum_{k=0}^n a_k N_k(x) \right]$.

Alors p s'annule en x .

De plus $\forall i \in [0, n] , p(i) = f(i) - \sum_{k=0}^n a_k N_k(i) - N_{n+1}(i) A$

ce $\forall i \in [0, n] , f(i) = \sum_{k=0}^n a_k N_k(i)$ et $N_{n+1}(i) = 0$.

Par conséquent $\forall i \in [0, n] , p(i) = 0$. Ainsi $0, 1, \dots, n, x$ sont $n+2$ zéros distincts de p .

$f, N_0, N_1, \dots, N_{n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ donc p est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$.

Notons alors par récurrence que pour tout $i \in [0, n+1] , p^{(i)}$ s'annule au moins $n+2-i$ fois sur $[0, +\infty[$.

→ c'est évident pour $i = 0$.

→ supposons la propriété vraie pour i dans $[0, n]$ et montrons la pour $i+1$.

Posez $g = p^{(i)}$. g admet au moins $n+2-i$ zéros distincts $x_1, x_2, \dots,$

x_{n+2-i} tels que $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2-i}$.

Soit $k \in [1, n+1-i]$. g est dérivable sur $[x_k, x_{k+1}]$ et $g(x_k) = g(x_{k+1}) = 0$.

Le théorème de Rolle nous assure l'existence de ξ_k dans $]x_k, x_{k+1}[$ tel que $g'(\xi_k) = 0$.

$y_1, y_2, \dots, y_{n+1-i}$ sont alors $n+1-i$ jés distincts de g appartenant à $[0, +\infty[$.
Ainsi $p^{(i)}$ admet au moins $n+2-(i+1)$ jés distincts dans $[0, +\infty[$.

Ceci achève la récurrence.

Nous pouvons alors dire que $p^{(n+1)}$ admet au moins un jés dans $[0, +\infty[$.

$$\exists \theta \in [0, +\infty[, \quad p^{(n+1)}(\theta) = 0.$$

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad p(t) = f(t) - \sum_{k=0}^n a_k N_k(t) - N_{n+1}(t)A.$$

Rappelons que $\forall k \in [0, n], N_k \in \mathcal{P}_n$ donc $\forall k \in [0, n], N_k^{(n+1)} = 0_{\mathcal{P}_n}$.

$$\text{Ainsi } \forall t \in [0, +\infty[, \quad p^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - N_{n+1}^{(n+1)}(t)A.$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, N_{n+1}(t) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (t-i). \text{ Alors } N_{n+1}^{(n+1)} \text{ est une constante.}$$

$$\text{Ainsi } N_{n+1}^{(n+1)} = \frac{1}{(n+1)!} (n+1)!.$$

$$\text{Ainsi } \forall t \in [0, +\infty[, \quad p^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - A. \text{ Alors } 0 = p^{(n+1)}(\theta) = f^{(n+1)}(\theta) - A.$$

$$\text{Donc } A = f^{(n+1)}(\theta). \text{ Alors } \frac{1}{N_{n+1}(x)} \left[f(x) - \sum_{k=0}^n a_k N_k(x) \right] = A = f^{(n+1)}(\theta).$$

$$\text{Donc } f(x) = \sum_{k=0}^n a_k N_k(x) + N_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\theta).$$

$$\underline{\text{2}^{\text{ème}} \text{ cas}} \dots x \in [0, n]. \text{ Alors } f(x) = \sum_{k=0}^n a_k N_k(x) \text{ et } N_{n+1}(x) = 0.$$

Alors si θ est un élément quelconque de $[0, +\infty[$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k N_k(x) + N_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\theta). \text{ D'où l'on a :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, +\infty[, \exists \theta \in [0, +\infty[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n a_k N_k(x) + N_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\theta).$$

d) Soit $x \in [0, +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\exists \theta \in [0, +\infty[$.

$$\exists \theta \in [0, +\infty[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n a_k N_k(x) + N_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\theta)$$

$$|f(x) - \sum_{k=0}^n a_k N_k(x)| = |N_{n+1}(x)| |f^{(n+1)}(\theta)| \leq \pi(n+1) |N_{n+1}(x)|$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |f(x) - \sum_{k=0}^n a_k N_k(x)| \leq \pi(n+1) |N_{n+1}(x)|. \quad \text{Supposons que } x \notin \mathbb{N}.$$

$$\text{Or } \pi_n |N_{n+1}(x)| \sim \sqrt{\pi(n+1)} \frac{C(x)}{(n+1)^{x+1}} \sim \frac{\pi_n C(x)}{n^{x+1}} = \frac{\pi C(x)}{n^x} \text{ car } x \in [0, +\infty[\setminus \mathbb{N}.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\pi_n |N_{n+1}(x)|) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi C(x)}{n^x} = 0 \quad (x > 0!).$$

$$\text{Alors par le théorème de Weierstrass : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k N_k(x) = f(x).$$

$$\text{Par le théorème général } a_k N_k(x) \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} a_k N_k(x) = f(x).$$

Supposons maintenant que x soit dans $\mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, x, +\infty[, \quad N_{n+1}(x) = 0 \quad (\text{car les } N_{n+1} \text{ sont } 0, 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}, x, +\infty[, \quad |f(x) - \sum_{k=0}^n a_k N_k(x)| \leq \pi(n+1) |N_{n+1}(x)| = 0.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, x, +\infty[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n a_k N_k(x). \quad \text{Cela suffit à montrer pour dire que}$$

$$\text{Par le théorème général } a_k N_k(x) \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} a_k N_k(x) = f(x).$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in [0, +\infty[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k N_k(x)$$

$$\text{Supposons que } f \text{ s'annule sur } \mathbb{N}. \quad \forall i \in \mathbb{N}, f(i) = 0. \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(i) = 0.$$

$$\text{Alors } \forall x \in [0, +\infty[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k N_k(x) = 0.$$

Si f s'annule sur $\mathbb{N}$, f est nulle sur $[0, +\infty[$.

Q3) a) Soit h un réel tel que $|h| > 1$. Soit $x \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$.

$$|h^n N_n(x)| = |h|^n |N_n(x)| \sim |h|^n \frac{C(x)}{n^{x+1}}.$$

$C(x) > 0$ d'ac par croissance comparée $\lim_{n \rightarrow +\infty} (|h|^n \frac{C(x)}{n^{x+1}}) = +\infty$ car $|h| > 1$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |h^n N_n(x)| = +\infty$. La suite $(h^n N_n(x))$ ne peut converger vers 0.

La série de terme général $h^n N_n(x)$ est divergente si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$ et si h est un réel tel que $|h| > 1$.

b) Ici $h \in \mathbb{R}$ et $|h| < 1$. x est un élément de $\mathbb{R}$.

i) 1^{re} Cas... $x \notin \mathbb{N}$. $n^2 |h^n N_n(x)| = n^2 |h|^n |N_n(x)| \sim n^2 |h|^n \frac{C(x)}{n^{x+1}} = C(x) |h|^n \frac{1}{n^{x-1}}.$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (C(x) |h|^n \frac{1}{n^{x-1}}) = 0$ par croissance comparée car $|h| < 1$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 |h^n N_n(x)|) = 0$. Alors $|h^n N_n(x)| = o(\frac{1}{n^2})$.

de plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|h^n N_n(x)| \geq 0$ et $\frac{1}{n^2} \geq 0$. La convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la convergence de la série de terme général $|h^n N_n(x)|$.

2^{de} Cas... $x \in \mathbb{N}$. Alors $\forall n \in \llbracket x, +\infty \rrbracket$, $|h^n N_n(x)| = |h^n x| = 0$.

La suite $(|h^n N_n(x)|)_{n \geq 0}$ est nulle à partir du rang $x+1$.

Donc la série de terme général $|h^n N_n(x)|$ converge.

Si $x \in \mathbb{R}$ et si h est un réel tel que $|h| < 1$ alors la série de terme général $h^n N_n(x)$ est absolument convergente.

ii) Prenons $\forall t \in]-1, +\infty[$, $\psi(t) = (1+t)^x$. ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$ et une dérivée n-ème donne $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in]-1, +\infty[$, $\psi^{(n)}(t) = x(x-1)\dots(x-n+1)(1+t)^{x-n}$
d'ac $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in]-1, +\infty[$, $\psi^{(n)}(t) = N_n(x) (1+t)^{x-n} \frac{1}{x!} n!$

Rappelons que $h \in \mathbb{R}$ et que $|h| < 1$. Soit $h \in]-1, +\infty[$. La formule de Taylor avec reste intégral donne : $\psi(h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} \psi^{(k)}(0) + \int_0^h \frac{(h-u)^n}{n!} \psi^{(n+1)}(u) du$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1+h)^x = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} N_k(x) + \int_0^h \frac{(h-u)^n}{n!} N_{n+1}(x) (1+u)^{x-(n+1)} (n+1)! du. \quad \text{pour } x \text{ ii.}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1+h)^x = \sum_{k=0}^n h^k N_k(x) + (n+1) N_{n+1}(x) \int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du.$$

Δ Notons que ceci vaut pour tout $h \in]-1, +\infty[$.

Posons : $\forall u \in]-1, +\infty[, \delta(u) = \frac{u \cdot h}{1+u}$. Est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et $\forall u \in]-1, +\infty[, \delta'(u) = \frac{1+h}{(1+u)^2}$.

Alors $\forall u \in]-1, +\infty[, \delta'(u) > 0$. Est strictement croissante sur $]-1, +\infty[$.

Si $h \geq 0$: $\forall u \in [0, h], \delta(0) \leq \delta(u) \leq \delta(h)$; $\forall u \in [0, h], -h \leq \delta(u) \leq 0$; $\forall u \in [h, 1], |\delta(u)| \leq h - |h|$.

Si $h < 0$: $\forall u \in [h, 0], \delta(h) \leq \delta(u) \leq \delta(0)$; $\forall u \in [h, 0], 0 \leq \delta(u) \leq -h$; $\forall u \in [0, 1], |\delta(u)| \leq h - |h|$.

donc $\forall u \in [0, h], |\delta(u)| \leq |h|$; $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in [0, h], \left|\frac{h-u}{1+u}\right|^n = \left|\frac{u-h}{1+u}\right|^n = |\delta(u)|^n \leq |h|^n$.

Supposons $h \neq 0$ et distinguons deux cas.

1^{er} cas : $h > 0$. $\left| \frac{1}{|h|^n} \int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du \right| \leq \frac{1}{|h|^n} \int_0^h \left|\frac{h-u}{1+u}\right|^n |(1+u)^{x-1}| du$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{1}{|h|^n} \int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du \right| \leq \frac{1}{|h|^n} \int_0^h |h|^n (1+u)^{x-1} du = \int_0^h (1+u)^{x-1} du = \left| \int_0^h (1+u)^{x-1} du \right|$$

2^{ème} cas : $h < 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\left| \frac{1}{|h|^n} \int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du \right| = \left| \frac{1}{|h|^n} \int_h^0 \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du \right| \leq \frac{1}{|h|^n} \int_h^0 \left|\frac{h-u}{1+u}\right|^n (1+u)^{x-1} du.$$

$$|h| = |h|$$

$$\left| \frac{1}{|h|^n} \int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du \right| \leq \frac{1}{|h|^n} \int_h^0 |h|^n (1+u)^{x-1} du = \int_h^0 (1+u)^{x-1} du = \left| \int_0^h (1+u)^{x-1} du \right|.$$

Finalement si h n'est pas nul : $\forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{1}{|h|^n} \int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du \right| \leq \left| \int_0^h (1+u)^{x-1} du \right|$.

Si h n'est pas nul la suite $\left(\frac{1}{|h|^n} \int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

(ii) • Fiketud: $\forall n \in \mathbb{N}, (1+h)^x = \sum_{k=0}^n h^k N_k(x) = 1 - N_0(x) = 0$.

Alors $\sum_{k=0}^{+\infty} h^k N_k(x) = (1+h)^x$.

• Supposons h naturel. $\exists \pi_h \in \mathbb{R}_+^n, \forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{1}{|k|^\alpha} \int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u} \right)^n (1+u)^{x-1} du \right| \leq \pi_h$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \left| (1+h)^x - \sum_{k=0}^n h^k N_k(x) \right| = |(n+1)N_{n+1}(x)| |k|^\alpha \left| \frac{1}{|k|^\alpha} \int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u} \right)^n (1+u)^{x-1} du \right|$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \left| (1+h)^x - \sum_{k=0}^n h^k N_k(x) \right| \leq (n+1) |N_{n+1}(x)| |k|^\alpha \pi_h \quad (*)$.

1° Cas... $x \notin \mathbb{N}$. Alors $(n+1) |N_{n+1}(x)| |k|^\alpha \pi_h \sim n \frac{C(x)}{(n+1)^{x+1}} |k|^\alpha \pi_h \sim n \frac{C(x)}{n^{x+1}} |k|^\alpha \pi_h$.

Or $(n+1) |N_{n+1}(x)| |k|^\alpha \pi_h \sim \frac{C(x) \pi_h |k|^\alpha}{n^x}$.

Or $|k| < 1$ donc, par croissance comparée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{C(x) \pi_h |k|^\alpha}{n^x} \right) = 0$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left((n+1) |N_{n+1}(x)| |k|^\alpha \pi_h \right) = 0$.

2° Cas... $x \in \mathbb{N}$. Alors $N_{n+1}(x) = 0$ dès que $n \geq x$ on a donc encore et très

rapidement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left((n+1) |N_{n+1}(x)| |k|^\alpha \pi_h \right) = 0$.

Dans ces conditions (*) donne : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n h^k N_k(x) = (1+h)^x$ pour tout x donné.

$\forall |k| < 1 \quad \sum_{k=0}^{+\infty} h^k N_k(x) = (1+h)^x$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

c) Ici $h=1$ i.e. x est un réel tel que $x \leq -1$.

$|N_n(x)| \sim \frac{C(x)}{n^{x+1}}$ car $x \notin \mathbb{N}$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |N_n(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C(x)}{n^{x+1}} = \begin{cases} C(x) & \text{si } x = -1 \\ +\infty & \text{si } x < -1 \end{cases}$; la suite $(N_n(x))_{n \geq 0}$

ne converge pas vers 0. La série de terme général $N_n(x)$ diverge pour $x \leq -1$.

ii. Ici on a $x \in \mathbb{R}$ et $x > -1$.

Remarquons que la formule de 3° b) ii. vaut pour tout k dans $\mathbb{Z}$, r.a.c.

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} N_k(x) = (n+1) N_{n+1}(x) \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{k!} N_k(x) = (n+1) N_{n+1}(x) \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in [0,1], 0 \leq \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} = \frac{(1-u)^n}{(1+u)^n} (1+u)^{x-1} \leq (1-u)^n \max_{t \in [0,1]} (1+t)^{x-1}.$$

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du \leq \max_{t \in [0,1]} (1+t)^{x-1} \underbrace{\int_0^1 (1-u)^n du}_{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{\max_{t \in [0,1]} (1+t)^{x-1}}{n+1}.$$

$$\text{Donc } L_x = \max_{t \in [0,1]} (1+t)^{x-1}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{1}{k!} N_k(x) \right| \leq (n+1) N_{n+1}(x) \frac{L_x}{n+1} = N_{n+1}(x) L_x. \quad (**)$$

$$\text{3° cas } x \notin \mathbb{N}. \quad N_{n+1}(x) L_x \sim L_x \frac{C(x)}{(n+1)^{x+1}} \sim L_x \frac{C(x)}{n^{x+1}} \text{ et } x+1 > 0.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} (N_{n+1}(x) L_x) = 0$$

$$\text{2° cas } x \in \mathbb{N}. \text{ Alors } N_{n+1}(x) L_x = 0 \text{ pour } n \geq x$$

$$\text{On a aussi } \lim_{n \rightarrow +\infty} (N_{n+1}(x) L_x) = 0.$$

$$(**) \text{ donne alors : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n N_k(x) = 2^x.$$

$$\text{Si } x > -1 \text{ la suite de terme général } N_n(x) \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} N_n(x) = 2^x.$$

d) Ici $x = -1$.

Remarquons que la suite x est un réel. Nous ne le dirons pas... souvent.

i. 3° cas $x \in \mathbb{N}$. Alors la suite $(1/(-1)^n N_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir du rang $x+1$. La suite de terme général $1/(-1)^n N_n(x)$ converge.

Donc la suite de terme général $(-1)^n N_n(x)$ est absolument convergente.

2^{ème} cas : $x \notin \mathbb{N}$. $|(-1)^n N_n(x)| = |N_n(x)| \sim \frac{C(x)}{n^{x+1}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^n$, $\frac{C(x)}{n^{x+1}} \geq 0$.

Alors la série de terme général $|(-1)^n N_n(x)|$ est de même nature que la série de terme général $\frac{C(x)}{n^{x+1}}$. Cette série de

la série de terme général $\frac{C(x)}{n^{x+1}}$ converge si et seulement si $x+1 > 1$

Alors la série de terme général $|(-1)^n N_n(x)|$ converge si et seulement si $x > 0 \dots$ dans le cas où $x \notin \mathbb{N}$.

Finalement la série de terme général $|(-1)^n N_n(x)|$ converge si et seulement si $x \in \mathbb{N}$ ou $(x \notin \mathbb{N} \text{ et } x > 0)$ donc si et seulement si $x \geq 0$.

La série de terme général $(-1)^n N_n(x)$ est absolument convergente si et seulement si $x \geq 0$.

Si $x \geq 0$ la série de terme général $(-1)^n N_n(x)$ est absolument convergente donc convergente.

Supposons que $x < 0$. Soit $n \in \mathbb{N} \dots$ ou $n \in \mathbb{N}^n$

$$(-1)^n N_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (x-k) = \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (-(x-k)) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (x+k) \geq 0$$

Alors $(-1)^n N_n(x) = |(-1)^n N_n(x)|$. La série de terme général $(-1)^n N_n(x)$ est de même nature que la série de terme général $|(-1)^n N_n(x)|$; elle est donc divergente.

Finalement la série de terme général $(-1)^n N_n(x)$ converge si et seulement si $x \geq 0$.

ii, soit $n \in \mathbb{N}^n$. $\forall k \in \mathbb{N}^n$, $N_{k-1} = \Delta N_k$.

$$\text{Alors } \forall k \in \mathbb{N}^n, N_{k-1}(x-1) = N_k((x-1)+1) - N_k(x-1) = N_k(x) - N_k(x-1)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^n, (-1)^k N_k(x) = (-1)^k N_{k-1}(x-1) + (-1)^k N_k(x-1) = (-1)^k N_{k-1}(x-1) - (-1)^{k-1} N_{k-1}(x-1)$$

$$\text{Alors } \sum_{k=1}^n (-1)^k N_k(x) = \sum_{k=1}^n \left((-1)^k N_{k-1}(x-1) - (-1)^{k-1} N_{k-1}(x-1) \right) = (-1)^n N_n(x-1) - N_0(x-1)$$

$$\text{Ainsi } \sum_{k=0}^n (-1)^k N_k(x) = (-1)^n N_n(x-1) - N_0(x-1) + N_0(x) \stackrel{N_0(x-1) = N_0(x)}{=} (-1)^n N_n(x-1)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^n, \sum_{k=0}^n (-1)^k N_k(x) = (-1)^n N_n(x-1).$$

Remarque 1 : On peut aussi dire le résultat pour $x=0$.
1. le résultat vaut aussi pour $x=0$.

iii. 1^{er} Cas : $x \notin \mathbb{N}$. Alors $x > 0$ et $x-1 \notin \mathbb{N}$.

$$\text{Ainsi } |(-1)^k N_n(x-1)| = |N_n(x-1)| \sim \frac{C(x)}{x^{(x-1)+1}} = \frac{C(x)}{n^x}.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} |(-1)^k N_n(x-1)| = 0 ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^k N_n(x-1) = 0$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k N_k(x) = 0. \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k N_k(x) = 0.$$

$$\text{2^{es} Cas} : x = 0 \quad N_0(x) = 1 \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}^*, N_i(x) = 0. \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k N_k(x) = 1$$

$$\text{3^{es} Cas} : x \in \mathbb{N}^*. \quad x-1 \in \mathbb{N}. \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \leq n \Rightarrow N_n(x-1) = 0.$$

$$\text{Alors } \forall n \in [x, +\infty[, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k N_k(x) = (-1)^x N_n(x-1) = 0 ; \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k N_k(x) = 0$$

$$\text{Finalement : } \forall x \in [0, +\infty[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n N_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$