

PARTIE I Représentation intégrale d'une fonction puissance.

Question préliminaire..

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $\forall t \in]0, +\infty[$, $\psi_x(t) = \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) \varphi(t)$. Montrons que $\int_0^{+\infty} \psi_x(t) dt$ converge. Notons que φ est continue sur $]0, +\infty[$.

$$\forall t \in]0, +\infty[, \psi_x(t) = \frac{x+t^2-1-t^2}{(1+t^2)(x+t)} \varphi(t) = \frac{x-1}{(1+t^2)(x+t)} \varphi(t).$$

$$\forall t \in]0, +\infty[, |\psi_x(t)| = \frac{|x-1|}{(1+t^2)(x+t)} \varphi(t) \leq \frac{x+1}{x+t} \frac{\varphi(t)}{1+t^2}.$$

$$\begin{cases} |x-1| \leq |x+1| = x+1 \\ \frac{\varphi(t)}{1+t^2} \geq 0 \end{cases}$$

Pour $C_x = \max(x, \frac{1}{x})$.

$\forall t \in]0, +\infty[, 0 \leq x+1 \leq C_x t+1$.

$C_x \geq \frac{1}{x} > 0$ donc $x \geq \frac{1}{C_x} > 0$; alors $\forall t \in]0, +\infty[, x+t \geq \frac{1}{C_x} + t > 0$.

Donc $\forall t \in]0, +\infty[, 0 \leq \frac{1}{x+t} \leq \frac{1}{\frac{1}{C_x} + t} = \frac{C_x}{C_x t + 1}$

Résumons : $\forall t \in]0, +\infty[, 0 \leq x+1 \leq C_x t+1, 0 \leq \frac{1}{x+t} \leq \frac{C_x}{C_x t+1}$ et $\frac{\varphi(t)}{1+t^2} \geq 0$

Alors $\forall t \in]0, +\infty[, 0 \leq |\psi_x(t)| \leq \frac{x+1}{x+t} \frac{\varphi(t)}{1+t^2} \leq \frac{C_x(C_x t+1)}{C_x t+1} \frac{\varphi(t)}{1+t^2} = C_x \frac{\varphi(t)}{1+t^2}$.

1° $\forall t \in]0, 1], 0 \leq |\psi_x(t)| \leq C_x \frac{\varphi(t)}{1+t^2}$ et $\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{1+t^2} dt$ converge.

2° $\forall t \in]1, +\infty[, 0 \leq |\psi_x(t)| \leq C_x \frac{\varphi(t)}{1+t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{1+t^2} dt$ converge.

1° et 2° et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que les intégrales $\int_0^1 |\psi_x(t)| dt$ et $\int_1^{+\infty} |\psi_x(t)| dt$ convergent.

Ainsi $\int_0^{+\infty} |\psi_x(t)| dt$ converge. $\int_0^{+\infty} \psi_x(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$ convergent donc la convergence

fonctionnelle, pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, $\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) \varphi(t) dt$ converge.

Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q1) Soit α dans $\mathbb{R}$. $t \mapsto \frac{t^\alpha}{1+t^2}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$ ①

$$\frac{t^\alpha}{1+t^2} \underset{0}{\sim} t^\alpha = \frac{1}{t^{-\alpha}} \quad \text{et} \quad \frac{t^\alpha}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^\alpha}{t^2} = \frac{1}{t^{2-\alpha}} \quad ②③$$

①, ②③ et les règles de comparaison sur les intégrales qui évaluent de façon positive montrent que : $\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt$ est de même nature que $\int_0^1 \frac{dt}{t^{-\alpha}}$ et

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt \text{ est de même nature que } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha}}$$

Le premier indique que $\int_0^1 \frac{dt}{t^{-\alpha}}$ converge si et seulement si $-\alpha < 1$ i.e. $\alpha > -1$

et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha}}$ converge si et seulement si $2-\alpha > 1$ i.e. $\alpha < 1$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt$ converge si et seulement si $\alpha \in]-1, 1[$.

Q2) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_0(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) t^0 dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) dt$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(\varepsilon, A) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\dots$ et ε n'est pas indispensable...

$$\int_\varepsilon^A \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) dt = \left[\frac{1}{2} \ln|1+t^2| - \ln|x+t| \right]_\varepsilon^A = \left[\ln \left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{x+t} \right) \right]_\varepsilon^A$$

$$\int_\varepsilon^A \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) dt = \ln \frac{\sqrt{1+A^2}}{x+A} - \ln \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{x+\varepsilon}$$

$$\frac{\sqrt{1+A^2}}{x+A} \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{A} = 1. \quad \text{Donc } \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \frac{\sqrt{1+A^2}}{x+A} = 0. \quad \text{De plus } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left(\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{x+\varepsilon} \right) = \ln \frac{1}{x}.$$

$$\text{Alors } \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) dt = 0 - \ln \frac{1}{x} = \ln x. \quad \underline{\underline{\forall x \in]0, +\infty[, f_0(x) = \ln x.}}$$

⑦3) $x \in]-1, 0[\subset]-1, 1[$ d'où $\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) t^x dt$ converge.

$x+1 \in]0, 1[\subset]-1, 1[$ d'où $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x+1}}{1+t^2} dt$ converge d'après ⑦1.

Alors par différence $\int_0^{+\infty} \left[\frac{t^{x+1}}{1+t^2} - \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) t^x \right] dt$ converge.

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{x+t} dt$ converge.

soit E et A deux éléments de $]0, +\infty[$ tels que $E < A$.

$t \mapsto \frac{t}{x}$ et donc dans B' sur $[E, A]$. Ceci entraîne le changement de variable $u = \frac{t}{x}$ d'où $\int_E^A \frac{t^x}{x+t} dt = \int_{E/x}^{A/x} \frac{(ux)^x}{x+ux} x du = x^x \int_{E/x}^{A/x} \frac{u^x}{1+u} du$.

$\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{x+t} dt$ converge ainsi que $\int_0^{+\infty} \frac{u^x}{1+u} du$ (faire $x=1$ dans ce qui précède).

De plus $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{A}{x} = +\infty$ et $\lim_{E \rightarrow 0^+} \frac{E}{x} = 0$.

Alors $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{x+t} dt = x^x \int_0^{+\infty} \frac{u^x}{1+u} du$.

Pour tout x dans $]0, +\infty[$, $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{x+t} dt$ converge et $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{x+t} dt = x^x \int_0^{+\infty} \frac{u^x}{1+u} du$.

soit $x \in]0, +\infty[$. Rappelons que $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x+1}}{1+t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{x+t} dt$ convergent.

Ainsi $I_x(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) t^x dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x+1}}{1+t^2} dt - \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{x+t} dt$

$I_x(x) = -x^x \int_0^{+\infty} \frac{u^x}{1+u} du + \int_0^{+\infty} \frac{t^{x+1}}{1+t^2} dt$.

Prenons $c = - \int_0^{+\infty} \frac{u^x}{1+u} du$ et $d = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x+1}}{1+t^2} dt$. $I_x(x) = c x^x + d$.

Notons que $\forall t \in]0, +\infty[$, $\frac{t^\alpha}{1+t} \geq 0$ d'où $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t} dt > 0$.

Ainsi $c = - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t} dt < 0$.

$\exists (c, d) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in]0, +\infty[$, $f_x(x) = cx^\alpha + d$ et $c < 0$.

(Q4) a) Soit $x \in]0, +\infty[$. Soit h un réel positif tel que $x+h > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{f_x(x+h) - f_x(x)}{h} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{h} \left[\frac{t^{x+h}}{1+t} - \frac{t^x}{x+t} - \frac{t^{x+h}}{1+t} + \frac{t^x}{x+t} \right] dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{h} \frac{x+h+t-x-t}{(x+t)(x+h+t)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(x+t)^2} dt. \end{aligned}$$

Notons alors que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(x+h) - f_x(x)}{h} = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(x+t)^2} dt$.

Comme on peut montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(x+t)^2} dt$ converge.

$\Rightarrow t \mapsto \frac{t^x}{(x+t)^2}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

$\Rightarrow \frac{t^x}{(x+t)^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^2} t^x = \frac{1}{x^2} \frac{1}{t^{-x}}$ et $\frac{t^x}{(x+t)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2-x}}$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dt}{t^{-x}}$ converge car $-x < 1$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-x}}$ converge car $2-x > 1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\int_0^1 \frac{t^x}{(x+t)^2} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{t^x}{(x+t)^2} dt$ convergent.

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(x+t)^2} dt$ converge.

Pour $\Delta(h) = \frac{f_x(x+h) - f_x(x)}{h} = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(x+t)^2} dt$

$$\Delta(h) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t+h)(x+t)} dt - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt = \int_0^{+\infty} t^\alpha \left(\frac{x+t-(x+t+h)}{(x+t+h)(x+t)^2} \right) dt$$

$$\Delta(h) = -h \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t+h)(x+t)^2} dt ; \quad |\Delta(h)| = |h| \left| \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t+h)(x+t)^2} dt \right|.$$

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad x+t+h \geq x+h > 0 \text{ et } (x+t)^2 > 0$$

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad (x+t+h)(x+t)^2 \geq (x+h)(x+t)^2 > 0$$

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad 0 \leq \frac{1}{(x+t+h)(x+t)^2} \leq \frac{1}{(x+h)(x+t)^2} \text{ et } t^\alpha \geq 0.$$

$$\text{Alors } \forall t \in]0, +\infty[, \quad 0 \leq \frac{t^\alpha}{(x+t+h)(x+t)^2} \leq \frac{1}{x+h} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}.$$

$$\text{Alors } 0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t+h)(x+t)^2} dt \leq \frac{1}{x+h} \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt \text{ car la deuxièmes intégrales}$$

convergent.

$$\text{Finalement } |\Delta(h)| = |h| \left| \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t+h)(x+t)^2} dt \right| \leq |h| \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t+h)(x+t)^2} dt \leq \frac{|h|}{x+h} \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt$$

$$\text{Ainsi } \forall h \in]-x, 0[\cup]0, +\infty[, \quad \left| \frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt \right| \leq \frac{|h|}{x+h} \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt.$$

$$\text{A } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{|h|}{x+h} \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt \right) = 0$$

$$\text{Donc par encadrement on a : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt$$

$$\text{Ainsi } f_\alpha \text{ est dérivable en } x \text{ et } f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt$$

$$f_\alpha \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, \quad f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt.$$

b) soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(\varepsilon, A) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ tel que $\varepsilon < A$.

$t \mapsto \frac{t^\alpha}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, A]$. Ceci autorise le changement de

variable $u = t/x$ dans $\int_\varepsilon^A \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt$.

$$\int_\varepsilon^A \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt = \int_{\varepsilon/x}^{A/x} \frac{(xu)^\alpha}{(x+xu)^2} x du = x^{\alpha-1} \int_{\varepsilon/x}^{A/x} \frac{u^\alpha}{(1+u)^2} du.$$

a $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{(1+u)^2} du$ converge, car $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{x} = 0$ et $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{A}{x} = +\infty$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt = x^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{(1+u)^2} du$; $\int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{(1+u)^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u)^2} du$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u)^2} du x^{\alpha-1}$.

Alors $\exists d \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt = \frac{\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u)^2} du}{\alpha} x^{\alpha-1} + d$.

Pour $c = \frac{\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u)^2} du}{\alpha}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt = cx^{\alpha-1} + d$ et $c = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{(1+u)^2} du > 0$.

Pour conclure : $\exists (c, d) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt = cx^{\alpha-1} + d$ avec $c > 0$.

PARTIE II : Les matrices symétriques réelles

Q1) a). Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit λ une valeur propre de A .

$$\exists X \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})} \text{ et } AX = \lambda X.$$

Alors $\lambda \|X\|^2 = \lambda^t X X = {}^t X (\lambda X) = {}^t X A X$; $\lambda = \frac{{}^t X A X}{\|X\|^2}$ car $\|X\|^2 \neq 0$ puisque X n'est pas nul (e).

$X \neq 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}$ donne aussi ${}^t X A X > 0$ car $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi $\lambda = \frac{{}^t X A X}{\|X\|^2} > 0$.

Les valeurs propres de A sont donc toutes positives.

• Supposons que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que les valeurs propres de A sont toutes positives. Soient $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une base orthogonale de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Soit $X \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. Notons que ${}^t X A X > 0$.

$$X = \sum_{i=1}^n \langle X, x_i \rangle x_i \quad . \quad A X = \sum_{i=1}^n \langle X, x_i \rangle A x_i = \sum_{i=1}^n \langle X, x_i \rangle \lambda_i x_i.$$

$$\text{Alors } {}^t X A X = \langle X, A X \rangle = \sum_{i=1}^n \left[(\langle X, x_i \rangle) (\langle X, x_i \rangle \lambda_i) \right] = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\langle X, x_i \rangle)^2.$$

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \geq 0$ et $(\langle X, x_i \rangle)^2 \geq 0$ donc ${}^t X A X \geq 0$.

Supposons ${}^t X A X = 0$. Alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i (\langle X, x_i \rangle)^2 = 0$.

Ainsi $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i (\langle X, x_i \rangle)^2 = 0$. Or $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i > 0$.

donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (\langle X, x_i \rangle)^2 = 0$. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle X, x_i \rangle = 0$.

Pour conclure $X = \sum_{i=1}^n \langle X, x_i \rangle x_i = 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}$, ce qui contredit l'hypothèse.

Donc ${}^t X A X > 0$. Ceci achève de montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Finalment si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: $(A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{toutes valeurs propres de } A \text{ est strictement positive.})$

b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{J}_2(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \pi_{2,1}(\mathbb{R})$.

$${}^t X A X = a |x \ y| \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a |x \ y| \begin{pmatrix} ax+by \\ bx+cy \end{pmatrix} = a [ax^2 + bxy + bxy + cy^2]$$

$${}^t X A X = a^2 x^2 + 2abxy + acy^2 = (ax+by)^2 - b^2 y^2 + acy^2 = (ax+by)^2 + (ac-b^2)y^2.$$

$$\forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{J}_2(\mathbb{R}), \forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \pi_{2,1}(\mathbb{R}), {}^t X A X = (ax+by)^2 + (ac-b^2)y^2.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{J}_2(\mathbb{R})$

• Supposons que $A \in \mathcal{J}_2^{++}(\mathbb{R})$.

Prenons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X \in \pi_{2,1}(\mathbb{R})$ et $X \neq 0_{\pi_{2,1}(\mathbb{R})}$. On a ${}^t X A X > 0$

$$0 < {}^t X A X = (1 \ 0) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a ; \quad \underline{a > 0.}$$

Prenons $Z = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. $Z \in \pi_{2,1}(\mathbb{R})$ et $Z \neq 0_{\pi_{2,1}(\mathbb{R})}$ donc ${}^t Z A Z > 0$.

Alors $a {}^t Z A Z > 0$ car $a > 0$.

$$\text{Or on a } {}^t Z A Z = (a(-b) + b(a))^2 + (ac - b^2)a^2 = (ac - b^2)a^2.$$

Alors $a^2 > 0$ et $(ac - b^2)a^2 > 0$; ainsi $\underline{ac - b^2 > 0}$.

• Réciproquement supposons $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \pi_{2,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\pi_{2,1}(\mathbb{R})}\}$.

$${}^t X A X = (ax+by)^2 + (ac-b^2)y^2 \geq 0 \text{ et } a > 0 \text{ donc } {}^t X A X \geq 0.$$

Supposons ${}^t X A X = 0$. Alors $a {}^t X A X = 0$.

Donc $(ax+by)^2 + (ac-b^2)y^2 = 0$ avec $(ax+by)^2 \geq 0$ et $(ac-b^2)y^2 \geq 0$.

Alors $(ax+by)^2 = (ac-b^2)y^2 = 0$. Or $ac-b^2 > 0$.

Donc $y^2 = 0$ et $(ax+by)^2 = 0$. $y = 0$ et $ax = 0$; $x = y = 0$ car $a > 0$.

Or $X \neq 0_{\pi_{2,1}(\mathbb{R})}$! Ainsi ${}^t X A X > 0$. Ceci achève de montrer que

$$A \in \mathcal{J}_2^{++}(\mathbb{R}).$$

Finalement si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$: $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (a > 0 \text{ et } ac - b^2 > 0)$.

Exercice.. Retrouver ce résultat en utilisant a) et le fait que les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ sont les racines de $P = X^2 - (a+c)X + ac - b^2$.

(Q2) a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $2 > 0$ et $2 \times 1 - 1^2 = 1 > 0$; $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5/3 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $4 > 0$ et $4 \times \frac{5}{3} - 0^2 = \frac{20}{3} > 0$; $B \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

$B - A = \begin{pmatrix} 4-2 & -1 \\ -1 & \frac{5}{3}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. $B - A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $2 > 0$ et $2 \times \frac{2}{3} - (-1)^2 = \frac{1}{3} > 0$; $B - A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$
 donc $A < B$.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5/3 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ et $A < B$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & \frac{25}{9} \end{pmatrix}$.

Noter que $A^2 \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $B^2 \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

$B^2 - A^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & \frac{25}{9} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$. Noter que $B^2 - A^2 \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$

mais $11 \times \frac{7}{9} - (-3)^2 = \frac{77}{9} - 9 = \frac{-4}{9} < 0$ donc $B^2 - A^2 \notin \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

On a par $A^2 < B^2$.

b) soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

i) • La valeurs propres de A sont strictement positives. Ainsi on a la
 par valeurs propres de A ; A est inversible.

• $(A^{-1})^t = (tA)^{-1} = A^{-t}$ donc $A^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
 $\hat{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

noter que $A^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $x \in \Pi_{n,2}(\mathbb{R}) - \{0_{\Pi_{n,2}(\mathbb{R})}\}$.

Pour $y = A^{-1}x$, $y \in \Pi_{n,2}(\mathbb{R})$ et $y \neq 0_{\Pi_{n,2}(\mathbb{R})}$ ($y = 0_{\Pi_{n,2}(\mathbb{R})} \Rightarrow A^{-1}x = 0_{\Pi_{n,2}(\mathbb{R})}$

$\Rightarrow x = 0_{\Pi_{n,2}(\mathbb{R})}$ car A^{-1} est inversible). Noter que $x = Ay$.

$$\text{Alors } {}^t x A^{-1} x = {}^t (Ay) A^{-1} Ay = {}^t y {}^t A y = {}^t y A y \geq 0 \quad \text{et } y \neq 0_{\Pi_{n,2}(\mathbb{R})}$$

Finalement $A^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $(\forall x \in \Pi_{n,2}(\mathbb{R}), x \neq 0_{\Pi_{n,2}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^t x A^{-1} x > 0)$.

De $A^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Remarque - on aurait pu utiliser, après l'avoir montré, que

$$S_p A^{-1} = \left\{ \frac{1}{\lambda}; \lambda \in S_p A \right\} \dots \text{donc } S_p A \subset \mathbb{R}_+^p \text{ donc } S_p A^{-1} \subset \mathbb{R}_+^p.$$

(i) $x \in \Pi_{n,2}(\mathbb{R})$. Soit $h \in \Pi_{n,2}(\mathbb{R})$.

$$\Phi_A^A(A^{-1}x+h) = 2 {}^t x (A^{-1}x+h) - {}^t (A^{-1}x+h) A (A^{-1}x+h)$$

$$\Phi_x^A(A^{-1}x+h) = 2 {}^t x A^{-1} x + 2 {}^t x h - ({}^t x A^{-1} + {}^t h)(x+h). \text{ Noter que } {}^t A^{-1} = A^{-1}.$$

$$\Phi_x^A(A^{-1}x+h) = 2 {}^t x A^{-1} x + 2 {}^t x h - {}^t x A^{-1} x - {}^t h x - {}^t x A^{-1} A h - {}^t h A h.$$

Noter que ${}^t h x \in \Pi_1(\mathbb{R})$. Alors ${}^t h x = {}^t ({}^t h x) = {}^t x h$.

$$\text{Ainsi } \Phi_x^A(A^{-1}x+h) = {}^t x A^{-1} x - {}^t h A h \dots \text{pour tout } h \text{ dans } \Pi_{n,2}(\mathbb{R}).$$

$$\text{Alors } \Phi_x^A(A^{-1}x) = \Phi_x^A(A^{-1}x+0) = {}^t x A^{-1} x + {}^t 0 A 0 = {}^t x A^{-1} x !!$$

$$\text{Donc } \forall h \in \Pi_{n,2}(\mathbb{R}), \Phi_x^A(A^{-1}x+h) = \Phi_x^A(A^{-1}x) - {}^t h A h.$$

$$\underline{\underline{\forall h \in \Pi_{n,2}(\mathbb{R}), \Phi_x^A(A^{-1}x+h) - \Phi_x^A(A^{-1}x) = -{}^t h A h.}}$$

$\forall h \in \Pi_{n,2}(\mathbb{R}) - \{0_{\Pi_{n,2}(\mathbb{R})}\}$, ${}^t h A h > 0$ car $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

$$\text{Ainsi } \forall h \in \Pi_{n,2}(\mathbb{R}) - \{0_{\Pi_{n,2}(\mathbb{R})}\}, \Phi_x^A(A^{-1}x+h) < \Phi_x^A(A^{-1}x).$$

Alors Φ_x^A admet en $A^{-1}x$ un maximum (strict) qui vaut ${}^t x A^{-1} x$ et ceci

pour tout $x \in \Pi_{n,2}(\mathbb{R})$.

(ii) Soit $X \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R})$ et soit $Y \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A < B$.

Alors $B - A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc ${}^tY(B-A)Y > 0$ car $Y \neq 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Donc ${}^tYBY > {}^tYAY$. Alors $\phi_X^A(Y) = {}^tX^tY - {}^tYAY > {}^tX^tY - {}^tYBY = \phi_X^B(Y)$.

$\forall X \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R}), \forall Y \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R}), Y \neq 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow \phi_X^A(Y) > \phi_X^B(Y)$

Soit $X \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R})$. ϕ_X^A (resp. ϕ_X^B) atteint son maximum $\gamma_A = A^{-1}X$

(resp. $\gamma_B = B^{-1}X$) et il vaut ${}^tXA^{-1}X$ (resp. ${}^tXB^{-1}X$).

Supposons $X \neq 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors $\gamma_A \neq 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $\gamma_B \neq 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}$ car

A^{-1} et B^{-1} sont inversibles.

Ainsi $\forall Y \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}\}, \phi_X^A(\gamma_A) \geq \phi_X^A(Y) > \phi_X^B(Y)$.

Donc $\forall Y \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}\}, {}^tXA^{-1}X = \phi_X^A(\gamma_A) > \phi_X^B(Y)$.

En particulier : ${}^tXA^{-1}X = \phi_X^A(\gamma_A) > \phi_X^B(\gamma_B) = {}^tXB^{-1}X$; ${}^tX(A^{-1} - B^{-1})X > 0$.

$\forall X \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}\}, {}^tX(A^{-1} - B^{-1})X > 0$; $A^{-1} - B^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. $B^{-1} < A^{-1}$.

Finalement : $\forall (A, B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), A < B \Rightarrow B^{-1} < A^{-1}$

▲ A et B sont deux matrices symétriques de $\Pi_n(\mathbb{R})$. Ça est de même pour A^{-1} et B^{-1} . Alors $A^{-1} - B^{-1}$ est encore une matrice symétrique de $\Pi_n(\mathbb{R})$.
Ainsi $A^{-1} - B^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Trois remarques pour aborder la partie III

Remarque 1. Soient π et N deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. Notons φ_π et φ_N les endomorphismes de $M_{n+1}(\mathbb{R})$ ayant respectivement pour matrices π et N dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $M_{n+1}(\mathbb{R})$.

$$\text{Soit } X \in M_{n+1}(\mathbb{R}). \quad \pi_{\mathcal{B}_0}(\varphi_\pi(X)) = \pi \cdot \pi_{\mathcal{B}_0}(X).$$

$$\text{Or } \forall Z \in M_{n+1}(\mathbb{R}), \pi_{\mathcal{B}_0}(Z) = Z \text{ d'où } \varphi_\pi(X) = \pi X !$$

$$\underline{\underline{\forall X \in M_{n+1}(\mathbb{R}), \varphi_\pi(X) = \pi X. \text{ De même } \forall X \in M_{n+1}(\mathbb{R}), \varphi_N(X) = NX.}}$$

$$\text{Alors } \pi = N \Leftrightarrow \varphi_\pi = \varphi_N \Leftrightarrow \forall X \in M_{n+1}(\mathbb{R}), \varphi_\pi(X) = \varphi_N(X) \Leftrightarrow \forall X \in M_{n+1}(\mathbb{R}), \pi X = NX.$$

$$\text{Finalement } \underline{\underline{\forall (N, \pi) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}), \pi = N \Leftrightarrow (\forall X \in M_{n+1}(\mathbb{R}), \pi X = NX).}}$$

2. Supposons que $F_1, F_2, \dots, F_p$ soient p sous-espaces vectoriels de $M_{n+1}(\mathbb{R})$ tels que $M_{n+1}(\mathbb{R}) = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$. π et N ont toujours deux éléments de $M_n(\mathbb{R})$.

$$\text{Si } \pi = N : \forall k \in \overline{1, p}, \forall X_k \in F_k, \pi X_k = N X_k.$$

Réciproquement supposons que $\forall k \in \overline{1, p}, \forall X_k \in F_k, \pi X_k = N X_k$. Montrons que $\pi = N$.

$$\text{Soit } X \in M_{n+1}(\mathbb{R}), \exists! (X_1, \dots, X_p) \in F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p, X = X_1 + X_2 + \dots + X_p.$$

$$\forall k \in \overline{1, p}, \pi X_k = N X_k \text{ d'où } \pi X = \sum_{k=1}^p \pi X_k = \sum_{k=1}^p N X_k = N X.$$

$$\forall X \in M_{n+1}(\mathbb{R}), \pi X = N X \text{ d'où } \pi = N.$$

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{\pi = N \Leftrightarrow \forall k \in \overline{1, p}, \forall X_k \in F_k, \pi X_k = N X_k.}}$$

3. Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ p sous-espaces vectoriels de $M_{n+1}(\mathbb{R})$ deux à deux orthogonaux et tels $M_{n+1}(\mathbb{R}) = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$.

Alors $\forall i \in \overline{1, p}, F_i^\perp = \bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p F_k \Leftrightarrow \bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p F_k$ est un supplémentaire de F_i et est orthogonal à F_i (avec un petit abus si $p=1$).

PARTIE III Monotonie sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

(9) a) $\forall k \in \overline{1, p}, \forall \lambda_k \in E_{\lambda_k}(A), A \lambda_k = \lambda_k \lambda_k$. $E_{\lambda_i}^{\perp} = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p E_{\lambda_j}(A)$ (Remarque 3)
 $\forall k \in \overline{1, p}, \forall \lambda_k \in E_{\lambda_k}(A), \forall i \in \overline{1, p}, \pi_i \lambda_k = \begin{cases} \lambda_k & \text{si } k=i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases}$

Alors $\forall k \in \overline{1, p}, \forall \lambda_k \in E_{\lambda_k}(A), (\sum_{i=1}^p \lambda_i \pi_i) \lambda_k = \sum_{i=1}^p \lambda_i \pi_i \lambda_k = \lambda_k \lambda_k = A \lambda_k$.

$\forall k \in \overline{1, p}, \forall \lambda_k \in E_{\lambda_k}(A), (\sum_{i=1}^p \lambda_i \pi_i) \lambda_k = A \lambda_k$.

d'après les remarques précédentes ceci suffit pour dire que $A = \sum_{i=1}^p \lambda_i \pi_i$ car $\pi_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(A)$

b) $\forall k \in \overline{1, p}, \forall \lambda_k \in E_{\lambda_k}(A), (\sum_{i=1}^p \pi_i) \lambda_k = \sum_{i=1}^p \pi_i \lambda_k = \lambda_k = I_n \lambda_k$.

Ceci suffit aussi pour dire que $I_n = \sum_{i=1}^p \pi_i$... car $\pi_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(A)$.

c) Soit t un réel et B la matrice $A + t I_n$. Pour $\forall k \in \overline{1, p}, \mu_k = \lambda_k + t$.

Soit $k \in \overline{1, p}, \forall \lambda_k \in E_{\lambda_k}(A), B \lambda_k = (A + t I_n) \lambda_k = A \lambda_k + t \lambda_k = \lambda_k \lambda_k + t \lambda_k$

$\forall \lambda_k \in E_{\lambda_k}(A), B \lambda_k = \mu_k \lambda_k$ et $E_{\lambda_k}(A) \neq \{0_{n,1}(\mathbb{R})\} = (\lambda_k + t) \lambda_k = \mu_k \lambda_k$

Ainsi 1° μ_k est valeur propre de B

2° $E_{\lambda_k}(A) \subset E_{\mu_k}(B)$.

Réciproquement soit $\gamma_k \in E_{\mu_k}(B)$. $B \gamma_k = \mu_k \gamma_k; (A + t I_n) \gamma_k = \mu_k \gamma_k = (\lambda_k + t) \gamma_k$;

ainsi $A \gamma_k + t \gamma_k = \lambda_k \gamma_k + t \gamma_k; A \gamma_k = \lambda_k \gamma_k; \gamma_k \in E_{\lambda_k}(A)$.

Finalement $E_{\lambda_k}(A) = E_{\mu_k}(B)$.

Alors $\mu_1, \dots, \mu_p$ sont p valeurs propres de B telles que $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_p$ et

$\pi_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}(A) = \bigoplus_{k=1}^p E_{\mu_k}(B)$. Alors $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ sont LES valeurs propres distinctes de B et $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_p$.

si $i \in \overline{1, p}$, $E_{j_i}(B) = E_{j_i}(B)$ donc π_i est la matrice de la projection orthogonale sur $E_{j_i}(B)$ dans la base canonique de $\pi_{n,1}(U)$.

Donc $B = \sum_{i=1}^p j_i \pi_i$ est la décomposition de B .

Pour tout t dans $\mathbb{R}$ la décomposition de $A + tS_n$ est $\sum_{i=1}^p (\lambda_i + t) \pi_i$.

Soit A un élément de S_n^{++} qui admet la décomposition $A = \sum_{i=1}^p \lambda_i \pi_i \dots$

Q2 a) Soit $i \in \overline{1, p}$. Montrons que ${}^t \pi_i = \pi_i$ c'est à dire que π_i est symétrique.

Notons p_i la projection orthogonale sur $E_{\lambda_i}(A)$.

π_i est la matrice de p_i dans la base canonique de $\pi_{n,1}(U)$ qui est orthogonale (pour le produit scalaire canonique). Ainsi pour montrer que π_i est symétrique.

il suffit de prouver que p_i est symétrique.

Soit $(x, y) \in \pi_{n,1}(U)^2$. $\exists (x', y') \in E_{\lambda_i}(A)^2, \exists (x'', y'') \in (E_{\lambda_i}(A)^\perp)^2$, $x = x' + x''$ et

$y = y' + y''$. $p_i(x) = x'$ et $p_i(y) = y'$. x' et y'' sont orthogonaux.

Alors $\langle p_i(x), y \rangle = \langle x', y' + y'' \rangle = \langle x', y' \rangle + \langle x', y'' \rangle = \langle x', y' \rangle$.

De même $\langle p_i(y), x \rangle = \langle y', x' \rangle$.

Alors $\langle p_i(x), y \rangle = \langle x', y' \rangle = \langle y', x' \rangle = \langle p_i(y), x \rangle = \langle x, p_i(y) \rangle$.

Ceci achève de montrer que p_i est symétrique. Donc π_i est symétrique.

$\forall i \in \overline{1, p}, \pi_i \in S_n(\mathbb{R})$.

Alors $\tilde{f}(A) = \sum_{i=1}^p f(\lambda_i) \pi_i$ appartient à $\pi_{n,1}(\mathbb{R})$ et :

${}^t \tilde{f}(A) = \sum_{i=1}^p f(\lambda_i) {}^t \pi_i = \sum_{i=1}^p f(\lambda_i) \pi_i = \tilde{f}(A)$. Donc $\tilde{f}(A) \in S_n(\mathbb{R})$.

$\forall A \in S_n^{++}(\mathbb{R}), \tilde{f}(A) \in S_n(\mathbb{R})$.

Pour $B = \tilde{f}(A)$. Notons que $\text{sp } B = \{f(\lambda_i); i \in \{1, \dots, p\}\}$ et que, pour tout i dans $\{1, \dots, p\}$

$$E_{f(\lambda_i)}(B) = E_{\lambda_i}(A).$$

$$\pi_k X = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ X & \text{si } k = i \end{cases}$$

$$\text{Soit } i \in \{1, \dots, p\}. \forall X \in E_{\lambda_i}(A), BX = \sum_{k=1}^p f(\lambda_k) \pi_k X = f(\lambda_i) X.$$

Alors $E_{\lambda_i}(A) \subset \{X \in \pi_{n,p}(W) \mid BX = f(\lambda_i)X\}$. A $E_{\lambda_i}(A) \neq \{0\} \subset \pi_{n,p}(W)$ donc

$\exists X \in \pi_{n,p}(W) \mid BX = f(\lambda_i)X \neq \{0\}$. Alors $f(\lambda_i)$ est valeur propre B et

$$E_{\lambda_i}(A) \subset \{X \in \pi_{n,p}(W) \mid BX = f(\lambda_i)X\} = E_{f(\lambda_i)}(B).$$

$$\text{Rien } \pi_{n,p}(W) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(A) \subset \bigoplus_{i=1}^p E_{f(\lambda_i)}(B) \subset \pi_{n,p}(W).$$

et cette somme est bien directe car $\{f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_p)\}$

sont deux à deux distincts puisque $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$ et f est strictement monotone.

$$\text{Alors } \pi_{n,p}(W) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(A) = \bigoplus_{i=1}^p E_{f(\lambda_i)}(B).$$

On peut donc par avoir d'autres valeurs propres que $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_p)$.

$$\text{Par conséquent } \underline{\text{sp } \tilde{f}(A) = \text{sp } B = \{f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_p)\}}.$$

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, E_{\lambda_i}(A) \subset E_{f(\lambda_i)}(B).$$

$$\text{En particulier } \forall i \in \{1, \dots, p\}, \dim E_{\lambda_i}(A) \leq \dim E_{f(\lambda_i)}(B)$$

Supposons qu'il existe k dans $\{1, \dots, p\}$ tel que $\dim E_{\lambda_k}(A) < \dim E_{f(\lambda_k)}(B)$.

$$\text{Alors } \dim \pi_{n,p}(W) = \sum_{i=1}^p \dim E_{\lambda_i}(A) < \sum_{i=1}^p \dim E_{f(\lambda_i)}(B) = \dim \pi_{n,p}(W) !!$$

$$\text{Ainsi } \forall i \in \{1, \dots, p\}, E_{\lambda_i}(A) \subset E_{f(\lambda_i)}(B) \text{ et } \dim E_{\lambda_i}(A) = \dim E_{f(\lambda_i)}(B).$$

$$\text{Finalement } \underline{\forall i \in \{1, \dots, p\}, E_{\lambda_i}(A) = E_{f(\lambda_i)}(B) = E_{f(\lambda_i)}(\tilde{f}(A))}.$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, π_i est la matrice de la projection orthogonale sur $E_{f(\lambda_i)}(\tilde{f}(A))$.

et $\text{sp } \tilde{f}(A) = \{f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_p)\}$. Rappelons que $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$. Alors:

$$\underline{\text{si } f \text{ est strictement croissante la décomposition de } \tilde{f}(A) \text{ est } \sum_{i=1}^p f(\lambda_i) \pi_i ;}$$

$$\underline{\text{si } f \text{ est strictement décroissante la décomposition de } \tilde{f}(A) \text{ est } \sum_{i=1}^p f(\lambda_{p-i+1}) \pi_{p-i+1} .}$$

b) Soit $A \in \mathcal{L}_n^+(\mathbb{R})$ admettant pour décomposition $A = \sum_{i=1}^p \lambda_i \pi_i \dots$

Autovecteurs non nuls pour valeurs propres de A .

Soit $\lambda \in \text{Sp } A$. $\exists \lambda \in \pi_{k,1}(\mathbb{R})$, $\lambda \neq 0$, $\pi_{k,1}(\mathbb{R})$ et $AX = \lambda X$.

Alors $X \neq 0$, $\pi_{k,1}(\mathbb{R})$ et $A^{-1}X = \frac{1}{\lambda} X$ donc $\frac{1}{\lambda} \in \text{Sp } A^{-1}$.

$\{ \frac{1}{\lambda}; \lambda \in \text{Sp } A \} \subset \text{Sp } A^{-1}$. Réciproquement soit $\mu \in \text{Sp } A^{-1}$.

$\exists X \in \pi_{k,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$, $\pi_{k,1}(\mathbb{R})$ et $A^{-1}X = \mu X$. $X = \mu AX$.

Alors $AX = \frac{1}{\mu} X$ et $X \neq 0$, $\pi_{k,1}(\mathbb{R})$ donc $\frac{1}{\mu} \in \text{Sp } A$. Posons $\lambda_0 = \frac{1}{\mu}$.

$\mu = \frac{1}{\lambda_0}$ et $\lambda_0 \in \text{Sp } A$ donc $\mu \in \{ \frac{1}{\lambda}; \lambda \in \text{Sp } A \}$.

Finalement $\text{Sp } A^{-1} = \{ \frac{1}{\lambda}; \lambda \in \text{Sp } A \} = \{ \frac{1}{\lambda_i}; i \in \overline{1, p} \}$.

Or pour $\forall X \in \pi_{k,1}(\mathbb{R})$, $X \in E_{\lambda_i}(A) \Leftrightarrow AX = \lambda_i X \Leftrightarrow A^{-1}X = \frac{1}{\lambda_i} X \Leftrightarrow X \in E_{\frac{1}{\lambda_i}}(A^{-1})$.

Donc $\text{Sp } A^{-1} = \{ \frac{1}{\lambda_i}; i \in \overline{1, p} \}$ et $\forall i \in \overline{1, p}$, $E_{\frac{1}{\lambda_i}}(A^{-1}) = E_{\lambda_i}(A)$.

La décomposition de A^{-1} est alors $A^{-1} = \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i} \pi_i$; ou plutôt :

$$A^{-1} = \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_{p+1-i}} \pi_{p+1-i} \dots \frac{1}{\lambda_p} < \frac{1}{\lambda_{p-1}} < \dots < \frac{1}{\lambda_1} \quad !!$$

"Posons" alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^p$, $f(x) = \frac{1}{x}$. f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^p$.

b) donne alors $\tilde{f}(A) = \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_{p+1-i}} \pi_{p+1-i}$

Ainsi $\tilde{f}(A) = A^{-1}$.

Si f est l'application de $\mathbb{R}_+^p$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+^p$, $f(x) = \frac{1}{x}$ alors

$\tilde{f}(A) = A^{-1}$

c) • g est une application (strictement monotone) de $\mathbb{R}_+^p$ dans $\mathbb{R}_+^q$ et f est une application (strictement monotone) de $\mathbb{R}_+^q$ dans $\mathbb{R}$.

Alors $f \circ g$ est une application (strictement monotone) de $\mathbb{R}_+^p$ dans $\mathbb{R}$.

Soit A une matrice de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ admettant pour décomposition " $A = \sum_{i=1}^p \lambda_i \pi_i$ "

Alors on a : $\widetilde{f \circ g}(A) = \sum_{i=1}^p (f \circ g)(\lambda_i) \pi_i$.

Ainsi $\widetilde{f \circ g}(A) = \sum_{i=1}^p f(g(\lambda_i)) \pi_i$.

• g est strictement monotone et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^q$. Ainsi $g(A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

et la décomposition de $g(A)$ est $\sum_{i=1}^p g(\lambda_i) \pi_i$ ou $\sum_{i=1}^p g(\lambda_{p+i-i}) \pi_{p+i-i}$

Soit $\widetilde{g}(A) = (g(\lambda_1), \dots, g(\lambda_p)) \in \mathbb{R}_+^q$. Alors $\widetilde{g}(A) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et a

pour décomposition $\sum_{i=1}^p g(\lambda_i) \pi_i$ ou $\sum_{i=1}^p g(\lambda_{p+i-i}) \pi_{p+i-i}$

f étant une application (strictement monotone) de $\mathbb{R}_+^q$ dans $\mathbb{R}$ on a :

$\widetilde{f}(\widetilde{g}(A)) = \sum_{i=1}^p f(g(\lambda_i)) \pi_i$ ou $\widetilde{f}(\widetilde{g}(A)) = \sum_{i=1}^p f(g(\lambda_{p+i-i})) \pi_{p+i-i}$. ~~inutile!~~

dans les deux cas $\widetilde{f}(\widetilde{g}(A)) = \sum_{i=1}^p f(g(\lambda_i)) \pi_i = \widetilde{f \circ g}(A)$.

Ainsi $\forall A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\widetilde{f \circ g}(A) = \widetilde{f}(\widetilde{g}(A)) = (\widetilde{f} \circ \widetilde{g})(A)$.

Alors $\widetilde{f \circ g} = \widetilde{f} \circ \widetilde{g}$ lorsque f est une application strictement

monotone de $\mathbb{R}_+^q$ dans $\mathbb{R}$ et g une application strictement

monotone de $\mathbb{R}_+^p$ dans $\mathbb{R}_+^q$.

Remarque. Noter que la stricte monotonie ne sert pas ici... celle de g est essentielle.

d) soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{1}{c} \frac{cax+ad-ad+cb}{cx+d} = \frac{1}{c} \left[\frac{a(cx+d)}{cx+d} + \frac{cb-ad}{cx+d} \right]$

$$h(x) = \frac{1}{c} \left[a + \frac{cb-ad}{cx+d} \right] = \frac{bc-ad}{c(cx+d)} + \frac{a}{c}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{bc-ad}{c(cx+d)} + \frac{a}{c}.$$

Soit h_1 l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ définie par: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h_1(x) = cx+d$ ($c>0, d>0 \dots$)

Soit h_2 l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ définie par: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h_2(x) = \frac{1}{x}$.

Soit h_3 l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h_3(x) = \frac{bc-ad}{c}x + \frac{a}{c}$.

Alors $h = h_3 \circ h_2 \circ h_1$, h_1 est strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, h_2 est strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et h_3 est strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
 $\neq \frac{bc-ad}{c} \neq 0$

Alors d'après c) $\tilde{h} = \tilde{h}_3 \circ \tilde{h}_2 \circ \tilde{h}_1$.

Notons que d'après II $\tilde{h}_2$ est strictement décroissante. Ne reste

plus qu'à noter que $\tilde{h}_3$ et $\tilde{h}_1$ sont strictement croissants.

Notons que h_1 et h_2 sont affines (et non constantes). On conclut ainsi par.

Lemme... [soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$. On a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \alpha x + \beta$.
 Alors f est strictement croissante si $\alpha \geq 0$ et strictement décroissante si $\alpha < 0$.

Soit $(A, B) \in \mathcal{I}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{I}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A < B$.

Supposons que la décomposition de A est $A = \sum_{i=1}^p \lambda_i \pi_i$

$$\tilde{f}(A) = \sum_{i=1}^p f(\lambda_i \pi_i) = \sum_{i=1}^p (\alpha \lambda_i + \beta) \pi_i = \alpha \sum_{i=1}^p \lambda_i \pi_i + \beta \sum_{i=1}^p \pi_i = \alpha A + \beta I.$$

De même $\tilde{f}(B) = \alpha B + \beta I$. Donc $\tilde{f}(B) - \tilde{f}(A) = \alpha(B - A)$.

Qu'on met $S_p(\tilde{f}(B) - \tilde{f}(A)) = \{\alpha\lambda; \lambda \in S_p(B-A)\}$

à $S_p(B-A) \subset \mathbb{R}_+^p$.

Ainsi si $\alpha > 0$: $S_p(\tilde{f}(B) - \tilde{f}(A)) \subset \mathbb{R}_+^p$ et ainsi $\tilde{f}(B) - \tilde{f}(A) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

d'où $\tilde{f}(A) < \tilde{f}(B)$

Si $\alpha < 0$: $S_p(\tilde{f}(B) - \tilde{f}(A)) \subset \mathbb{R}_-^p$ d'où $S_p(\tilde{f}(A) - \tilde{f}(B)) \subset \mathbb{R}_+^p$, ainsi

$\tilde{f}(A) - \tilde{f}(B) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ce qui donne $\tilde{f}(B) < \tilde{f}(A)$.

Ceci achève la preuve du lemme

Alors $\tilde{h}_1$ est strictement croissante

et $\tilde{h}_3$ est strictement croissante si $bc - ad > 0$ et strictement décroissante si

$bc - ad < 0$.

Rappelons que $\tilde{h}_2$ est strictement décroissante.

Il est alors simple de prouver que $\tilde{h}_3 \circ \tilde{h}_2 \circ \tilde{h}_1$ est strictement décroissante

si $bc - ad > 0$ et strictement croissante si $bc - ad < 0$.

Ainsi $\tilde{h}$ est strictement croissante si $bc - ad < 0$ et

strictement décroissante si $bc - ad > 0$. $\tilde{h}$ est donc strictement monotone.

(Q3) q) Soient π et N telles que $\int_0^{\infty} \pi(t) dt$ et $\int_0^{\infty} N(t) dt$ existent

△ Nous ne les définissons pas avec précision. π et N . Nous utiliserons implicitement ce qui est proposé par le texte.

Pour $P = \pi + N$ et $\forall (i, j) \in [1, n]^2$, $P_{ij} = \pi_{ij} + n_{ij}$

Pour tout $(i, j) \in [1, n]^2$, P_{ij} est une application continue de $\mathbb{R}_+^p$ dans $\mathbb{R}$ comme somme de deux applications continues de $\mathbb{R}_+^p$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $(i, j) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1$. $\int_0^{+\infty} u_{ij}(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} v_{ij}(t) dt$ convergent d'après
 $\int_0^{+\infty} p_{ij}(t) dt$ converge et $\int_0^{+\infty} l_{ij}(t) dt = \int_0^{+\infty} u_{ij}(t) dt + \int_0^{+\infty} v_{ij}(t) dt$.

Alors $\int_0^{+\infty} p(t) dt$ existe.

$$\text{or } \int_0^{+\infty} p(t) dt = \left(\int_0^{+\infty} p_{ij}(t) dt \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1} = \left(\int_0^{+\infty} u_{ij}(t) dt + \int_0^{+\infty} v_{ij}(t) dt \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1} =$$

$$\left(\int_0^{+\infty} u_{ij}(t) dt \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1} + \left(\int_0^{+\infty} v_{ij}(t) dt \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1} = \int_0^{+\infty} p(t) dt + \int_0^{+\infty} N(t) dt.$$

En choisissant $n \in \mathbb{N}$ et N nat telles que $\int_0^{+\infty} p(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} N(t) dt$ existent d'après
 $\int_0^{+\infty} (p(t) + N(t)) dt$ existe et $\int_0^{+\infty} (p(t) + N(t)) dt = \int_0^{+\infty} p(t) dt + \int_0^{+\infty} N(t) dt$.

$$\text{b) i) } \tilde{f}(A) = \sum_{i=1}^p f(\lambda_i) \pi_i = \sum_{i=1}^p \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t} - \frac{1}{\lambda_i+t} \right) \varphi(t) dt \pi_i$$

$$\tilde{f}(A) = \sum_{i=1}^p \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t} - \frac{1}{\lambda_i+t} \right) \varphi(t) \pi_i dt \text{ d'après a) (i)}$$

$$\tilde{f}(A) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^p \left(\frac{t}{1+t} - \frac{1}{\lambda_i+t} \right) \varphi(t) \pi_i \right) dt \text{ d'après a) (i)}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \sum_{i=1}^p \left(\frac{t}{1+t} - \frac{1}{\lambda_i+t} \right) \varphi(t) \pi_i = \underbrace{\frac{t \varphi(t)}{1+t}}_{I_n} \sum_{i=1}^p \pi_i - \varphi(t) \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i+t} \pi_i$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

La décomposition de A est $A = \sum_{i=1}^p \lambda_i \pi_i$

Donc la décomposition de $A + t I_n$ est $\sum_{i=1}^p (\lambda_i + t) \pi_i$ (III $\varnothing$ 1 c)

la décomposition de $(A + t I_n)^{-1}$ est $\sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i + t} \pi_i$ (III $\varnothing$ 2 b)

Alors $\sum_{i=1}^p \pi_i = I_n$ et $\sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i + t} \pi_i = (A + t I_n)^{-1}$ pour $\left\{ \begin{array}{l} \text{car } t \in (\pi_1, p \mathbb{D}), \lambda_i + t > 0 \dots \end{array} \right.$

tout est strictement positif.

$$\text{Ainsi } \tilde{f}(A) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t \varphi(t)}{1+t^2} I_n - \varphi(t) (A+tI_n)^{-1} \right) dt.$$

$$\underline{\underline{\tilde{f}(A) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) \left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (A+tI_n)^{-1} \right) dt.}}$$

ii) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. $A < B$ d'où $A+tI_n < B+tI_n$ d'après le lemme de l'exercice 18 (pour $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t) = z+t$).

Alors $(B+tI_n)^{-1} < (A+tI_n)^{-1}$. Ainsi $(A+tI_n)^{-1} - (B+tI_n)^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

doit $x \in \Pi_{n,n}(\mathbb{R}) - \{0_{\Pi_{n,n}(\mathbb{R})}\}$.

$${}^t x \left((A+tI_n)^{-1} - (B+tI_n)^{-1} \right) x > 0.$$

Alors $-{}^t x (A+tI_n)^{-1} x < -{}^t x (B+tI_n)^{-1} x$. En ajoutant ${}^t x \left(\frac{t}{1+t^2} I_n \right) x$ il vient :

$${}^t x \left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (A+tI_n)^{-1} \right) x < {}^t x \left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (B+tI_n)^{-1} \right) x \text{ et ceci pour}$$

tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $x \in \Pi_{n,n}(\mathbb{R}) - \{0_{\Pi_{n,n}(\mathbb{R})}\}$.

c) Soient A et B deux éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A < B$.

noter que $\tilde{f}(A) < \tilde{f}(B)$. Soit à noter que $\tilde{f}(B) - \tilde{f}(A) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ou

que $\forall x \in \Pi_{n,n}(\mathbb{R}) - \{0_{\Pi_{n,n}(\mathbb{R})}\}$, ${}^t x (\tilde{f}(B) - \tilde{f}(A)) x > 0$ ou

que $\forall x \in \Pi_{n,n}(\mathbb{R}) - \{0_{\Pi_{n,n}(\mathbb{R})}\}$, ${}^t x \tilde{f}(A) x < {}^t x \tilde{f}(B) x$. Soit $x \in \Pi_{n,n}(\mathbb{R}) - \{0_{\Pi_{n,n}(\mathbb{R})}\}$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, {}^t x \left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (A+tI_n)^{-1} \right) x < {}^t x \left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (B+tI_n)^{-1} \right) x \text{ et } \varphi(t) > 0$$

non !!

$$\text{Rien si } t \in \mathbb{R}_+^*, {}^t x \left[\varphi(t) \left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (A+tI_n)^{-1} \right) \right] x < {}^t x \left[\varphi(t) \left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (B+tI_n)^{-1} \right) \right] x.$$

$$\int_0^{+\infty} \psi(t) \left(\frac{t}{1+t^2} S_n - (A+tS_n)' \right) dt \text{ existe et vaut } \tilde{f}(A)$$

$$\text{donc } \int_0^{+\infty} t_K [\psi(t) \left(\frac{t}{1+t^2} S_n - (A+tS_n)' \right)] X dt \text{ existe et vaut } t_K \tilde{f}(A) X \text{ d'après 9j(22c).}$$

$$\text{De même } \int_0^{+\infty} t_K [\psi(t) \left(\frac{t}{1+t^2} S_n - (B+tS_n)' \right)] X dt \text{ existe et vaut } t_K \tilde{f}(B) X.$$

En utilisant en particulier l'égalité de la fin de la page 12 il vient :

$$t_K \tilde{f}(A) X < t_K \tilde{f}(B) X \text{ car } 0 < t_K (\tilde{f}(B) - \tilde{f}(A)) X.$$

$$\forall X \in \Pi_{n,0}(\mathbb{R}) - \{0\}, \quad t_K (\tilde{f}(B) - \tilde{f}(A)) X > 0; \quad \tilde{f}(B) - \tilde{f}(A) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$$

$$\text{Ainsi } \tilde{f}(A) < \tilde{f}(B).$$

$$\forall (A, B) \in S_n^{++}(\mathbb{R}), \quad A < B \Rightarrow \tilde{f}(A) < \tilde{f}(B). \quad \underline{\tilde{f} \text{ est strictement croissante sur } S_n^{++}(\mathbb{R}).}$$

c) Rappelons que $f_0 = h_1$. Ainsi $\tilde{h}_1 = \tilde{f}_0$ qui est strictement

croissante sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$ d'après ce qui précède ($\varphi = t + 1$).

Soit $\alpha \in]-1, 0[\cup]0, 1[$. En appliquant ce qui précède à $\tilde{\alpha} = \varphi = t + t^\alpha$ on montre que $\tilde{f}_\alpha$ est strictement croissante sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

1^{er} cas. $\alpha \in]-1, 0[$. $\exists c \in]-\infty, 0[, \exists d \in \mathbb{R}, \forall x \in]0, +\infty[, f_\alpha(x) = cx^\alpha + d$

$$\text{donc } \forall x \in]0, +\infty[, x^\alpha = \frac{1}{c} f_\alpha(x) - \frac{d}{c}.$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, p_\alpha(x) = \frac{1}{2} f_\alpha(x) - \frac{d}{c}.$$

Soient A et B deux éléments de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $A < B$.

$$\tilde{f}_\alpha(A) < \tilde{f}_\alpha(B) \text{ car } \tilde{f}_\alpha \text{ est strictement croissante sur } S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

$$\text{Or } \frac{1}{c} \tilde{f}_\alpha(A) - \frac{d}{c} > \frac{1}{c} \tilde{f}_\alpha(B) - \frac{d}{c}$$

ce qui donne $\tilde{p}_\alpha(A) > \tilde{p}_\alpha(B)$. Ainsi $\tilde{p}_\alpha$ est strictement décroissante sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

2^{ème} cas... $\alpha \in]0, 1[$. $\exists c \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall d \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_\alpha(x) = cx^\alpha + d$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^\alpha = \frac{1}{\alpha} f_\alpha(x) - \frac{d}{c}.$$

Alors une démarche analogue à celle du premier cas montre que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}_n^{++}(\mathbb{R}), A < B \Rightarrow \frac{1}{c} \tilde{f}_\alpha(A) - \frac{d}{c} < \frac{1}{c} \tilde{f}_\alpha(B) - \frac{d}{c}$$

$$\text{Ainsi } \forall (A, B) \in \mathcal{P}_n^{++}(\mathbb{R}), A < B \Rightarrow \tilde{p}_\alpha(A) < \tilde{p}_\alpha(B).$$

p_α est strictement croissante sur $\mathcal{P}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Finalement $\tilde{p}_\alpha$ est strictement croissante sur $\mathcal{P}_n^{++}(\mathbb{R})$ si $\alpha \in]0, 1[$ (ou $[0, 1[$)

et strictement décroissante si $\alpha \in]-1, 0[$.

PARTIE IV monotonicité comparée de f et $\tilde{f}$

Q1) Supposons que $\tilde{f}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^{++}(\mathbb{R})$.

Montrons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha < \beta$. Montrons que $f(\alpha) < f(\beta)$.

Posez $A = \alpha I_n$ et $B = \beta I_n$.

La décomposition de A (resp. B) est $A = \alpha I_n$ (resp. $B = \beta I_n$).

Alors $\tilde{f}(A) = f(\alpha) I_n$ et $\tilde{f}(B) = f(\beta) I_n$.

$B - A = (\beta - \alpha) I_n \in \mathbb{R}_+^{++}(\mathbb{R})$ car $\beta - \alpha > 0$. Ainsi $A < B$.

Re, $\tilde{f}(A) < \tilde{f}(B)$. Donc $(f(\beta) - f(\alpha)) I_n = \tilde{f}(B) - \tilde{f}(A) \in \mathbb{R}_+^{++}(\mathbb{R})$.

Les valeurs propres de $(f(\beta) - f(\alpha)) I_n$ sont strictement positives.

Ainsi $f(\beta) - f(\alpha) > 0$. $f(\beta) > f(\alpha)$.

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $\alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta)$.

$\therefore \tilde{f}$ est strictement croissante, f est strictement croissante.

Q2) a) D'abord $e \in \mathbb{S}_2(\mathbb{R})$. Utilisons II Q3 pour prouver que $\mathbb{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

D'abord $\frac{e^t + e^{-t}}{2} > 0$.

Après $\frac{e^t + e^{-t}}{2} \times \frac{e^t + e^{-t}}{2} - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} [(e^t + e^{-t})^2 - (e^t - e^{-t})^2] = \frac{1}{4} (e^t + e^{-t} + e^t - e^{-t})(e^t + e^{-t} + e^t - e^{-t})$

Donc $\frac{e^t + e^{-t}}{2} \times \frac{e^t + e^{-t}}{2} - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} (2e^t)(2e^{-t}) = 1 > 0$.

Donc $A(t) \in \mathbb{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda \in \text{Sp } A(t) \Leftrightarrow \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{e^t + e^{-t}}{2} - \lambda = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ \frac{e^t + e^{-t}}{2} - \lambda = -\frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$

$\lambda \in \text{Sp } A(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = e^{-t} \\ \text{ou} \\ \lambda = e^t \end{cases}$

$\text{Sp } A(t) = \{e^{-t}, e^t\} \dots$ et on vérifie que $A(t) \in \mathbb{S}_2^{++}(\mathbb{R})$!!

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \pi_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$A(t)X = e^t X \Leftrightarrow \begin{cases} (\frac{e^t e^{-t}}{2} - e^t)x + \frac{e^t - e^{-t}}{2}y = 0 \\ \frac{e^t + e^{-t}}{2}x + (\frac{e^t e^{-t}}{2} - e^{-t})y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{e^t e^{-t}}{2}(y-x) = 0 \\ \frac{e^t + e^{-t}}{2}(x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y.$$

Alors $E_{e^t}(A(t)) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On trouve de même que $E_{e^{-t}}(A(t)) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Soit p_1 (resp. p_2) la projecteur orthogonal sur $E_{e^t}(A(t))$ (resp. $E_{e^{-t}}(A(t))$).

Noter que les deux sous-espaces propres sont supplémentaires et orthogonaux car $A(t) \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, l'un est donc l'orthogonal de l'autre.

Alors $p_1 + p_2 = \text{Id}_{\pi_{2,1}(\mathbb{R})}$.

$$p_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + p_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = p_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$p_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) - p_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = p_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi } p_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = p_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \pi_2 =$$

La matrice de p_1 dans la base canonique de $\pi_{2,1}(\mathbb{R})$ est $A^t \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors la matrice de p_2 dans la base canonique de $\pi_{2,1}(\mathbb{R})$ est $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \pi_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

la décomposition de $A(t)$ est $A(t) = e^t \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + e^{-t} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. $B(t) \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

$$B(t) \in \mathcal{S}_c^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 > 0 \quad (!) \\ t^3 \left(\frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^2 \right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < \frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^2.$$

$$\text{Le } \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^2 \right) = 1 \text{ donc } \exists \eta_0 \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in]0, \eta_0[, \frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^2 > 0.$$

Ainsi $\exists \eta_0 \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in]0, \eta_0[, B(t) \in \mathcal{S}_c^{++}(\mathbb{R})$.

c) Sejam $t \in]q, \infty[$. $A(t) - B(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^t e^{-t}}{2} - t^3 & \frac{e^t e^{-t}}{2} \\ \frac{e^t e^{-t}}{2} & \frac{e^t e^{-t}}{2} - \frac{2}{e^t e^{-t}} + t^3 \end{pmatrix}$

$A(t) - B(t) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. $A(t) - B(t) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{e^t e^{-t}}{2} - t^3 > 0 \\ \underbrace{\left(\left(\frac{e^t e^{-t}}{2} - t^3 \right) \left(\frac{e^t e^{-t}}{2} - \frac{2}{e^t e^{-t}} + t^3 \right) - \left(\frac{e^t e^{-t}}{2} \right)^2 \right)}_{\ell(t)} > 0 \end{cases}$

$\ell(t) = \left(\frac{e^t e^{-t}}{2} \right)^2 - 1 + \frac{e^t e^{-t}}{2} t^3 - t^3 \frac{e^t e^{-t}}{2} + \frac{2 t^3}{e^t e^{-t}} - t^6 - \left(\frac{e^t e^{-t}}{2} \right)^2$

$\ell(t) = \left(\frac{e^t e^{-t}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^t e^{-t}}{2} \right)^2 = \left(\frac{e^t e^{-t} + e^t e^{-t}}{2} \right) \left(\frac{e^t e^{-t} - e^t e^{-t}}{2} \right) = e^t e^{-t} = 1$

Assim $\ell(t) = \frac{2 t^3}{e^t e^{-t}} - t^6 = \frac{t^3}{e^t e^{-t}} [2 - t^3 (e^t e^{-t})]$

Assim $A(t) - B(t) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{e^t e^{-t}}{2} - t^3 > 0 \\ \frac{t^3}{e^t e^{-t}} (2 - t^3 (e^t e^{-t})) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{e^t e^{-t}}{2} - t^3 > 0 \\ 2 - t^3 (e^t e^{-t}) > 0 \end{cases}$

$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^t e^{-t}}{2} - t^3 \right) = 1 \neq 0$ e $\lim_{t \rightarrow 0^+} (2 - t^3 (e^t e^{-t})) = 2$

Logo $\exists \eta'_1 \in]0, \eta_0[\forall t \in]0, \eta'_1[, \frac{e^t e^{-t}}{2} - t^3 > 0$.

$\exists \eta''_1 \in]0, \eta_0[, \forall t \in]0, \eta''_1[, 2 - t^3 (e^t e^{-t}) > 0$.

Logo logo $\eta_1 = \min(\eta'_1, \eta''_1)$.

$\eta_1 \in]0, \eta_0[$ e $\forall t \in]0, \eta_1[, \frac{e^t e^{-t}}{2} - t^3 > 0$ e $2 - t^3 (e^t e^{-t}) > 0$

Assim $\exists \eta_1 \in]0, \eta_0[, \forall t \in]0, \eta_1[, A(t) - B(t) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Sejam $t \in]0, \eta_1[$.

A decomposição de $A(t)$ em $A(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Se $\tilde{p}_n(A(t)) = e^{at} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + e^{-at} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. $\tilde{p}_n(A(t)) = \begin{pmatrix} \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} & \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} \\ \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} & \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} \end{pmatrix}$

La décomposition de $B(t)$ est $B(t) = t^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^3\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Ainsi } \tilde{P}_\alpha(B(t)) = t^{3\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^3\right)^\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{3\alpha} & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^3\right)^\alpha \end{pmatrix}.$$

e doit α un élément de $\mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}$. Soit $t \in]0, \pi, L$.

$$\tilde{P}_\alpha(A(t)) - \tilde{P}_\alpha(B(t)) = \begin{pmatrix} \frac{e^t + e^{-t}}{2} - t^{3\alpha} & \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} \\ \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} & \frac{e^t + e^{-t}}{2} - \left(\frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^3\right)^\alpha \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{P}_\alpha(A(t)) - \tilde{P}_\alpha(B(t)) \in \mathcal{J}_2(\mathbb{R}).$$

$$\tilde{P}_\alpha(A(t)) - \tilde{P}_\alpha(B(t)) \in \mathcal{J}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{e^t + e^{-t}}{2} - t^{3\alpha} > 0 \\ \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} - t^{3\alpha}\right) \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} - \left(\frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^3\right)^\alpha\right) - \left(\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}\right)^2 > 0. \end{cases}$$

Notons que $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} - t^{3\alpha}\right) = 1$ donc pour t proche de 0 : $\frac{e^t + e^{-t}}{2} - t^{3\alpha} > 0$!

$$\text{Pour cela } \forall t \in]0, \pi, L, u(t) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} - t^{3\alpha}\right) \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} - \left(\frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^3\right)^\alpha\right) - \left(\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}\right)^2.$$

Pour trouver un équivalent de u en 0 il convient de faire un développement limité de u au voisinage de 0. A quel ordre ??? Le t^3 plaide pour l'ordre 3.

on fait alors un de 3 rang et adéquat... pour s'apercevoir que l'ordre 2 suffit !!

$$e^{2t} = 1 + 2t + \frac{(2t)^2}{2} + o(t^2) \text{ et } e^{-2t} = 1 - 2t + \frac{(2t)^2}{2} + o(t^2).$$

$$\text{Avec } \frac{e^t + e^{-t}}{2} = 1 + \frac{(2t)^2}{2} + o(t^2) \text{ et } \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} = 2t + o(t^2)$$

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2) \text{ donc } \frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^3 = \frac{1}{1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2)} = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

$$\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = (2t)^2 + o(t^2) = 4t^2 + o(t^2)$$

$$\frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^3 = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \text{ et } (1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^2 + o(u^2).$$

$$\text{Avec } \left(\frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^3\right)^\alpha = 1 + \alpha \left(-\frac{t^2}{2}\right) + o(t^2) = 1 - \frac{\alpha}{2} t^2 + o(t^2).$$

$$\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} - t^{3\alpha} = 1 + \frac{\alpha^2}{2} t^2 + o(t^4) \quad \text{car } t^{3\alpha} = 0 + o(t^2) \quad (\alpha > 1).$$

$$\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} - \left(\frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^3 \right)^\alpha = 1 + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} t^2 + o(t^4) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} t^2 + o(t^4).$$

$$\text{Ainsi } \left(\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} - t^{3\alpha} \right) \left(\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} - \left(\frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^3 \right)^\alpha \right) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} t^4 + o(t^6).$$

$$\text{Ainsi } u(t) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} t^2 - \alpha^2 t^2 + o(t^2) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} t^2 + o(t^2).$$

$$\text{Ainsi } u(t) \underset{0}{\sim} \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} t^2.$$

$$\left(\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} - t^{3\alpha} \right) \left(\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} - \left(\frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^3 \right)^\alpha \right) - \left(\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} \right)^2 \underset{0}{\sim} \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} t^4.$$

Remarque... Notons que la dérivée $u(t)$ par t^2 et a pour limite la limite antérieure plus rapidement la vitesse...

$$u(t) \underset{0}{\sim} \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} t^2. \text{ Alors } \exists \eta_2 \in]0, \eta_1[, \exists \varepsilon \in \mathcal{EB}([0, \eta_2], \mathbb{R}),$$

$$\forall t \in]0, \eta_2[, u(t) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} t^2 (1 + \varepsilon(t)) \text{ avec } \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0.$$

$$\exists \eta_3 \in]0, \eta_2[, \forall t \in]0, \eta_3[, |\varepsilon(t)| < \frac{1}{2}.$$

$$\text{Alors } \forall t \in]0, \eta_3[, -\frac{1}{2} < \varepsilon(t) < \frac{1}{2}; \quad \forall t \in]0, \eta_3[, \frac{1}{2} < 1 + \varepsilon(t) < \frac{3}{2}.$$

$$\text{Donc } \forall t \in]0, \eta_3[, 1 + \varepsilon(t) > 0 \text{ et } u(t) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} t^2 (1 + \varepsilon(t))$$

$$\text{Notons que } \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} < 0 \text{ car } \alpha > 1$$

$$\text{Alors } \forall t \in]0, \eta_3[, \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} t^2 < 0 \text{ et } 1 + \varepsilon(t) > 0.$$

$$\forall t \in]0, \eta_3[, u(t) < 0. \text{ Ainsi } \forall t \in]0, \eta_3[, \tilde{p}_\alpha(A(t)) - \tilde{p}_\alpha(B(t)) \notin \int_{\mathbb{R}}^{\text{tr}}$$

$$\text{Par conséquent } \forall t \in]0, \eta_3[, B(t) < A(t) \text{ mais aussi par } \tilde{p}(B(t)) < \tilde{p}(A(t)).$$