PARTIE I Etude de l'ensemble E_n

⚠ Pour ne pas alourdir la rédaction si M appartient à $M_n(\mathbb{R})$ nous noterons $m_{i,j}$ son élément générique ... et même le plus souvent m_{ij}.

Q1) a) • E_n est une partie de $M_n(\mathbb{R})$

• la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$ appartient à E_n car pour $O_{M_n(\mathbb{R})}$ la somme des coefficients de chaque ligne vaut 0 de même que la somme des coefficients de chaque colonne.

• Soit $(M,N) \in E_n^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $Q = \lambda M + N$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ q_{ij} = \lambda m_{ij} + n_{ij}$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{k=1}^{n} q_{ik} = \lambda \sum_{k=1}^{n} m_{ik} + \sum_{k=1}^{n} n_{ik} = \lambda\,\omega(M) + \omega(N)$ et

$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{k=1}^{n} q_{kj} = \lambda \sum_{k=1}^{n} m_{kj} + \sum_{k=1}^{n} n_{kj} = \lambda\,\omega(M) + \omega(N)$.

Finalement $\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{k=1}^{n} q_{ik} = \sum_{k=1}^{n} q_{kj} = \lambda\,\omega(M) + \omega(N)$

Ainsi $Q = \lambda M + N$ appartient à E_n et $\omega(\lambda M + N) = \omega(Q) = \lambda\,\omega(M) + \omega(N)$.

Ceci achève de montrer que <u>E_n est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.</u>

ω est une application de E_n dans $\mathbb{R}$ et nous venons de voir que :
$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (M,N) \in E_n^2,\ \omega(\lambda M + N) = \lambda\,\omega(M) + \omega(N)$. Ainsi :

<u>ω est une forme linéaire sur E_n.</u>

b) Notons que U est non nul et posons $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ avec $\forall k \in [\![1,n]\!],\ u_k = 1$!

Soit M un élément de $M_n(\mathbb{R})$.

Posons $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = MU$ et $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = {}^tM\,U$.

$\forall i \in [\![1,n]\!],\ v_i = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} u_k = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}$ et $w_i = \sum_{k=1}^{n} m_{ki} u_k = \sum_{k=1}^{n} m_{ki}$.

$M\in E_n \Leftrightarrow \forall i\in[\![1,n]\!], \forall j\in[\![1,n]\!]\ \sum_{\ell=1}^{n} m_{i\ell}=\sum_{\ell=1}^{n} m_{\ell j}$.

$M\in E_n \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall i\in[\![1,n]\!]\ \sum_{\ell=1}^{n} m_{i\ell}=\lambda$ et $\forall j\in[\![1,n]\!],\ \sum_{\ell=1}^{n} m_{\ell j}=\lambda$.

$M\in E_n \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall i\in[\![1,n]\!],\ v_i=\lambda$ et $\forall j\in[\![1,n]\!],\ w_j=\lambda$.

$M\in E_n \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall i\in[\![1,n]\!],\ v_i=\lambda u_i$ et $\forall j\in[\![1,n]\!],\ w_j=\lambda u_j$.

$M\in E_n \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ V=\lambda U$ et $W=\lambda U$.

$M\in E_n \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ MU=\lambda U$ et ${}^tMU=\lambda U$. Rappelons que $U\neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $M\in E_n \Leftrightarrow U$ est un vecteur propre commun à M et ${}^tM$ associé à la même valeur propre.

<u>Si M est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M appartient à E_n si et seulement si U est un vecteur propre commun à M et ${}^tM$ associé à une même valeur propre.</u>

<u>Remarque</u>.- <u>Si $M\in E_n$, U est un vecteur propre de M et ${}^tM$ associé à la valeur propre $\omega(M)$.</u>

c) Soit $(M,N)\in E_n^2$. $MU=\omega(M)U$, ${}^tMU=\omega(M)U$, $NU=\omega(N)U$ et ${}^tNU=\omega(N)U$

Alors $MNU=M(\omega(N)U)=\omega(N)MU=\omega(N)\omega(M)U=\omega(M)\omega(N)U$.

${}^t(MN)U={}^tN\,{}^tMU={}^tN(\omega(M)U)=\omega(M)\,{}^tNU=\omega(M)\omega(N)U$.

Ainsi U est un vecteur propre commun à MN et ${}^t(MN)$ associé à la même valeur propre $\omega(M)\omega(N)$. Alors $MN\in E_n$ et $\omega(MN)=\omega(M)\omega(N)$.

↑ d'après la remarque précédente.

<u>$\forall M\in E_n, \forall N\in E_n,\ MN\in E_n$ et $\omega(MN)=\omega(M)\omega(N)$.</u>

<u>Exercice 1</u>.- Retrouver ce résultat en utilisant le produit matriciel.

<u>Exercice 2</u>.- Notez que $\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M\in E_n \Leftrightarrow MJ=JM$ et retrouver une partie du résultat précédent.

(Q2) a) • Notons que $J \in E_n$ car $JU = nU$ et ${}^tJU = JU = nU$; de plus $\omega(J) = n$.

Ainsi <u>la droite vectorielle engendrée par J est contenue dans E_n.</u>

• Soit $M \in \mathrm{Ker}\,\omega \cap \mathrm{Vect}(J)$.

$\exists \alpha \in \mathbb{R},\ M = \alpha J$. Alors $\omega(M) = 0$ et $\omega(M) = \alpha\, \omega(J) = \alpha n$. Ainsi $\alpha n = 0$ et α est alors nul. $M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Par conséquent <u>$\mathrm{Ker}\,\omega \cap \mathrm{Vect}(J) = \{0_{E_n}\}$.</u>

• $\mathrm{Ker}\,\omega + \mathrm{Vect}(J)$ est contenu dans E_n. Montrons l'inclusion inverse.

Soit $M \in E_n$. $\omega(J) = n$; $\omega\left(\frac{1}{n} J\right) = 1$; $\omega\left(\frac{\omega(M)}{n} J\right) = \omega(M)$.

Alors $\omega\left(M - \frac{\omega(M)}{n} J\right) = 0$. Posons $N = M - \frac{\omega(M)}{n} J$.

$N \in \mathrm{Ker}\,\omega$ et $M = N + \frac{\omega(M)}{n} J$ donc $M \in \mathrm{Ker}\,\omega + \mathrm{Vect}(J)$.

Finalement $E_n \subset \mathrm{Ker}\,\omega + \mathrm{Vect}\,J \subset E_n$; alors <u>$E_n = \mathrm{Ker}\,\omega + \mathrm{Vect}(J)$.</u>

Par conséquent : <u>le noyau de ω et la droite vectorielle engendrée par J sont supplémentaires dans E_n.</u> <u>Exercice</u>.. Retrouver ce résultat par analyse/synthèse.

b) • Soit $(r,s) \in [\![2,n]\!]^2$, notons pour simplifier (!?), a_{ij} l'élément générique de $A_{r,s}$ ... matrice que nous noterons aussi A_{rs} !

$\forall i \in [\![1,n]\!] - \{1,r\}$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$.

$\forall j \in [\![1,n]\!] - \{1,s\}$, $\sum_{k=1}^{n} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$.

$\sum_{k=1}^{n} a_{1k} = a_{11} + a_{1s} = 1 - 1 = 0$ et $\sum_{k=1}^{n} a_{rk} = a_{r1} + a_{rs} = -1 + 1 = 0$.

$\sum_{k=1}^{n} a_{k1} = a_{11} + a_{r1} = 1 - 1 = 0$ et $\sum_{k=1}^{n} a_{ks} = a_{1s} + a_{rs} = -1 + 1 = 0$.

Ainsi $A_{rs} \in E_n$ et $\omega(A_{rs}) = 0$.

Mais <u>$\forall (r,s) \in [\![2,n]\!]^2$, $A_{rs} \in \mathrm{Ker}\,\omega$.</u>

• Notons $(E_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.

Observons que $\forall (r,s)\in [\![2,n]\!]^2$, $A_{r,s} = E_{11}+E_{rs}-E_{1s}-E_{r1}$.

Soit alors $(\lambda_{ij})_{\substack{2\le i\le n\\ 2\le j\le n}}$ une famille de réels telle que $\sum_{r=2}^n\sum_{s=2}^n \lambda_{rs}A_{r,s} = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

(*)

Alors $0_{M_n(\mathbb{R})} = \left(\sum_{r=2}^n\sum_{s=2}^n \lambda_{rs}\right)E_{11} + \sum_{r=2}^n\sum_{s=2}^n \lambda_{rs}E_{rs} - \sum_{r=2}^n\sum_{s=2}^n\lambda_{rs}E_{1s} - \sum_{r=2}^n\sum_{s=2}^n \lambda_{rs}E_{r1}$.

Donc $0_{M_n(\mathbb{R})} = \left(\sum_{r=2}^n\sum_{s=2}^n\lambda_{rs}\right)E_{11} + \sum_{r=2}^n\sum_{s=2}^n \lambda_{rs}E_{rs} - \sum_{s=2}^n\left(\sum_{r=2}^n \lambda_{rs}\right)E_{1s} - \sum_{r=2}^n\left(\sum_{s=2}^n\lambda_{rs}\right)E_{r1}$.

La liberté de la famille $(E_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ donne les quatre "nullités" suivantes.

$\sum_{r=2}^n\sum_{s=2}^n\lambda_{rs}=0$, $\forall(r,s)\in[\![2,n]\!]^2, \lambda_{rs}=0$, $\forall s\in[\![2,n]\!], \sum_{r=2}^n\lambda_{rs}=0$ et $\forall r\in[\![2,n]\!], \sum_{s=2}^n \lambda_{rs}=0$

donc $\forall (r,s)\in[\![2,n]\!]^2, \lambda_{rs}=0$! Ceci achève de montrer que la famille $(A_{rs})_{\substack{2\le r\le n\\ 2\le s\le n}}$ est libre ... et nous donne quelques idées pour montrer qu'elle est génératrice.

• Montrons que tout élément de $\mathrm{Ker}\,\omega$ est combinaison linéaire des éléments de cette famille.

Soit $M=(m_{ij})\in \mathrm{Ker}\,\omega$. $M=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n m_{ij}E_{ij}$. Rappelons que $\boxed{\omega(M)=0}$.

(*) laisse à penser que $M=\sum_{r=2}^n\sum_{s=2}^n m_{rs}A_{rs}$, non ? c'est-à-dire que $N=\sum_{r=1}^n\sum_{s=1}^n m_{rs}E_{rs}$

Posons $N=\sum_{r=2}^n\sum_{s=2}^n m_{rs}A_{rs}$ et vérifions que $N=M$. Un développement analogue à celui fait "en *" donne :

$$N = \left(\sum_{r=2}^n\sum_{s=2}^n m_{rs}\right)E_{11} + \sum_{r=2}^n\sum_{s=2}^n m_{rs}E_{rs} - \sum_{s=2}^n\left(\sum_{r=2}^n m_{rs}\right)E_{1s} - \sum_{r=2}^n\left(\sum_{s=2}^n m_{rs}\right)E_{r1}.$$

$\sum_{r=2}^n\sum_{s=2}^n m_{rs} = \sum_{r=2}^n (\underbrace{\omega(M)}_{=0} - m_{r1}) = \sum_{r=2}^n(-m_{r1}) = -(\omega(M)-m_{11}) = m_{11}$ car $\omega(M)=0$

$\forall s\in[\![2,n]\!], \sum_{r=2}^n m_{rs} = \omega(M)-m_{1s} = -m_{1s}$ et $\forall r\in[\![2,n]\!], \sum_{s=2}^n m_{rs} = \omega(M)-m_{r1} = -m_{r1}$.

Alors $N = m_{11}E_{11} + \sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n} m_{rs}E_{rs} - \sum_{s=2}^{n}(-m_{1s})E_{1s} - \sum_{r=2}^{n}(-m_{r1})E_{r1}$.

donc $N = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} m_{rs}E_{rs}$; c'est à dire $N = M$.

Ainsi $\forall M = (m_{ij}) \in \mathrm{Ker}\,\omega$, $M = \sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n} m_{rs}A_{rs}$.

Tout élément de $\mathrm{Ker}\,\omega$ est combinaison linéaire des éléments de la famille $(A_{rs})_{\substack{2\leq r\leq n\\2\leq s\leq n}}$.

Finalement $(A_{rs})_{\substack{2\leq r\leq n\\2\leq s\leq n}}$ est une famille d'éléments de $\mathrm{Ker}\,\omega$ libre et génératrice.

$(A_{rs})_{\substack{2\leq r\leq n\\2\leq s\leq n}}$ est ainsi une base de $\mathrm{Ker}\,\omega$ de cardinal $(n-1)^2$.

Alors $\dim \mathrm{Ker}\,\omega = (n-1)^2$. Rappelons que $E_n = \mathrm{Ker}\,\omega \oplus \mathrm{Vect}(J)$.

Alors $\dim E_n = \dim \mathrm{Ker}\,\omega + \dim \mathrm{Vect}(J) = (n-1)^2+1$.
$J \neq 0_{M_n(\mathbb{K})}$! !

E_n est de dimension $(n-1)^2+1$.

(Q3) a) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Posons $P_\sigma = (p_{ij})$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=\sigma(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} p_{ik} = p_{i\sigma(i)} = 1$ et $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} p_{kj} = p_{\sigma^{-1}(j)j} = 1$.

Alors $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $P_\sigma \in E_n$ et $\omega(P_\sigma) = 1$.

- Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, P_σ est une matrice de E_n, vérifiant $\omega(P_\sigma)=1$. et n'admettant qu'un seul élément non nul par ligne et par colonne, non ?
- Réciproquement soit M une matrice de E_n, vérifiant $\omega(M)=1$ et n'admettant qu'un seul élément non nul par ligne et par colonne. Alors cet élément non nul par ligne et par colonne vaut 1 car $\omega(M)=1$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $\exists!\, c_i \in [\![1,n]\!]$, $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $m_{i\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq c_i \\ 1 & \text{si } \ell = c_i \end{cases}$.

la $i^{\text{ème}}$ ligne de M ne contient qu'un élément non nul qui vaut 1

Posons $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(i) = c_i$.

<u>σ est une application de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$</u>. Montrons que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

. Montrons que σ est injective. Soit $(i,i') \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $\sigma(i) = \sigma(i')$.

Alors $m_{ic_i} = 1 = m_{i'c_{i'}} = m_{i'c_i}$ car $c_i = \sigma(i) = \sigma(i') = c_{i'}$.

Si $i \neq i'$ alors la colonne n° c_i de M contient deux éléments non nuls !!

Ainsi $i = i'$ si $\sigma(i) = \sigma(i')$. <u>σ est injective</u>.

<u>Remarque</u> : cela suffit pour dire que σ est bijective car σ est une application de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ avec $\operatorname{card} [\![1,n]\!] = n < +\infty$.

Faisons semblant de ne pas avoir remarqué...

. Montrons que σ est surjective. Soit $j \in [\![1,n]\!]$. La $j^{\text{ème}}$ colonne de M contient un élément non nul et un seul. Alors $\exists!\, i \in [\![1,n]\!]$, $m_{ij} \neq 0$

i.e. $\exists!\, i \in [\![1,n]\!]$, $m_{ij} = 1$.

Or c_i est l'unique élément de $[\![1,n]\!]$ tel que $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $m_{i\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq c_i \\ 1 & \text{si } \ell = c_i \end{cases}$

Ainsi $c_i = j$ donc $\sigma(i) = j$.

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\exists i \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(i) = j$; <u>σ est surjective.</u>

Ceci achève de prouver que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Or $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $m_{i\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq c_i = \sigma(i) \\ 1 & \text{si } \ell = c_i = \sigma(i) \end{cases}$. Alors $M = P_\sigma$.

M est donc une matrice de permutation.

Ceci achève de montrer que : <u>les matrices P_σ sont les seules matrices M de E_n telles que $\omega(M_n) = 1$ n'admettant qu'un seul élément non nul par ligne et par colonne (qui vaut 1...)</u>.

b) $P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. $P_\sigma = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & I_{n-1} \\ 0 & \\ \hline 1 & 0 \cdots 0 \end{array}\right)$

Avant de préciser notons un lemme.

▲ Lemme.. Soient τ et τ' deux éléments de $\mathfrak{S}_n$. $P_\tau P_{\tau'} = P_{\tau' \circ \tau}$.

Soient τ et τ' deux éléments de $\mathfrak{S}_n$. Posons $P_\tau = (p_{ij})$, $P_{\tau'} = (q_{ij})$ et

$P_\tau P_{\tau'} = (r_{ij})$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $r_{ij} = \sum_{l=1}^{n} p_{il} q_{lj} = p_{i\tau(i)} q_{\tau(i)j} = q_{\tau(i)j} = \begin{cases} 1 \text{ si } \tau'(\tau(i)) = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $r_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } (\tau' \circ \tau)(i) = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

$\tau' \circ \tau$ appartient à $\mathfrak{S}_n$ car τ' et τ sont deux éléments de $\mathfrak{S}_n$.

Ainsi $P_\tau P_{\tau'} = P_{\tau' \circ \tau}$ ▼

<u>Remarque</u>.. Par récurrence on a aussi :

$\forall r \in \mathbb{N}^*$, $\forall (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r) \in \mathfrak{S}_n^{\,r}$, $P_{\tau_1} P_{\tau_2} \cdots P_{\tau_r} = P_{\tau_r \circ \tau_{r-1} \circ \dots \circ \tau_1}$;

$\forall r \in \mathbb{N}$, $\forall \tau \in \mathfrak{S}_n$, $(P_\tau)^r = P_{\tau^r}$.

Ce qui précède donne alors $\forall r \in [\![1,n]\!]$, $P_\sigma^r = P_{\sigma^r}$.

$\forall l \in [\![1,n-1]\!]$, $\sigma(l) = l+1$ et $\sigma(n) = 1$.

Alors $\forall k \in [\![1,n-2]\!]$, $\sigma^2(k) = \sigma(k+1) = k+2$, $\sigma^2(n-1) = \sigma(n) = 1$ et $\sigma^2(n) = \sigma(1) = 2$

Donc $\forall k \in [\![1,n-2]\!]$, $\sigma^2(k) = k+2$ et $\forall k \in [\![n-1,n]\!]$, $\sigma^2(k) = k-n+2$.

Une récurrence relativement simple fournit, à quelques abus près,

<u>$\forall r \in [\![1,n]\!]$, $\forall k \in [\![1,n-r]\!]$, $\sigma^r(k) = k+r$ et $\forall k \in [\![n-r+1,n]\!]$, $\sigma^r(k) = k-n+r$.</u>

Ce que nous pouvons encore écrire sous alors :

$$\forall r\in [\![1,n]\!],\ \forall k\in [\![1,n]\!],\ \sigma^r(k)=\begin{cases} k+r & \text{si } k+r\leq n \\ k-n+r & \text{si } k+r>n\end{cases}.$$

Ainsi $\forall r\in [\![1,n-1]\!]$, $P_\sigma^r=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} O_{n-r,r} & I_{n-r} \\ \hline I_r & O_{r,n-r}\end{array}\right) & \begin{array}{c} n-r \\ r \end{array}\end{array}$ et $P_\sigma^n=I_n$.

c) On considère encore la permutation σ précédente.

Posons $\forall r\in [\![1,n]\!]$, $P_\sigma^r=P_{\sigma^r}=(p_{ij}(r))$.

Notons que $\sum_{r=1}^{n} P_\sigma^r=J$ c'est à dire que $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $\sum_{r=1}^{n} p_{ij}(r)=1$.

Soit $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$. $\forall r\in [\![1,n]\!]$, $p_{ij}(r)=\begin{cases} 1 \text{ si } \sigma^r(i)=j \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

$\forall r\in [\![1,n]\!]$, $p_{ij}(r)=\begin{cases} 1 & \text{si } i+r\leq n \text{ et } j=i+r \\ 1 & \text{si } i+r>n \text{ et } j=i-n+r \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}=\begin{cases} 1 \text{ si } r=j-i \text{ et } j\leq n \\ 1 \text{ si } r=j-i+n \text{ et } j>0 \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

Donc $\forall r\in [\![1,n]\!]$, $p_{ij}(r)=\begin{cases} 1 \text{ si } r=j-i \\ 1 \text{ si } r=n-(j-i) \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

Notons que i et j étant fixé $\exists!\, r\in [\![1,n]\!]$ tel que $r=j-i$ ou $r=j-i+n$

car si $j-i>0$: $j-i\in [\![1,n]\!]$ et $j-i+n\notin [\![1,n]\!]$ et si $j-i\leq 0$: $\begin{cases} j-i\notin [\![1,n]\!] \\ j-i+n\in [\![1,n]\!]\end{cases}$

Alors tous les éléments du r-uplet $(p_{ij}(1),p_{ij}(2),\dots,p_{ij}(r))$ sont nuls sauf 1 qui vaut 1. Alors $\sum_{r=1}^{n} p_{ij}(r)=1$

Par conséquent $\underline{J=\sum_{r=1}^{n} P_\sigma^r}$. J est combinaison linéaire de matrices de permutations. J est même somme de matrices de permutations.

R. (*) On peut prendre $\forall \ell \in [\![1,n]\!]-\{1,r,s\}$, $\varphi(\ell)=\ell$ et $\varphi(s)=r$. | Alors σ_1 est la transposition qui échange r et s. σ_2 est le cycle " $(1,s,r)$ "*

Soit $(r,s)\in[\![1,n]\!]^2$. $[\![1,n]\!]-\{1,r\}$ et $[\![1,n]\!]-\{1,s\}$ sont équipotents car de cardinal $n-2$. (*) Il existe donc une bijection φ de $[\![1,n]\!]-\{1,r\}$ sur $[\![1,n]\!]-\{1,s\}$.

Posons $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\sigma_1(k)=\begin{cases}1 & \text{si } k=1\\ s & \text{si } k=r\\ \varphi(k) & \text{sinon}\end{cases}$ et $\sigma_2(k)=\begin{cases}s & \text{si } k=1\\ 1 & \text{si } k=r\\ \varphi(k) & \text{sinon}\end{cases}$

σ_1 et σ_2 sont clairement des bijections de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ donc des permutations de $[\![1,n]\!]$.

Montrons que $A_{rs}=P_{\sigma_1}-P_{\sigma_2}$. Posons $A_{rs}=(a_{ij})$, $P_{\sigma_1}=(p_{ij})$ et $P_{\sigma_2}=(q_{ij})$.

$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\quad p_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j=1\\ 1 & i=r \text{ et } j=s\\ 1 & \text{si } i\neq 1, i\neq r, j=\varphi(i)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\quad \text{et } q_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } i=1 \text{ et } j=s\\ 1 & \text{si } i=r \text{ et } j=1\\ 1 & \text{si } i\neq 1, i\neq r \text{ et } j=\varphi(i)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\quad p_{ij}-q_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j=1\\ -1 & \text{si } i=1 \text{ et } j=s\\ 1 & \text{si } i=r \text{ et } j=s\\ -1 & \text{si } i=r \text{ et } j=1\\ \varphi(i)-\varphi(i) & \text{si } i\neq 1, i\neq r \text{ et } j=\varphi(i)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$\text{Donc } \forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\quad p_{ij}-q_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } (i,j)=(1,1) \text{ ou } (r,s)\\ -1 & \text{si } (i,j)=(1,s) \text{ ou } (r,1)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Donc $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $p_{ij}-q_{ij}=a_{ij}$.

Ainsi $A_{rs}=P_{\sigma_1}-P_{\sigma_2}$

Pour tout $(r,s)\in[\![2,n]\!]^2$, A_{rs} est combinaison linéaire de matrices de permutations. Illustrons !

$$A_{22}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & & 0 & 0\end{pmatrix}=I_n-\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 0 & & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & & 0 & 1\end{pmatrix}=P_{\sigma_1}-P_{\sigma_2}\ \text{avec}$$

$\sigma_1=\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$ et $\forall \ell\in[\![1,n]\!]$, $\sigma_2(\ell)=\begin{cases}2 & \text{si } \ell=1\\ 1 & \text{si } \ell=2\\ \ell & \text{sinon}\end{cases}$

$$\begin{array}{cccc} & & \downarrow P_{\sigma_2} & \downarrow P_{\sigma_2} \end{array}$$

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & - & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & - & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & - & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) J est combinaison linéaire de matrices de permutations donc tout élément de $\mathrm{Vect}(J)$ aussi.

Pour tout $(r,s) \in [\![2,n]\!]^2$, A_{rs} est combinaison linéaire de matrices de permutations donc tout élément de $\mathrm{Ker}\,\omega$ aussi car $(A_{rs})_{2 \leq r \leq n,\, 2 \leq s \leq n}$ est une base de $\mathrm{Ker}\,\omega$.

Or tout élément de E_n est somme d'un élément de $\mathrm{Ker}\,\omega$ et de $\mathrm{vect}(J)$ donc tout élément de E_n est combinaison linéaire de matrices de permutations.

Rappelons que les matrices de permutations sont des éléments de E_n.

Ainsi $(P_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$ est une famille génératrice de E_n contenant n^2 éléments. E_n étant de dimension $(n-1)^2+1$ on peut en extraire une base qui contiendra nécessairement $(n-1)^2+1$ éléments.

Il existe donc $(n-1)^2+1$ permutations $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{(n-1)^2+1}$ de $[\![1,n]\!]$ telles que $(P_{\sigma_1}, P_{\sigma_2}, \dots, P_{\sigma_{(n-1)^2+1}})$ soit une base de E_n.

Soit $M \in E_n$. $\exists (\delta_1, \dots, \delta_{(n-1)^2+1}) \in \mathbb{R}^{(n-1)^2+1}$, $M = \sum_{i=1}^{(n-1)^2+1} \delta_i P_{\sigma_i}$.

Alors $\omega(M) = \sum_{i=1}^{(n-1)^2+1} \delta_i\, \omega(P_{\sigma_i}) = \sum_{i=1}^{(n-1)^2+1} \delta_i$

La somme des composantes d'une matrice M de E_n relativement à cette base est $\omega(M)$.

PARTIE II : Etude de l'ensemble E_n^+

Q1 Soit $M=(m_{ij})$ et $N=(n_{ij})$ deux éléments de E_n^+.

$M\in E_n$ et $N\in E_n$ donc $MN\in E_n$.

De plus $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij}\geqslant 0$ et $n_{ij}\geqslant 0$.

Ainsi $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $\sum_{k=1}^{n} m_{ik}n_{kj}\geqslant 0$; les coefficients de MN sont positifs ou nuls. Alors $MN\in E_n^+$

E_n^+ est stable pour le produit matriciel.

Soit $p\in [\![1,n]\!]$, $(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_p)\in \mathfrak{S}_n^p$ et $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p)\in \mathbb{R}_+^p$.

$\forall i\in [\![1,p]\!]$, $P_{\sigma_i}\in E_n$ donc $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i P_{\sigma_i}\in E_n$ car E_n est un espace vectoriel.

Pour tout $i\in [\![1,p]\!]$ les coefficients de P_{σ_i} sont positifs ou nuls.

Alors pour tout $i\in [\![1,p]\!]$ les coefficients de $\alpha_i P_{\sigma_i}$ sont positifs ou nuls.

Il en est alors de même pour $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i P_{\sigma_i}$. Par conséquent $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i P_{\sigma_i}\in E_n^+$.

$\forall p\in [\![1,n]\!]$, $\forall (\sigma_1,\dots,\sigma_p)\in \mathfrak{S}_n^p$, $\forall (\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in\mathbb{R}_+^p$, $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i P_{\sigma_i}\in E_n^+$.

Q2 a) Soit $M\in E_n^+\setminus\{0\}$. Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ tel que $m_{1\sigma(1)}\cdots m_{n\sigma(n)}>0$

Posons $c=\min\{m_{1\sigma(1)},\dots,m_{n\sigma(n)}\}$ et $Q=M-cP_\sigma=(q_{ij})$.

$M\in E_n$, $c\in\mathbb{R}$ et $P_\sigma\in E_n$ donc $Q=M-cP_\sigma\in E_n$. Montrons que $Q\in E_n^+$.

$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $q_{ij}=\begin{cases} m_{ij}-c & \text{si } \sigma(i)=j\\ m_{ij} & \text{sinon}\end{cases}$

Soit $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$. Si $\sigma(i)=j$: $q_{ij}=m_{i\sigma(i)}-c=m_{i\sigma(i)}-\min(m_{1\sigma(1)},\dots,m_{n\sigma(n)})\geqslant 0$

Si $\sigma(i)\neq j$: $q_{ij}=m_{ij}\geqslant 0$ car $M\in E_n^+$

Ainsi $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $q_{ij}\geqslant 0$. Ceci achève de montrer que $Q=M-cP_\sigma\in E_n^+$

$M-cP_\sigma\in E_n^+$.

▼ Remarque.- Supposons que la matrice M possède exactement z_M coefficients nuls. Rappelons que $m_{1\sigma(1)}, m_{2\sigma(2)}, \dots, m_{n\sigma(n)}$ ne sont pas nuls et que $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $q_{ij} = \begin{cases} m_{ij}-c & \text{si } j=\sigma(i) \\ m_{ij} & \text{si } j\neq\sigma(i)\end{cases}$

$z_M = \mathrm{card}\{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \mid m_{ij}=0\} = \mathrm{card}\{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2 \mid m_{ij}=0 \text{ et } j\neq\sigma(i)\}$

$z_M = \mathrm{card}\{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \mid q_{ij}=0 \text{ et } j\neq \sigma(i)\}$

Notons z_Q le nombre de zéros de Q.

$z_Q = \mathrm{card}\{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \mid q_{ij}=0 \text{ et } j\neq\sigma(i)\} + \mathrm{card}\{i\in[\![1,n]\!] \mid q_{i\sigma(i)}=0\}$.

Alors $z_Q = z_M + \mathrm{card}\{i\in[\![1,n]\!],\ q_{i\sigma(i)}=0\}$.

$c = \min\{m_{1\sigma(1)},\dots,m_{n\sigma(n)}\}$ donc $\exists i_0\in[\![1,n]\!]$, $c = m_{i_0\sigma(i_0)}$; ainsi

$\exists i_0 \in [\![1,n]\!]$, $q_{i_0\sigma(i_0)} = m_{i_0\sigma(i_0)} - c = 0$.

Alors $\mathrm{card}\{i\in[\![1,n]\!] \mid q_{i\sigma(i)}=0\} \geq 1$.

Le nombre de zéros de Q est strictement supérieur au nombre de zéros de M.

Notons également que $c = \min\{m_{1\sigma(1)}, m_{2\sigma(2)},\dots, m_{n\sigma(n)}\} > 0$. ▲

Objet c)

⚠ Marquons un temps d'arrêt pour dénoncer par avance que le résultat de c) est faux dans la mesure où la décomposition n'est pas unique. En fractionnant un des α_k on peut rendre le p aussi grand que l'on souhaite, non ! Il convient donc de modifier le texte.

Dans une étape E1 nous allons montrer qu'une matrice de E_n^+ possédant au moins n^2-n+1 termes nuls est nulle.

Nous montrerons dans une étape E2 qu'il existe p dans $[\![1, n^2-n+1]\!]$, il existe p permutations $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_p$ de $[\![1,n]\!]$ et p réels strictement positifs $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p$ tels que $M=\sum_{k=1}^{p} \alpha_k P_{\sigma_k}$ lorsque $M\in E_n^+-\{0\}$.

E1 Soit $M \in E_n^+$. Supposons que M possède au moins n^2-n+1 termes nuls et montrons que M est nulle.

M possède alors au plus $n-1$ termes non nuls. Ainsi l'une des lignes de M ne contient que des 0. Ceci donne alors $\omega(M)=0$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} m_{ik}=0$ et $\forall (i,k)\in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ik} \geq 0$.

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $m_{ik}=0$. M est nulle.

<u>Une matrice de E_n^+ possédant au moins n^2-n+1 termes non nul est nulle.</u>

Soit $M \in E_n^+ - \{0\}$.

E2 Montrons que $\exists p \in [\![1, n^2-n+1]\!]$, $\exists (\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_p) \in \mathfrak{S}_n^p$, $\exists (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$,

$M = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k P_{\sigma_k}$. $(*)$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que le résultat précédent ne soit pas vrai. Montrons alors par récurrence que :

$\forall j \in [\![1, n^2-n+1]\!]$, $\exists (\sigma_1,\ldots,\sigma_j) \in \mathfrak{S}_n^j$, $\exists (\alpha_1,\ldots,\alpha_j) \in (\mathbb{R}_+^*)^j$ tq

$Q_j = M - \sum_{k=1}^{j} \alpha_k P_{\sigma_k} \in E_n^+ - \{0\}$ et $z_{Q_j} \geq z_M + j$ (z_{Q_j} étant le nombre de zéros de Q_j et z_M celui de M).

- D'après <u>a)</u> la propriété est clairement vraie pour $j=1$ car nous avons trouvé $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $Q = M - cP_\sigma \in E_n^+$ et $z_Q > z_M$ (ou $z_Q \geq z_M+1$). L'hypothèse faite montre que $Q \neq 0$. Donc $Q \in E_n^+ - \{0\}$.

- Supposons la propriété vraie pour $j \in [\![1, n^2-n]\!]$ et montrons la pour $j+1$. Par hypothèse on peut trouver j permutations $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_j$ de $[\![1,n]\!]$ et j réels strictement positifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j$ tels que :

$Q_j = M - \sum_{k=1}^{j} \alpha_k P_{\sigma_k} \in E_n^+ - \{0\}$ et $z_{Q_j} \geq z_M + j$.

$Q_j \in E_n^+ - \{0\}$. Nous pouvons donc lui appliquer Q(a).

On peut donc trouver une permutation σ_{j+1} de $[\![1,n]\!]$ et un réel strictement positif α_{j+1} tel que $Q_j - \alpha_{j+1} P_{\sigma_{j+1}} \in E_n^+$.

Posons $Q_{j+1} = Q_j - \alpha_{j+1} P_{\sigma_{j+1}}$. Alors $Q_{j+1} = M - \sum_{\ell=1}^{j+1} \alpha_\ell P_{\sigma_\ell}$ et $z_{Q_{j+1}} \geq z_{Q_j} + 1$

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{j+1}$ sont des permutations de $[\![1,n]\!]$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j+1}$ sont des réels strictement positifs, $Q_{j+1} = M - \sum_{\ell=1}^{j+1} \alpha_\ell P_{\sigma_\ell}$, $Q_{j+1} \in E_n^+$, $z_{Q_{j+1}} \geq z_{Q_j} + 1 \geq z_M + j + 1$.

Il reste plus qu'à montrer que Q_{j+1} n'est pas nulle pour achever la récurrence. Supposons le contraire.

Alors $M = \sum_{\ell=1}^{j+1} \alpha_\ell P_{\sigma_\ell}$ avec $j+1 \leq n^2 - n + 1$. Cela contredit le fait que nous avons supposé que (*) est faux ; donc $Q_{j+1} \neq 0$ et la récurrence est terminée.

Appliquons alors la propriété pour $j = n^2 - n + 1$. Pour simplifier posons $s = n^2 - n + 1$. Alors on peut trouver s permutations de $[\![1,n]\!]$, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s$ et s réels strictement positifs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ tels que $Q_s = M - \sum_{\ell=1}^{s} \alpha_\ell P_{\sigma_\ell} \in E_n^+ - \{0\}$ et

$z_{Q_s} \geq z_M + s = z_M + n^2 - n + 1 \geq n^2 - n + 1$.

Ainsi $Q_s \in E_n^+ - \{0\}$ et Q_s admet au moins $n^2 - n + 1$ zéros ce qui contredit le résultat de E1. Nous arrivons ainsi à une contradiction.

Alors (*) est vrai.

Pour toute matrice M de $E_n^+ - \{0\}$ on peut trouver $p \in [\![1, n^2-n+1]\!]$, p permutations $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ de $[\![1,n]\!]$ et p réels strictement positifs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ tels que $M = \sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell P_{\sigma_\ell}$.

<u>Remarque</u>.. Q(a) fournit un algorithme pour trouver une telle décomposition.

d) Utilisons l'algorithme précédent.

Soit σ_1 la permutation identique de $[\![1,3]\!]$.

$m_{1\sigma_1(1)}\, m_{2\sigma_1(2)}\, m_{3\sigma_1(3)} > 0$.

Posons $c = \min\{m_{1\sigma_1(1)}, m_{2\sigma_1(2)}, m_{3\sigma_1(3)}\} = \min\{3,1,2\} = 1$.

Posons $Q = M - c P_{\sigma_1}$. $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. $Q \in E_3^+ - \{0\}$

Considérons la permutation σ_2 de $[\![1,3]\!]$ définie par $\sigma_2(1) = 1$, $\sigma_2(2) = 3$ et $\sigma_2(3) = 2$

$q_{1\sigma_2(1)} = 2$, $q_{2\sigma_2(2)} = 2$, $q_{3\sigma_2(3)} = 4$. $2 \times 2 \times 4 > 0$.

Posons $d = \min\{2,2,4\}$. $d = 2$.

Posons $R = Q - d P_{\sigma_2}$. $R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. $R \in E_3^+ - \{0\}$

Considérons la permutation σ_3 de $[\![1,3]\!]$ définie par $\sigma_3(1) = 3$, $\sigma_3(2) = 1$, $\sigma_3(3) = 2$

$r_{1\sigma_3(1)} = 2$ $r_{2\sigma_3(2)} = 3$ $r_{3\sigma_3(3)} = 2$. Posons $e = \min(2,3,2)$; $e = 2$.

Posons $S = R - e P_{\sigma_3}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$S = P_{\sigma_4}$ avec σ_4 permutation de $[\![1,3]\!]$ définie par $\sigma_3(1) = 2$, $\sigma_3(2) = 1$ et $\sigma_4(3) = 3$.

Finalement $M = P_{\sigma_1} + 2P_{\sigma_2} + 2P_{\sigma_3} + P_{\sigma_4}$ ou

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec

$\sigma_1(1) = 1$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma_1(3) = 3$, $\sigma_2(1) = 1$, $\sigma_2(2) = 3$, $\sigma_2(3) = 2$, $\sigma_3(1) = 3$, $\sigma_3(2) = 1$, $\sigma_3(3) = 2$

$\sigma_4(1) = 2$, $\sigma_4(2) = 1$, $\sigma_4(3) = 3$.

(Q3) Observons d'abord que comme $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ sont deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$: $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle u_k = \sum_{k=1}^{n} \langle x, v_k \rangle v_k$.

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, v_k \rangle^2$. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle \langle y, u_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, v_k \rangle \langle y, v_k \rangle$

a) Pour simplifier posons $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} = (\langle u_i, v_j \rangle)^2$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} m_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \langle v_i, u_k \rangle^2 = \|v_i\|^2 = 1$.

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} m_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \langle v_k, u_j \rangle^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle u_j, v_k \rangle^2 = \|u_j\|^2 = 1$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\sum_{k=1}^{n} m_{ik} = \sum_{k=1}^{n} m_{kj} = 1$. Ainsi $\Pi_{u,v} \in \mathcal{E}_n$ et $\omega(\Pi_{u,v}) = 1$

De plus $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} = \langle v_j, u_j \rangle^2 \geqslant 0$.

Ainsi $\Pi_{u,v} \in \mathcal{E}_n^+$ et $\omega(\Pi_{u,v}) = 1$. ⚠ oubli...

b) Posons $\Pi_{u,v}\Lambda = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $t_i = \sum_{j=1}^{n} \langle v_i, u_j \rangle^2 \lambda_j$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $v_i = \sum_{j=1}^{n} \langle v_i, u_j \rangle u_j$ donc $\Delta(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \langle v_i, u_j \rangle \Delta(u_j)$;

ainsi $\Delta(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \langle v_i, u_j \rangle \lambda_j u_j$.

Alors $\langle v_i, \Delta(v_i) \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle v_i, u_j \rangle \langle v_i, u_j \rangle \lambda_j = \sum_{j=1}^{n} \langle v_i, u_j \rangle^2 \lambda_j = t_i$.

Finalement $\begin{pmatrix} \langle \Delta(v_1), v_1 \rangle \\ \langle \Delta(v_2), v_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \Delta(v_n), v_n \rangle \end{pmatrix} = \Pi_{u,v}\Lambda$.

⚠ oubli

Supposons $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $(v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(n)})$.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle v_i, u_j \rangle^2 = \langle u_{\sigma(i)}, u_j \rangle^2 = \begin{cases} 1 \text{ si } \sigma(i) = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Ainsi $\Pi_{u,v} = P_\sigma$.

---

c) $M_{vv} \in E_n^+$ et $M_{uv} \neq 0$ car $\omega(M_{vv}) = 1$!

Alors $M_{vv} \in E_n^+ - \{0\}$. Soit f une forme linéaire sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ainsi $M_{vv} = \sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell P_{\sigma_\ell}$ avec $p \in [\![1, n^2-n+1]\!]$ $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_\ell \in \mathbb{R}_+^*$ et $\sigma_\ell \in \mathfrak{S}_n$.

$M_{uv}\Lambda = \sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell P_{\sigma_\ell}\Lambda$; $f(M_{uv}\Lambda) = \sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell f(P_{\sigma_\ell}\Lambda)$.

Notons que $\omega(M_{uv}) = 1$ donc $1 = \omega\left(\sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell P_{\sigma_\ell}\right) = \sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell \omega(P_{\sigma_\ell}) = \sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell$.

Ainsi $\sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell = 1$.

$\exists \sigma' \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$, $f(P_{\sigma'}\Lambda) = \max\{f(P_{\sigma_1}\Lambda), f(P_{\sigma_2}\Lambda), \dots, f(P_{\sigma_p}\Lambda)\}$

$\exists \sigma \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$, $f(P_\sigma\Lambda) = \min\{f(P_{\sigma_1}\Lambda), f(P_{\sigma_2}\Lambda), \dots, f(P_{\sigma_p}\Lambda)\}$

Rappelons que $\forall \ell \in [\![1,p]\!]$ $\alpha_\ell > 0$.

Alors $f(P_\sigma\Lambda) = \sum_{\ell=1}^{p} (\alpha_\ell f(P_\sigma\Lambda)) \leq \sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell f(P_{\sigma_\ell}\Lambda) = f(M_{uv}\Lambda)$ et

$$f(P_{\sigma'}\Lambda) = \sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell f(P_{\sigma'}\Lambda) \geq \sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell f(P_{\sigma_\ell}\Lambda) = f(M_{uv}\Lambda)$$

Ainsi $\forall f \in \mathcal{L}(M_{n,1}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$, $\exists (\sigma, \sigma') \in \mathfrak{S}_n^2$, $f(P_\sigma\Lambda) \leq f(M_{uv}\Lambda) \leq f(P_{\sigma'}\Lambda)$.

---

d) Pour $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $f(x) = \sum_{\ell=1}^{r} x_\ell$. f est clairement une forme linéaire sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

et $f(M_{uv}\Lambda) = \sum_{\ell=1}^{r} \langle A(v_\ell), v_\ell \rangle$. Alors il existe deux permutations σ et σ'

de $[\![1,n]\!]$ telles que : $f(P_\sigma\Lambda) \leq f(M_{uv}\Lambda) \leq f(P_{\sigma'}\Lambda)$

$f(P_\sigma\Lambda) = \sum_{\ell=1}^{r} \lambda_{\sigma(\ell)}$ et $f(P_{\sigma'}\Lambda) = \sum_{\ell=1}^{r} \lambda_{\sigma'(\ell)}$ (calcul simple).

Rappelons que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Alors $\sum_{\ell=1}^{r} \lambda_{\sigma(\ell)} \geq \sum_{\ell=1}^{r} \lambda_\ell$ et

$\sum_{\ell=1}^{r} \lambda_{\sigma'(\ell)} \leq \lambda_n + \lambda_{n-1} + \cdots + \lambda_{n-r+1} = \sum_{\ell=1}^{r} \lambda_{n-r+\ell}$ car la somme de r éléments quelconques de la suite $(\lambda_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est plus petite que la somme des éléments de la suite $(\lambda_k)_{k\in[\![n-r+1,n]\!]}$ et plus grande que la somme des éléments de la suite $(\lambda_k)_{k\in[\![1,r]\!]}$ $(\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n)$.

$$\forall r\in[\![1,n]\!],\quad \sum_{k=1}^{r}\lambda_k\leq\sum_{k=1}^{r}\langle s(v_k),v_k\rangle\leq\sum_{k=1}^{r}\lambda_{n-r+k}=\sum_{k=n-r+1}^{n}\lambda_k$$

$\forall k\in[\![1,n]\!]$, $s(v_j)=\sum_{i=1}^{n}\langle s(v_j),v_i\rangle v_i$ car $(v_1,v_2,\dots,v_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. La matrice de s dans la base $(v_1,v_2,\dots,v_n)$ est $(\langle s(v_j),v_i\rangle)$

Alors pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\langle s(v_k),v_k\rangle$ est le $k^{\text{ième}}$ élément de la diagonale de la matrice de s dans la base $(v_1,v_2,\dots,v_n)$.

donc la somme des r premiers éléments de la diagonale de la matrice de s dans la base $(v_1,v_2,\dots,v_n)$ est plus petite que $\sum_{k=n-r+1}^{n}\lambda_k$ et plus grande que $\sum_{k=1}^{r}\lambda_k$ et ceci pour tout $r\in[\![1,n]\!]$.

<u>Remarque</u>.. Soit $A=(a_{ij})$ une matrice symétrique. Il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP=\mathrm{Diag}(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)$ avec $\sigma_1\leq\sigma_2\leq\cdots\leq\sigma_n$.
(*) le résultat précédent permet de dire que : $\forall k\in[\![1,r]\!]$, $\sum_{k=1}^{r}\sigma_k\leq\sum_{k=1}^{r}a_{k,k}\leq\sum_{k=n-r+1}^{n}\sigma_k$.

très grossièrement nous pouvons dire que si $r\in[\![1,n]\!]$, la somme des r premiers éléments diagonaux de A est plus petit que la somme des r plus grandes valeurs propres de A et plus grande que la somme des r plus petites valeurs propres de A... en considérant que A admet n valeurs propres (pas nécessairement distinctes).

<u>Remarque</u>.. Pour montrer (*) il suffit de considérer un endomorphisme s de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ qui est orthonormale ...

PARTIE III

Q1 Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Posons $P_\sigma = (p_{ij})$ et $P_{\sigma^{-1}} = (q_{ij})$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$P_\sigma M = \left(\sum_{\ell=1}^{n} p_{i\ell} m_{\ell j}\right) = (m_{\sigma(i)j})$ et $M P_{\sigma^{-1}} = \left(\sum_{\ell=1}^{n} m_{i\ell} q_{\ell j}\right) = (m_{i\sigma(j)})$.

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ P_\sigma M = (m_{\sigma(i)j})$ et $M P_{\sigma^{-1}} = (m_{i\sigma(j)})$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$P_\sigma M$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ la $i^{\text{ème}}$ ligne de $P_\sigma M$ est la $\sigma(i)^{\text{ème}}$ ligne de M. On passe de M à $P_\sigma M$ en faisant opérer σ sur les lignes de M.

On.

$M P_{\sigma^{-1}}$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de $M P_\sigma$ est la $\sigma(j)^{\text{ème}}$ colonne de M. On passe de M à $M P_\sigma$ en faisant opérer σ sur les colonnes de M.

Q2 Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui contient une matrice nulle du type (p,q). En supprimant $n-p$ lignes d'indices $l_1, l_2, \dots, l_{n-p}$ et $n-q$ colonnes d'indices $c_1, c_2, \dots, c_{n-q}$ on obtient la matrice nulle.

Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \notin \{l_1, l_2, \dots, l_{n-p}\}$ et $j \notin \{c_1, c_2, \dots, c_{n-q}\}$ on a $m_{ij} = 0$. Posons $I = [\![1,n]\!] - \{l_1, l_2, \dots, l_{n-p}\}$ et

$J = [\![1,n]\!] - \{c_1, c_2, \dots, c_{n-q}\}$. $\operatorname{card} I = p$ et $\operatorname{card} J = q$.

$I = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ avec $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ et $J = \{j_1, j_2, \dots, j_q\}$ avec $j_1 < j_2 < \dots < j_q$

Notons que si $(i,j) \in I \times J$ $m_{ij} = 0$.

Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$ telle que $\forall k \in [\![1,p]\!], \sigma(k) = i_k$.

Soit $\hat\sigma$ une permutation de $[\![1,n]\!]$ telle que $\forall k \in [\![n-q+1,n]\!], \hat\sigma(k) = j_k$.

Posons $T = P_\sigma M P_{\sigma'}$ avec $\sigma' = \hat\sigma^{-1}$. $T = (t_{ij})$

Montrons alors que $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![n-q+1,n]\!]$, $t_{ij} = 0$.

Posons $P_\sigma = (p_{ij})$ et $P_{\sigma'} = (q_{ij})$

Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![n-q+1,n]\!]$. $\sigma' = \hat{\sigma}^{-1}$ donc $\sigma'^{-1} = \hat{\sigma}$.

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\left(p_{ik} \sum_{\ell=1}^{n} m_{k\ell}\, q_{\ell j}\right) = \sum_{\ell=1}^{n} m_{\sigma(i)\ell}\, q_{\ell j} = m_{\sigma(i)\sigma'^{-1}(j)} = m_{\sigma(i)\hat{\sigma}(j)}.$$

Or $\sigma(i) \in \{i_1,\dots,i_p\} = I$ et $\sigma'(j) \in \{j_1, j_2,\dots,j_q\} = J$ donc $m_{\sigma(i)\hat{\sigma}(j)} = 0$.

On a bien $t_{ij} = 0$ si $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![n-q+1,n]\!]$.

Posons alors $X = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1\,n-q} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{p1} & \cdots & t_{p\,n-q} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} t_{p+1,n-q+1} & \cdots & t_{p+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n,n-q+1} & \cdots & t_{n,n} \end{pmatrix}$

et $Z = \begin{pmatrix} t_{p+1,1} & \cdots & t_{p+1,n-q} \\ \vdots & & \\ t_{n,1} & \cdots & t_{n,n-q} \end{pmatrix}$.

Alors $P_\sigma M P_{\sigma'} = \left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline Z & Y \end{array}\right)$ avec $X \in M_{p,n-q}(\mathbb{R})$, $Y \in M_{n-p,q}(\mathbb{R})$ et $Z \in M_{n-p,n-q}(\mathbb{R})$.

Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ et si M contient une sous-matrice nulle du type (p,q) alors il existe deux permutations de $[\![1,n]\!]$ telles que $P_\sigma M P_{\sigma'} = \left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline Z & Y \end{array}\right)$ avec $X \in M_{p,n-q}(\mathbb{R})$, $Y \in M_{n-p,q}(\mathbb{R})$ et $Z \in M_{n-p,n-q}(\mathbb{R})$.

<u>b)</u> Reprenons les notations du <u>a)</u> et supposons que $M \in E_n^+ - \{0\}$.

Alors $T = P_\sigma M P_{\sigma'} \in E_n^+ - \{0\}$. La somme des coefficients de T est $n\,\omega(T)$.

Notons α, β, δ la somme des coefficients de X, Y et Z. $\alpha+\beta+\delta = n\,\omega(T)$

$\alpha+\delta = (n-q)\,\omega(T)$ (somme des coeff des $n-q$ premières colonnes de T).

$\beta+\delta = (n-p)\,\omega(T)$ (somme des coeff des $n-p$ dernières lignes de T).

Alors $((n-q)+(n-p))\,\omega(T) = \alpha+\beta+\delta+\delta \geq \alpha+\beta+\delta = n(\omega(T))$.

Or $T \in E_n^+ - \{0\}$ donc $\omega(T) > 0$. Ainsi $n-q+n-p \geq n$; <u>$p+q \leq n$.</u>

... ou $n\,\omega(T) = \alpha+\beta+\delta \geq \alpha+\beta = p\,\omega(T) + q\,\omega(T)$ donc $n \geq p+q$ car $\omega(T) > 0$.

(Q3) a) Soit $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix}$ une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ telle que

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_2,\ m_{1\sigma(1)}\, m_{2\sigma(2)}=0$.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_2$. ou $\sigma(1)=1$ et $\sigma(2)=2$ alors $m_{11}m_{22}=0$

ou $\sigma(1)=2$ et $\sigma(2)=1$ alors $m_{12}m_{21}=0$.

Ainsi $m_{11}m_{22}=m_{12}m_{21}=0$

Alors $M=\begin{pmatrix} 0 & m_{12}\\ 0 & m_{22}\end{pmatrix}$ ou $M=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix}$ ou $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ou $M=\begin{pmatrix} m_{11} & 0\\ m_{21} & 0\end{pmatrix}$

dans les quatre cas M contient une sous-matrice nulle du type $(2,1)$ ou $(1,2)$

donc du type (p,q) avec $p+q=3=2+1$!

$(\mathcal{H}_2)$ est vraie.

b) $M\in M_n(\mathbb{R})$ et M vérifie $(\mathcal{H}_n)$.

■ Si M est nulle M contient une sous-matrice de type $(n-1,n-1)$!
Cette sous-matrice est nécessairement nulle et vérifie donc très largement $(\mathcal{H}_{n-1})$.

Supposons $M\neq 0$. Alors $\exists (r,s)\in [\![1,n]\!]^2,\ m_{r,s}\neq 0$.

Considérons la sous matrice $\hat{M}$ la matrice déduite de M en supprimant la $r^{\text{ième}}$ ligne de M et sa $s^{\text{ième}}$ colonne.

$\hat{M}$ est une sous-matrice de M de type $(n-1,n-1)$. Vérifions qu'elle possède la propriété $(\mathcal{H}_{n-1})$.

Soit σ une permutation de $[\![1,n-1]\!]$. Montrons que $\prod_{i=1}^{n-1}\hat{m}_{i\sigma(i)}=0$

notons alors qu'il existe $n-1$ éléments distincts $c_1,c_2,\dots,c_{r-1},c_{r+1},\dots,c_n$ de $[\![1,n]\!]-\{s\}$

tels que $\{\hat{m}_{1\sigma(1)},\hat{m}_{2\sigma(2)},\dots,\hat{m}_{n-1\,\sigma(n-1)}\}=\{m_{1c_1},m_{2c_2},\dots,m_{r-1\,c_{r-1}},m_{r+1\,c_{r+1}},\dots,m_{n\,c_n}\}$

Posons $\forall i\in[\![1,n]\!],\ \tau(i)=\begin{cases} s & \text{si } i=r\\ c_i & \text{si } i\neq r\end{cases}$.

Alors τ est clairement une permutation de $\llbracket 1,n \rrbracket$. Rappelons que M vérifie $(\mathcal{H}_n)$.

Ainsi $\prod_{i=1}^{n} m_{i\tau(i)} = 0$. Or $\prod_{i=1}^{n} m_{i\tau(i)} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \hat{m}_{i\sigma(i)}\right) \times m_{rs}$.

Comme $m_{rs} \neq 0$: $\prod_{i=1}^{n-1} \hat{m}_{i\sigma(i)} = 0$. Ainsi $\hat{m}_{1\sigma(1)} \hat{m}_{2\sigma(2)} \cdots \hat{m}_{n-1\,\sigma(n-1)} = 0$ et

ceci pour toute permutation σ de $\llbracket 1,n-1 \rrbracket$. Alors $\hat{M}$ vérifie $\mathcal{H}_{n-1}$.

Il existe bien une sous-matrice de M de type $(n-1,n-1)$ qui vérifie $(\mathcal{H}_{n-1})$.

■ Soit $\hat{M}$ une sous-matrice de M de type $(n-1,n-1)$ qui vérifie $(\mathcal{H}_{n-1})$.

L'hypothèse de récurrence permet de dire que $\hat{M}$ contient une sous-matrice nulle $\check{M}$ de type (p,q) avec $p+q=n-1+1$. $\check{M}$ est encore une sous-matrice de M de type (p,q) avec $p+q=n$.

Donc M contient une sous-matrice nulle du type (p,q) avec $p+q=n$.

Il résulte alors de Q2 qu'il existe deux permutations σ et σ' de $\llbracket 1,n \rrbracket$ et deux éléments (p,q) de $\llbracket 1,n \rrbracket^2$ tels que 1°/ $p+q=n$ et

2°/ $P_\sigma M P_{\sigma'} = \left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline Z & Y \end{array}\right)$ avec $X \in M_{p,n-q}(\mathbb{R})$, $Y \in M_{n-p,q}(\mathbb{R})$ et $Z \in M_{n-p,n-q}(\mathbb{R})$

i.e. $X \in M_p(\mathbb{R})$, $Y \in M_q(\mathbb{R})$ et $Z \in M_{q,p}(\mathbb{R})$.

■ $M = (m_{ij})$ alors $T = P_\sigma M P_{\sigma'} = (t_{ij})$ avec $\forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2$, $t_{ij} = m_{\sigma(i)\sigma'^{-1}(j)}$.

Soit τ une permutation de $\llbracket 1,n \rrbracket$.

$$\prod_{i=1}^{n} t_{i\tau(i)} = \prod_{i=1}^{n} m_{\sigma(i)\,\sigma'^{-1}(\tau(i))} \underset{\uparrow}{=} \sum_{\ell=1}^{n} m_{\ell,\,\sigma'^{-1}\circ\tau\circ\sigma^{-1}(\ell)} \underset{\uparrow}{=} 0 .$$

$\ell = \sigma(i)$ ou $i = \sigma^{-1}(\ell)$

M vérifie $(\mathcal{H}_n)$ et $\sigma'^{-1}\circ\tau\circ\sigma^{-1}$ est une permutation de $\llbracket 1,n \rrbracket$.

Ainsi T vérifie $(\mathcal{H}_n)$

Montrons que X vérifie $(\mathcal{H}_p)$ ou que Y vérifie $(\mathcal{H}_q)$. $X = (x_{ij})$ et $Y = (y_{ij})$.

Si Y vérifie $(\mathcal{H}_q)$ c'est clair. Supposons que Y ne vérifie pas $(\mathcal{H}_q)$ et montrons que X vérifie $(\mathcal{H}_p)$.

Il existe une permutation φ de $[\![1,q]\!]$ telle que $\prod_{i=1}^{q} y_{i\varphi(i)} \neq 0$.

Alors $\prod_{i=1}^{q} t_{i+p,\varphi(i)+p} \neq 0$. $(y_{ij} = t_{i+p,j+p} \cdots)$.

Soit φ' une permutation de $[\![1,p]\!]$. Posons $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $\psi(\ell) = \begin{cases} \varphi'(\ell) & \text{si } \ell \leq p \\ \varphi(\ell-p)+p & \text{si } \ell > p. \end{cases}$

Alors ψ est clairement une permutation de $[\![1,n]\!]$.

Donc $\prod_{i=1}^{n} t_{i\psi(i)} = 0$. Alors $\left(\prod_{i=1}^{p} x_{i\varphi'(i)}\right)\left(\prod_{i=1}^{q} y_{i\varphi(i)}\right) = 0$.

Comme le second terme du produit est non nul, le premier est nul.

Pour toute permutation φ' de $[\![1,p]\!]$, $x_{1\varphi'(1)} \cdots x_{p\varphi'(p)} \neq 0$.

Alors X vérifie $(\mathcal{H}_p)$.

Ainsi <u>X vérifie $(\mathcal{H}_p)$ ou Y vérifie $(\mathcal{H}_q)$.</u>

■ Supposons que X vérifie $(\mathcal{H}_p)$. On pourra soit faire une démonstration analogue dans le cas où Y vérifie $(\mathcal{H}_q)$ ou se ramener à ce cas par "transposition"...

Montrons que M contient une sous-matrice nulle de type (p',q') telle que $p'+q' = n+1$. Il suffit de montrer que cela est vrai pour $T = P_\tau M P_{\tau'}$

car 1°. $M = P_{\tau^{-1}} T P_{\tau'^{-1}}$

2°. lorsque l'on multiplie une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ par une matrice de permutation on ne fait qu'échanger l'ordre de ses colonnes ou de ses lignes.

$p \in \mathbb{N}^*$ et $q = n-p \in \mathbb{N}^*$ donc $p \in [\![1, n-1]\!]$. Supposons que $p \geqslant 2$.

Or X est une matrice de $M_p(\mathbb{R})$ qui vérifie $(\mathcal{H}_p)$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence. Ainsi il existe une sous-matrice nulle de X de type (r, s) avec $r+s = p+1$. Si $p=1$: $X = 0_{M_1(\mathbb{R})}$ car X vérifie $(\mathcal{H}_1)$ et le résultat vaut encore.

Notons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-r}$ les "numéros" des lignes et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-s}$ les numéros des colonnes qu'il faut supprimer pour obtenir cette sous matrice nulle ...à un abus près...

Si nous retirons à T les lignes numéro $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-r}$ et les colonnes numéro $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-s}$ et les lignes $p+1, p+2, \dots, n$ il nous reste une matrice nulle ayant r lignes et $n-p+s$ colonnes.

Donc T possède une sous-matrice nulle de type $(r, n-p+s)$

Posons $p' = r$ et $q' = n-p+s$. $p' \in \mathbb{N}^*$, $q' \in \mathbb{N}^*$ et $p'+q' = n-p+r+s = n-p+p+1 = n+1$

Ainsi T possède une sous-matrice nulle du type (p', q') avec $p'+q' = n+1$.

Alors <u>M possède une sous-matrice nulle du type (p', q') avec $p'+q' = n+1$.</u>

<u>Ceci achève la récurrence qui montre la propriété $(\mathcal{P})$.</u>

(Q4) Soit $M \in E_n^+ \setminus \{0\}$. Si M vérifie $(\mathcal{H}_n)$, alors M contient une matrice nulle de type (p, q) avec $p+q = n+1$ donc avec $p+q > n$ et ceci contredit le résultat de III Q2 b)

Ainsi <u>M ne vérifie pas $(\mathcal{H}_n)$ donc $\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $m_{1\sigma(1)} m_{2\sigma(2)} \cdots m_{n\sigma(n)} > 0$</u>