PARTIE I

(Q1) On suppose ici que U est un segment. On rappelle que f est continue sur U.

Soit $y \in \mathbb{R}$. $F_y : x \mapsto xy - f(x)$ est continue sur le segment U comme différence de deux fonctions continues sur le segment U donc F_y possède un maximum sur U ; ainsi $y \in U(f)$.

Finalement $U(f) = \mathbb{R}$ et f^* est définie sur $\mathbb{R}$.

Si U est un segment (et si f est continue sur U) f^* est définie sur $\mathbb{R}$.

Donc $\|z_{p+1}-\bar{z}\|^2-\|z_p-\bar{z}\|^2 \leqslant r(r\alpha-2)\langle x_p-\bar{x}, A(x_p-\bar{x})\rangle$

Or $r>0$, $r\alpha-2<0$ et $\langle x_p-\bar{x}, A(x_p-\bar{x})\rangle \geqslant \lambda\|x_p-\bar{x}\|^2 \geqslant 0$.

Ainsi $\|z_{p+1}-\bar{z}\|^2-\|z_p-\bar{z}\|^2 \leqslant r(r\alpha-2)\langle x_p-\bar{x}, A(x_p-\bar{x})\rangle \leqslant 0$ pour tout p dans $\mathbb{N}^*$.

La suite $(\|z_p-\bar{z}\|^2)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc convergente.

Soit $p\in\mathbb{N}$. $r(r\alpha-2)\leqslant 0$ et $\langle x_p-\bar{x}, A(x_p-\bar{x})\rangle \geqslant \lambda\|x_p-\bar{x}\|^2$.

Alors $\|z_{p+1}-\bar{z}\|^2-\|z_p-\bar{z}\|^2 \leqslant r(r\alpha-2)\langle x_p-\bar{x}, A(x_p-\bar{x})\rangle \leqslant r(r\alpha-2)\lambda\|x_p-\bar{x}\|^2 \leqslant 0$

Comme $(\|z_p-\bar{z}\|^2)_{p\in\mathbb{N}}$ converge : $\lim_{p\to+\infty}\left(\|z_{p+1}-\bar{z}\|^2-\|z_p-\bar{z}\|^2\right)=0$.

Alors, par encadrement il vient $\lim_{p\to+\infty}\left(r(r\alpha-2)\lambda\|x_p-\bar{x}\|^2\right)=0$.

Or $r(r\alpha-2)\lambda\neq 0$ donc $\lim_{p\to+\infty}\left(\|x_p-\bar{x}\|^2\right)=0$.

Par conséquent $\lim_{p\to+\infty}\|x_p-\bar{x}\|=0$. Ainsi $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$.

Exercice : Montrer que $U=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Bx=c\}$ est un convexe fermé de $\mathbb{R}$.