

PARTIE I Généralités

Dans toute la suite nous n'utiliserons pas la notation ϕf , nous écrivons $\phi(f)$.

Q1) a) Soit x un réel. Le changement de variable $u = t - (x-1)$ donne :

$$\phi(f)(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt = \int_0^1 f(u + (x-1)) du = \int_0^1 f(x + u - 1) du.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(f)(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt = \int_0^1 f(x + u - 1) du.$$

b) Supposons que: $\exists \varepsilon \in (-1, 1), \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \varepsilon f(x)$ (les deux cas en un ...)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(f)(-x) = \int_0^1 f(-x + u - 1) du = \varepsilon \int_0^1 f(x - u + 1) du = \varepsilon \int_1^0 f(x + v) (-dv) = \varepsilon \int_0^1 f(x + v) dv.$$

$\forall x \in \mathbb{R},$ $\forall \phi(f)(-x) = \int_0^1 f(x + 1 + v - 1) dv = \varepsilon \phi(f)(x + 1).$

Ainsi si f est paire: $\forall x \in \mathbb{R}, \phi(f)(-x) = \phi(f)(x+1)$ et si f est impaire: $\forall x \in \mathbb{R}, \phi(f)(-x) = -\phi(f)(x+1).$

c) Supposons f croissante. Soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ tel que: $x \leq x'.$

$\forall u \in [0, 1], x + u - 1 \leq x' + u - 1$ donc $\forall u \in [0, 1], f(x + u - 1) \leq f(x' + u - 1).$

En intégrant il vient: $\int_0^1 f(x + u - 1) du \leq \int_0^1 f(x' + u - 1) du$. Ainsi $\phi(f)(x) \leq \phi(f)(x').$

Pour conclure si f est croissante: $\phi(f)$ est croissante.

De même de même que si f est décroissante: $\phi(f)$ est décroissante.

d) Supposons que f est convexe. Montrons que $\phi(f)$ est convexe.

Soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. Montrons que $\phi(f)(\lambda x + (1-\lambda)x') \leq \lambda \phi(f)(x) + (1-\lambda)\phi(f)(x').$

Soit $u \in [0, 1].$

f est convexe.

$$f(\lambda x + (1-\lambda)x' + u - 1) = f(\lambda(x + u - 1) + (1-\lambda)(x' + u - 1)) \leq \lambda f(x + u - 1) + (1-\lambda)f(x' + u - 1)$$

En intégrant et en utilisant la linéarité de l'intégrale on obtient:

$$\int_0^1 f(\lambda x + (1-\lambda)x' + u - 1) du \leq \lambda \int_0^1 f(x + u - 1) du + (1-\lambda) \int_0^1 f(x' + u - 1) du.$$

$$\text{Ainsi } \phi(f)(\lambda x + (1-\lambda)x' + u - 1) \leq \lambda \phi(f)(x) + (1-\lambda)\phi(f)(x').$$

si f est concave, $\phi(f)$ est concave.

En fait de même que si f est convexe: $\phi(f)$ est convexe.

Remarque.. On peut vérifier ces deux résultats en prouvant que $\phi(f)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \phi(f)''(x) = f'(x) - f'(x-1)$.

Alors f convexe $\Rightarrow f'$ croissante $\Rightarrow \phi(f)'' \geq 0 \Rightarrow \phi(f)$ convexe, n'a-t-on pas pour la concavité.

ex) Supposons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ et montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(f)(x) = L$ ($L \in \mathbb{R} ?$!).

Il faut que: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A' \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A' \Rightarrow |\phi(f)(x) - L| \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$. $\exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall z \in \mathbb{R}, z \geq A \Rightarrow |f(z) - L| \leq \varepsilon$.

Soit $x \in [A+1, +\infty[$. $\forall u \in [0, 1], u-1 \geq -1$. $\forall u \in [0, 1], x+u-1 \geq x-1 \geq A+1-1=A$

Donc $\forall u \in [0, 1], |f(x+u-1) - L| \leq \varepsilon$.

Alors $|\phi(f)(x) - L| = \left| \int_0^1 f(x+u-1) du - \int_0^1 L du \right| = \left| \int_0^1 (f(x+u-1) - L) du \right| \leq \int_0^1 |f(x+u-1) - L| du$.

$|\phi(f)(x) - L| \leq \int_0^1 |f(x+u-1) - L| du \leq \int_0^1 \varepsilon du = \varepsilon$.

Alors $A+1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq A+1 \Rightarrow |\phi(f)(x) - L| \leq \varepsilon$.

Pour $A' = A+1$. $A' \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq A' \Rightarrow |\phi(f)(x) - L| \leq \varepsilon$.

Donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A' \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A' \Rightarrow |\phi(f)(x) - L| \leq \varepsilon$.

Pour conclure $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(f)(x) = L$.

De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ donne $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(f)(x) = L$.

Exercice de contrôle.. noter que tout ceci vaut encore pour $L = +\infty$ ou $-\infty$.

Q2 a) Soit $p \in \mathbb{R}_n[x]$. $\exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $p = \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

Soit $\kappa \in \mathbb{R}$. $\phi(p)(\kappa) = \int_{\kappa-1}^{\kappa} \left(\sum_{k=0}^n a_k t^k \right) dt = \sum_{k=0}^n a_k \int_{\kappa-1}^{\kappa} t^k dt = \sum_{k=0}^n a_k \frac{\kappa^{k+1} - (\kappa-1)^{k+1}}{k+1}$.

$$\phi(p)(\kappa) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} \left[\kappa^{k+1} - \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \kappa^i (-1)^{k+1-i} \right] = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-1)^{k+1-i} \kappa^i$$

$$\phi(p)(\kappa) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=i}^n \frac{a_k}{k+1} \binom{k+1}{i} (-1)^{k+1-i} \right) \kappa^i, \text{ alors } \phi(p) \in \mathbb{R}_n[x].$$

$\mathbb{R}_n[x]$ est stable par ϕ .

b) Pour $\forall k \in [0, n]$, $\forall \kappa \in \mathbb{R}$, $e_k(\kappa) = \kappa^k$.

$\forall k \in [0, n]$, $\forall \kappa \in \mathbb{R}$, $\phi_n(e_k)(\kappa) = \int_{\kappa-1}^{\kappa} t^k dt = \frac{\kappa^{k+1} - (\kappa-1)^{k+1}}{k+1} \stackrel{\text{voir plus haut}}{=} \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} (-1)^{k+1-i} \kappa^i$

$\forall k \in [0, n]$, $\phi_n(e_k) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} (-1)^{k+1-i} e_i$. L'écriture de ϕ_n dans la base

canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ est :

$$\pi_n = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & \dots & \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{k+1}{k+1} & \dots & \frac{(-1)^n}{n+1} \binom{n+1}{n+1} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{(-1)^{k-1}}{k+1} \binom{k+1}{k} & \dots & \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} \binom{n+1}{n} \\ & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & \frac{(-1)^0}{k+1} \binom{k+1}{1} & & \\ & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & \frac{(-1)^0}{n+1} \binom{n+1}{1} \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

c) $\text{Sp}(\phi_n) = \text{Sp}(\pi_n)$ et π_n est triangulaire supérieure donc $\text{Sp}(\pi_n)$ est l'ensemble des éléments diagonaux de π_n .

Alors $\text{Sp}(\phi_n) = \text{Sp}(\pi_n) = \{1\}$. (en effet $\forall k \in [0, n]$, $\frac{(-1)^0}{k+1} \binom{k+1}{k+1} = 1$).

Soit p un vecteur propre de ϕ_n associé à la valeur propre 1.

$\exists r \in [0, n]$, $\exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $a_r \neq 0$ et $\forall \kappa \in \mathbb{R}$, $p(\kappa) = \sum_{k=0}^r a_k \kappa^k$

Un calcul analogue à celui de ϕ a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \phi(P)(x) = \sum_{k=0}^r \sum_{l=i}^r \left(\frac{a_l}{l+1} \binom{i}{l+1} (-1)^{l-i} \right) x^i.$$

Alors $\forall i \in \llbracket 0, r \rrbracket$, $a_i = \sum_{l=i}^r \frac{a_l}{l+1} \binom{i}{l+1} (-1)^{l-i}$.

Supposons $r \geq 1$. Alors $a_{r-1} = \sum_{l=r-1}^r \frac{a_l}{l+1} \binom{r-1}{l+1} (-1)^{l-r+1} = \underbrace{\frac{a_{r-1}}{r} \binom{r-1}{r} (-1)^0}_{=a_{r-1}} + \frac{a_r}{r+1} \binom{r-1}{r+1} (-1)^1$

Ainsi $a_{r-1} = a_{r-1} - \frac{a_r}{r+1} \binom{r-1}{r+1}$; $\frac{a_r}{r+1} \binom{r-1}{r+1} = 0$; $a_r = 0$!!

Nécessairement $r=0$. P est un polynôme de degré 0. P est constant et nul.

Réciproquement supposons que P soit constant et nul. $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $P = \lambda$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi_n(P)(x) = \int_{x-1}^x \lambda dt = \lambda(x - (x-1)) = \lambda = P(x)$; $\phi_n(P) = P$ et $P \neq 0$ donc P est un vecteur propre de ϕ , associé à la valeur propre 1.

des vecteurs propres de ϕ , associé à la valeur propre 1 sont des éléments constants et nuls de

$\mathbb{R}_n[x]$.

Q3 a) Soit f un élément de $\mathcal{B}^0(\mathbb{R})$. Noter F une primitive sur $\mathbb{R}$ de f .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(f)(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt = F(x) - F(x-1).$$

Pour $x \mapsto x-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, $x \mapsto F(x-1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, par différence, $\phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\phi(f))'(x) = F'(x) - F'(x-1) = f(x) - f(x-1). \quad \underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}, \phi(f)'(x) = f(x) - f(x-1).}}$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto x-1$ également, $x \mapsto f(x) - f(x-1)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent $\phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$. $\phi(f)$ est donc dans $\mathcal{B}'$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $f \in \mathcal{B}^0(\mathbb{R})$. Supposons que f est dans $\mathcal{B}^1$ sur $\mathbb{R}$. Montrons que $\phi(f)$ est dans $\mathcal{B}^{1+1}$ sur $\mathbb{R}$. $\phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \phi(f)'(x) = f(x) - f(x-1)$.

f et $x \mapsto x-1$ sat de dom $\mathcal{B}^k_{\mu, \mathbb{R}}$ donc $x \mapsto f(x) - f(x-1)$ at de dom $\mathcal{B}^k_{\mu, \mathbb{R}}$.
Ainsi $\phi(f)'$ at de dom $\mathcal{B}^k_{\mu, \mathbb{R}}$, par conséquent $\phi(f)$ est de dom $\mathcal{B}^{k+1}_{\mu, \mathbb{R}}$.

Donc $\phi(\mathcal{B}^k(\mathbb{R})) \subset \mathcal{B}^{k+1}(\mathbb{R})$. Alors $\forall j \in \llbracket 0, k+1 \rrbracket$, $\phi(\mathcal{B}^k(\mathbb{R})) \subset \mathcal{B}^j(\mathbb{R})$.

Montrons que $\phi(\mathcal{B}^k(\mathbb{R})) \not\subset \mathcal{B}^{k+2}(\mathbb{R})$ ce qui donne $\phi(\mathcal{B}^k(\mathbb{R})) \not\subset \mathcal{B}^j(\mathbb{R})$ pour tout $j \in \llbracket k+2, +\infty \rrbracket$.

Notons ψ l'application de $\mathcal{B}^0(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{B}^0(\mathbb{R})$ qui g élément de $\mathcal{B}^0(\mathbb{R})$ associe la primitive qui prend la valeur 0 à 0. ψ est donc un endomorphisme de $\mathcal{B}^0(\mathbb{R})$.

Considérons $g_0 : x \mapsto |x|$. $g_0 \in \mathcal{B}^0(\mathbb{R})$. Posons donc $f_0 = \psi^k(g_0) = \underbrace{(\psi \circ \psi \circ \dots \circ \psi)}_{k \text{ fois}}(g_0)$.
Rétourné de voir que f_0 est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

que $f_0^{(k)} = g_0$.

g_0 étant continue sur $\mathbb{R}$, f_0 at de dom $\mathcal{B}^k_{\mu, \mathbb{R}}$. Alors $\phi(f_0)$ at de dom $\mathcal{B}^{k+1}_{\mu, \mathbb{R}}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(f_0)'(x) = f_0(x) - f_0(x-1)$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\phi(f_0))^{(k+1)}(x) = (\phi(f_0)')^{(k)}(x) = f_0^{(k)}(x) - f_0^{(k)}(x-1) = g_0(x) - g_0(x-1)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(f_0)^{(k+1)}(x) = |x| - |x-1|$. Donc $\phi(f_0)^{(k+1)}$ n'est pas dérivable en 0;

$\phi(f_0)$ n'est pas $k+2$ fois dérivable; $\phi(f_0) \notin \mathcal{B}^{k+2}(\mathbb{R})$.

Alors $\phi(\mathcal{B}^k(\mathbb{R})) \not\subset \mathcal{B}^{k+2}(\mathbb{R})$.

Si $k \in \mathbb{N}$, $\phi(\mathcal{B}^k(\mathbb{R})) \subset \mathcal{B}^j(\mathbb{R})$ si et seulement si $j \in \llbracket 0, k+1 \rrbracket$.

b) soit $f \in \mathcal{K} \cap \phi$.

$f \in \mathcal{K} \cap \phi \iff \phi(f) = 0_{\mathcal{B}^0(\mathbb{R})} \iff \phi(f)(1) = 0 \text{ et } (\phi(f))' = 0$

$f \in \mathcal{K} \cap \phi \iff \int_0^1 f(t) dt = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) - f(x-1) = 0$.

$$f \in \text{Ker } \phi \Leftrightarrow \begin{cases} 1^\circ f \text{ est p\'eriodique de p\'eriodes } 1 \\ 2^\circ \int_0^1 f(t) dt = 0 \end{cases}$$

$$\text{notons que } 1^\circ \text{ et } 2^\circ \Leftrightarrow 1^\circ \text{ et } \forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+1} f(t) dt = 0.$$

$\Leftarrow$ est une \'evidence

$$\Rightarrow \text{soit } a \in \mathbb{R}. \int_a^{a+1} f(t) dt = \int_a^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^{a+1} f(t) dt = \int_1^{a+1} f(t) dt - \int_0^a f(t) dt. \text{ Mais:}$$

$$\int_a^{a+1} f(t) dt = \int_{t=u-1}^a f(u) du - \int_0^a f(t) dt \stackrel{1^\circ}{=} \int_0^a f(u) du - \int_0^a f(t) dt = 0.$$

$$\text{Ainsi } f \in \text{Ker } \phi \Leftrightarrow \begin{cases} 1^\circ f \text{ est p\'eriodique de p\'eriodes } 1 \\ 2^\circ \forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+1} f(t) dt = 0. \end{cases}$$

Ker ϕ est l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ 1-p\'eriodiques, nulles et d'int\'egrale nulle sur une p\'erode.

$$\text{c) } P_0 \text{ on } \forall k \in \mathbb{N}, f_1(k) = \sin(2\pi k). \quad f_1 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{R}, f_1(k+1) = f_1(k) \text{ et } \\ \forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+1} f_1(t) dt = \left[-\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi} \right]_a^{a+1} = 0. \quad f_1 \in \text{Ker } \phi \text{ et } f_1 \neq 0_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})}.$$

Ainsi ϕ n'est pas surjectif.

$$\phi(\mathcal{C}^0(\mathbb{R})) \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}). \quad \text{In } \phi \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{C}^0(\mathbb{R}).$$

Ainsi ϕ n'est pas surjectif.

(Q4) a) soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telle que: $f \neq 0_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})}$ et $\phi(f) = \lambda f$.
notons par r\'ecurrence que pour tout k dans $\mathbb{N}$, f est k fois d\'erivable sur $\mathbb{R}$.
 $\rightarrow$ c'est vrai pour $k=0$.

$\rightarrow$ Supposons la propri\'et\'e vraie pour k dans $\mathbb{N}$ et montrons le pour $k+1$.

$$f = \frac{1}{\lambda} \phi(f). \quad \phi(f) \text{ est d\'erivable sur } \mathbb{R} \text{ donc } f \text{ est d\'erivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \\ \forall k \in \mathbb{R}, f'(k) = \frac{1}{\lambda} (f(k) - f(k-1)).$$

f et $x \mapsto x-1$ sont k fois dérivables sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto \frac{1}{\lambda} (f(x) - f(x-1))$ est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors f est $k+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et ainsi f est $k+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Ceci admet la récurrence.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, f est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b). Soit P une fonction polynôme. Supposons que P est une fonction propre de ϕ .

$$P \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R}, \phi(P) = \lambda P.$$

$$\text{Soit } r \text{ le degré de } P. P \in \mathbb{R}_r[X] \text{ et } \phi_r(P) = \phi(P) = \lambda P.$$

Alors d'après Q3 : $\lambda = 1$ et P est constante et non nulle sur $\mathbb{R}$.

• Réciproquement soit P une fonction constante et non nulle sur $\mathbb{R}$.

$P \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $P \neq 0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $\phi(P) = \phi_0(P) = 1 \cdot P = P$; P est une fonction polynôme et P est une fonction propre de ϕ .

Les fonctions-polynômes qui sont fonctions propres de ϕ sont les fonctions constantes et non nulles sur $\mathbb{R}$.

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{ax}$.

$$\phi(P) = \lambda f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \int_{x-1}^x e^{at} dt = \lambda e^{ax}$$

$$\text{1}^\circ \text{ cas... } a \neq 0. \quad \phi(P) = \lambda f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{a} [e^{ax} - e^{a(x-1)}] = \lambda e^{ax}$$

$$\phi(P) = \lambda f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^{ax} \left[\frac{1 - e^{-a}}{a} - \lambda \right] = 0$$

$$\phi(P) = \lambda f \Leftrightarrow \frac{1 - e^{-a}}{a} = \lambda$$

$$\text{Posons alors } \forall a \in \mathbb{R}, \varphi(a) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-a}}{a} & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\phi(P) = \lambda f \Leftrightarrow \varphi(a) = \lambda.}$$

$$L^1(\mathbb{R}), a=0. \quad \varphi(f)=\lambda f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t) dt = \lambda x \Leftrightarrow f=x \Leftrightarrow \varphi(1)=\lambda \Leftrightarrow \varphi(a)=\lambda.$$

Ainsi $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \exists a \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{ax} : \varphi(f) = \lambda f \Leftrightarrow \varphi(a) = \lambda.$

Étudions φ . φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$\frac{f - e^{-a}}{a} \underset{0}{\sim} \frac{-(1-a)}{a} = 1; \lim_{a \rightarrow 0} \frac{f - e^{-a}}{a} = 1 = \varphi(1); \varphi \text{ est continue en } 0.$$

$$\frac{\varphi(a) - \varphi(0)}{a} = \frac{1}{a^2} [1 - e^{-a} - a] \text{ pour } a \text{ dans } \mathbb{R}^* \text{ et } 1 - e^{-a} - a = 1 - (1 + (-a) + \frac{(-a)^2}{2}) - a + o(a^2)$$

$$\text{Soit } 1 - e^{-a} - a = -\frac{a^2}{2} + o(a^2) \text{ au voisinage de } 0.$$

$$\text{Alors } \frac{\varphi(a) - \varphi(0)}{a} \underset{0}{\sim} \frac{1}{a^2} \left[-\frac{a^2}{2}\right] = -\frac{1}{2}; \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\varphi(a) - \varphi(0)}{a} = -\frac{1}{2}; \varphi \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } \varphi'(0) = -\frac{1}{2}.$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \varphi'(a) = \frac{1}{a^2} [e^{-a}(a) - (1 - e^{-a})] = \frac{1}{a^2} [(a+1)e^{-a} - 1]$$

$$\text{Pour } \forall a \in \mathbb{R}, \varphi(a) = (a+1)e^{-a}. \varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(a) = e^{-a} - (a+1)e^{-a} = -ae^{-a}. \quad \forall a \in \mathbb{R}^-, \varphi'(a) > 0, \varphi'(0) = 0 \text{ et}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \varphi'(a) < 0. \varphi \text{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[\text{ et strictement}$$

$$\text{croissante sur }]-\infty, 0] \text{ et } \varphi(0) = 0. \text{ Alors } \forall a \in \mathbb{R}^*, \varphi(a) < 0.$$

$$\text{Ainsi } \forall a \in \mathbb{R}^*, \varphi'(a) < 0. \text{ Or } \varphi'(0) = -\frac{1}{2}; \quad \forall a \in \mathbb{R}, \varphi'(a) < 0.$$

$$\varphi \text{ est continue et strictement croissante sur } \mathbb{R}, \lim_{a \rightarrow +\infty} \varphi(a) = 0 \text{ et } \lim_{a \rightarrow -\infty} \varphi(a) = +\infty$$

$$\text{Alors } \varphi \text{ définit une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]0, +\infty[.$$

$$\text{Soit } \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \exists ! a \in \mathbb{R}, \varphi(a) = \lambda.$$

Ainsi $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$ il existe une et une seule fonction exponentielle f définie

par $f(x) = e^{ax} (a \in \mathbb{R})$ telle que $\varphi(f) = \lambda f$.

doit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $q = \varphi^{-1}(\lambda)$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_q(x) = e^{qx}$.

$h_q \in \mathcal{E}^0(\mathbb{R})$, $h_q \neq 0_{\mathcal{E}^0(\mathbb{R})}$ et $\phi(h_q) = \lambda h_q$; ainsi λ est une valeur propre de ϕ .

Tout réel strictement positif est valeur propre de ϕ .

d) soit λ un élément de $]1, +\infty[$ et f une fonction bornée de $\mathcal{E}_0(\mathbb{R})$ telle que $\phi(f) = \lambda f$.

Posons $\pi = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ (f est bornée sur $\mathbb{R}$).

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda |f(x)| = |\phi(f)(x)| = \left| \int_{x-1}^x f(t) dt \right| \leq \int_{x-1}^x |f(t)| dt \leq \int_{x-1}^x \pi dt = \pi.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda |f(x)| = \lambda |f(x)| \leq \pi.$$

$$\pi \geq 0 \quad 1 - \lambda < 0$$

Alors $\lambda \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \leq \pi$; $\lambda \pi \leq \pi$; $0 \leq \pi(1 - \lambda) \leq 0$; $\pi(1 - \lambda) = 0$ et $(1 - \lambda) \neq 0$.

Alors $\pi = 0$. Par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = 0$. f est nulle sur $\mathbb{R}$.

si λ est un réel strictement supérieur à 1, la seule fonction bornée appartenant au sous-espace propre associé à λ est la fonction nulle.

PARTIE II Existence d'une fonction non constante dans $\mathcal{E}_1(\mathbb{D})$

Q1) a) remarque $\forall x \in [0, 1]$, $1-x \in [0, 1]$ et $f(1-x) = -f(x)$.

soit $x \in [0, 1]$.

1^{er} cas... $x \in]0, 1[$. Alors $1-x \in]0, 1[$ et $f(1-x) = (1-x-\frac{1}{2}) e^{\frac{1}{(1-x)(1-x-1)}}$

$$f(1-x) = -(x-\frac{1}{2}) e^{\frac{1}{x(x-1)}} = -f(x).$$

2nd cas... $x=0$. $1-x=1 \in [0, 1]$ et $f(1-x) = f(1) = 0 = -0 = -f(0) = -f(x)$

3rd cas... $x=1$. $1-x=0 \in [0, 1]$ et $f(1-x) = f(0) = 0 = -0 = -f(1) = -f(x)$.

$\forall x \in [0, 1], 1-x \in [0, 1]$ et $f_0(1(\frac{1}{2})-x) = f_0(1-x) = -f_0(x) = 2x \cdot 0 - f_0(x)$.
 La courbe représentative de f_0 admet pour centre de symétrie le point $V(\frac{1}{2}, 0)$ de coordonnées

b) f_0 est de classe $\mathcal{B}'$ sur $]0, 1[$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{B}'$ sur $]0, 1[$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(x-1)} = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \frac{1}{2}) e^{\frac{1}{x(x-1)}} = 0 = f_0(0).$$

f_0 est continue en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x(x-1)} = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - \frac{1}{2}) e^{\frac{1}{x(x-1)}} = 0 = f_0(1).$$

f_0 est continue en 1. Finalement f_0 est continue sur $[0, 1]$.

$$\bullet \forall x \in]0, 1[, f_0'(x) = e^{\frac{1}{x(x-1)}} \left[1 + (x - \frac{1}{2}) \left(-\frac{2x-1}{(x(x-1))^2} \right) \right]$$

$$\forall x \in]0, 1[, f_0'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x(x-1)}}}{(x(x-1))^2} \left((x(x-1))^2 - 2(x - \frac{1}{2})^2 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(x-1)} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x) = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x(x-1)}}}{(x(x-1))^2} = 0.$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left((x(x-1))^2 - 2(x - \frac{1}{2})^2 \right) = -\frac{1}{2} : \underline{\lim_{x \rightarrow 0^+} f_0'(x) = 0.}$$

$$\text{Au même titre que } \underline{\lim_{x \rightarrow 1^-} f_0'(x) = 0.}$$

f_0 est continue sur $[0, 1]$, de classe $\mathcal{B}'$ sur $]0, 1[$ et $f_0'|_{]0, 1[}$ admet une limite finie en 0 et 1 donc le théorème de la limite de la dérivée

montre que f_0 est de classe $\mathcal{B}'$ sur $[0, 1]$. Notons que $f_0'(0) = f_0'(1) = 0$.

Voilà le fait que $\int_0^1 f_0(t) dt = 0$.

Qc) on prouve par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

→ C'est vrai pour $n=0$ d'après Q1 b)

→ Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

f_n est en particulier continue sur $[0, 1]$; $t \mapsto f_n(t)e^{-t}$ est également. Ainsi $x \mapsto \int_0^x f_n(t)e^{-t} dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ car c'est l'antidérivée de $t \mapsto f_n(t)e^{-t}$ sur $[0, 1]$ qui prend la valeur 0 à 0.

$x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, $x \mapsto \int_0^x f_n(t)e^{-t} dt$ et $x \mapsto e^x \int_0^x f_n(t)e^{-t} dt$ le sont également.

Mais f_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ comme différence de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. La récurrence s'achève.

pour tout n dans $\mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall x \in [0, 1]$, $f_{n+1}(x) = f_n(x)e^{-x} - e^{-x} \int_0^x f_n(t)e^{-t} dt$.

Mais $\forall x \in [0, 1]$, $f'_{n+1}(x) = f_n(x)e^{-x} - e^{-x} \int_0^x f_n(t)e^{-t} dt - e^{-x} f_n(x)e^{-x} = f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $f'_{n+1} = f_{n+1} - f_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(1) - f_{n+1}(0) = \int_0^1 f'_{n+1}(t) dt = \int_0^1 (f_{n+1}(t) - f_n(t)) dt$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(0) = f_n(0)e^0 - e^0 \int_0^0 f_n(t)e^{-t} dt = f_n(0)$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(1) = f_n(1)$.

montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(1) = \int_0^1 f_n(t) dt$

→ $f_0(1) = 0 = \int_0^1 f_0(t) dt$; la propriété est vraie pour $n=0$.

→ Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$$f_{n+1}(1) - f_{n+1}(0) = \int_0^1 (f_{n+1}(t) - f_n(t)) dt = \int_0^1 f_{n+1}(t) dt - \underbrace{\int_0^1 f_n(t) dt}_{f_n(1) = f_n(0)} = \int_0^1 f_{n+1}(t) dt - f_{n+1}(0).$$

$f_{n+1}(1) - f_{n+1}(0) = \int_0^1 f_{n+1}(t) dt - f_{n+1}(0)$; $f_{n+1}(1) = \int_0^1 f_{n+1}(t) dt$ et la récurrence s'achève.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0, 1]$. $h_{n+1}(0) = h_n(0)$ $h_n(1) = \int_0^1 h_n(t) dt$ et $h'_{n+1} = h_{n+1} - h_n$

$$f_{n+1}(x) = (f_{h_{n+1}}(x) - f_{h_n}(x)) + f_{h_n}(x) = \int_0^x h'_{n+1}(t) dt + f_{h_n}(x) = \int_0^x (h_{n+1} - h_n)(t) dt + \int_0^1 h_n(t) dt$$

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x h_{n+1}(t) dt - \int_0^x h_n(t) dt + \int_0^1 h_n(t) dt = \int_0^x h_{n+1}(t) dt + \int_x^1 h_n(t) dt.$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], f_{n+1}(x) = \int_0^x h_{n+1}(t) dt + \int_x^1 h_n(t) dt.$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. $f(n+1) = f_{n+1}(n+1 - (n+1)) = f_{n+1}(0) = f_n(1) = f_n(n+1 - n).$

Ainsi $\forall x \in [n, n+1[$, $f(x) = f_n(x-n)$ et $f(n+1) = f_n(n+1-n).$

Alors $\forall x \in [n, n+1]$, $f(x) = f_n(x-n).$

- f_n est continue sur $[0, 1]$ - $x \mapsto x-n$ est continue sur $[n, n+1]$ - $\forall x \in [n, n+1]$, $x-n \in [0, 1]$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Alors, par composition, } f \text{ est continue sur } [n, n+1] \\ \text{d'où } \rightarrow f \text{ est continue à tout point de } [n, n+1[\\ \rightarrow f \text{ est continue à droite en } n \\ \rightarrow f \text{ est continue à gauche en } n+1 \end{array} \right.$
--	--

ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut dire que f est continue sur $[0, +\infty[$ car une fonction continue à droite et à gauche en un point est continue en ce point.

Soit $x \in [1, +\infty[$. Posons $n = E(x-1)$. $n \leq x-1 < n+1$, $n+1 \leq x < n+2$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\int_{x-1}^x f(t) dt = \int_{x-1}^{n+1} f(t) dt + \int_{n+1}^x f(t) dt = \int_{x-1}^{n+1} f(t-n) dt + \int_{n+1}^x f_{n+1}(t-n-1) dt.$$

$$\int_{x-1}^x f(t) dt = \int_{x-n-1}^1 f_n(u) du + \int_0^{x-n-1} h_{n+1}(u) du = \int_{n+1}^x (x-(n+1)) = f(x).$$

$\begin{array}{ccc} \text{u=t-n-1 dans (U)} & \text{u=t-n-1 dans (C)} & \text{C} \end{array}$

$x \in (n+1, n+2[$

Ainsi $\forall x \in [1, +\infty[$, $f(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt.$

Q3) notons que f est continue sur $[-1, +\infty[$. f est déjà continue sur $[0, +\infty[$, il suffit de prouver que f est continue sur $[-1, 0]$.

Justifions d'abord la continuité de f sur $[-1, 0[$.

f est continue sur $[0, +\infty[$. Soit F une primitive de f sur $[0, +\infty[$. Faisons dans B' sur $[0, +\infty[$. $\forall x \in [1, +\infty[$, $g(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt = F(x) - F(x-1)$.

$\cdot F$ est B' sur $[0, +\infty[$
 $\cdot \forall x \in [1, +\infty[$, $x-1 \in [0, +\infty[$
 $\cdot x \mapsto x-1$ est B' sur $[1, +\infty[$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mais } f \text{ est de classe } B' \text{ sur } [1, +\infty[. \text{ En particulier} \\ f \text{ est dérivable à tout point de }]1, +\infty[\text{ et} \\ \text{dérivable à droite à } 1. \end{array} \right.$

$$\forall x \in]1, +\infty[, f'(x) = f(x) - f(x-1) \text{ et } f'_d(1) = f(1) - f(0) = 0.$$

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = f_0(x) \qquad \qquad \qquad \forall x \in [0, 1], f(x) = f_0(x)$$

donc f est B' sur $[0, 1]$; en particulier f est dérivable à tout point de $]0, 1[$, dérivable à droite à 0, à gauche à 1, $f'_d(0) = f'_0(0) = 0$ et $f'_g(1) = f'_0(1) = 0$.

$f'_d(1) = f'_g(1) = 0$ donc f est dérivable à 1 et $f'(1) = 0$.

Finalement f est dérivable sur $[0, +\infty[$, mieux f est B' sur $[0, +\infty[$ (car $\forall x \in [0, 1], f'(x) = f'_0(x)$ et $\forall x \in [1, +\infty[, f'(x) = f(x) - f(x-1)$)

noter que $\forall x \in [1, +\infty[, f(x-1) = f(x) - f'(x)$

donc $\forall x \in [0, +\infty[, f(x) = f(x+1) - f'(x+1)$. Ainsi

$$1^\circ \text{ Relation de récurrence } \forall x \in [-1, 0[, f(x) = f(x+1) - f'(x+1)$$

2° Ceci a un sens... on vérifie que f' existe sur $]0, +\infty[$ et $f'_d(0)$ existe.

$\cdot x \mapsto x+1$ est continue sur $[-1, 0[$
 $\cdot \forall x \in [-1, 0[, x+1 \in [0, 1] \subset [0, +\infty[$
 $\cdot f$ et f' sont continues sur $[0, +\infty[$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mais } x \mapsto f(x+1) - f'(x+1) \text{ est} \\ \text{continue sur } [-1, 0[. \\ f \text{ est continue sur } [-1, 0[\text{ et sur } [0, +\infty[. \end{array} \right.$

Il reste plus qu'à prouver que f est continue à gauche à 0.

soit à noter que $\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x+1) - f'(x+1)) = f(0)$. $f'(0) = 0$

f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x+1) - f'(x+1)) = f(1) - f'(1) \stackrel{\downarrow}{=} f(1)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x+1) - f'(x+1)) = f(1) = f_0(1) = 0 = f_0(0) = f(0).$$

Ceci a donc de montrer que f est continue sur $[-1, +\infty[$.

PARTIE III : Limite en $+\infty$ d'une fonction de $E_1(\phi)$.

(Q1) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. f est continue sur $[n, n+1]$. Comme $[n, n+1]$ est un segment, f possède un maximum π_n sur $[n, n+1]$ et $\exists x_n \in [n, n+1]$, $f(x_n) = \pi_n$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

→ Supposons que $x_n \in]n, n+1[$.

$$\forall x \in]n, x_n[, \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} \geq 0; \quad \lim_{x \rightarrow x_n^-} \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} \geq 0; \quad f'_g(x_n) \geq 0; \quad f'(x_n) \geq 0.$$

$$\forall x \in]x_n, n+1[, \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} \leq 0; \quad \lim_{x \rightarrow x_n^+} \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} \leq 0; \quad f'_d(x_n) \leq 0; \quad f'(x_n) \leq 0.$$

Finalement $f'(x_n) = 0$.

$\phi(f) = f$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt$. De plus f est de classe $\mathcal{C}^1$

sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) - f(x-1)$.

Alors $0 = f'(x_n) = f(x_n) - f(x_n-1)$. Ainsi $f(x_n-1) = f(x_n)$.

→ Supposons que $x_n = n+1$. $\forall t \in [n, n+1]$, $f(t) \leq f(n+1)$.

$$\forall t \in [n, n+1], f(t) - f(n+1) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \int_{x-1}^x f(t) dt = f(x)$$

$$\text{Ainsi } 0 \geq \int_n^{n+1} (f(t) - f(n+1)) dt = \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n+1) \stackrel{\downarrow}{=} f(n+1) - f(n+1) = 0.$$

Donc $\int_n^{n+1} (f(t) - f(n+1)) dt = 0$. Comme $t \mapsto f(t) - f(n+1)$ est continue et négative sur $[n, n+1]$: $\forall t \in [n, n+1], f(t) - f(n+1) \leq 0$. $\forall t \in [n, n+1], f(t) = f(n+1)$.

Si $x_n = n+1$: f est constante sur $[n, n+1]$

En particulier $f(n) = f(n+1)$ donc on a aussi $f(x_{n-1}) = f(x_n)$.

Notons que dans tous les cas $\pi_{n-1} \geq \pi_n$.

1^{er} cas... $x_n = n$. Alors $\pi_n = f(x_n) = f(n) \leq \max_{t \in [n-1, n]} f(t) = \pi_{n-1}$; $\pi_n \leq \pi_{n-1}$.

2^{ème} cas... $x_n > n$. Nous avons alors vu que $f(x_n) = f(x_{n-1})$

Notons que $x_{n-1} \in [n-1, n]$. Donc $\pi_n = f(x_n) = f(x_{n-1}) \leq \max_{t \in [n-1, n]} f(t) = \pi_{n-1}$; $\pi_n \leq \pi_{n-1}$.

Dans les deux cas : $\pi_n \leq \pi_{n-1}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. f est continue sur le segment $[n, n+1]$ donc f possède sur $[n, n+1]$ un minimum m_n et $\exists y_n \in [n, n+1], f(y_n) = m_n$.

Supposons $n \in \mathbb{N}^*$.

1^{er} cas... $y_n = n$. Alors $\pi_n = f(y_n) = f(n) \geq \min_{t \in [n-1, n]} f(t) = m_{n-1}$; $\pi_n \geq m_{n-1}$.

2^{ème} cas... $y_n \in]n, n+1[$. Une démonstration identique à celle faite dans b) donne $f'(y_n) = 0$.

$$\text{Alors } 0 = f'(y_n) = f(y_n) - f(y_{n-1});$$

$$m_n = f(y_n) = f(y_{n-1}) \geq \min_{\substack{t \in [n-1, n] \\ y_{n-1} \in [n-1, n]}} f(t) = m_{n-1}; \quad m_n \geq m_{n-1}.$$

3^{ème} cas... $y_n = n+1$. $\forall t \in [n, n+1], f(t) - f(n+1) \geq 0$.

$$0 \leq \int_n^{n+1} (f(t) - f(n+1)) dt = \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n+1) = 0$$

Alors $\int_n^{n+1} (f(t) - f(n+1)) dt = 0$. Comme $t \mapsto f(t) - f(n+1)$ est continue et positive sur $[n, n+1]$,

$\forall t \in [n, n+1], f(t) - f(n+1) = 0$. $\forall t \in [n, n+1], f(t) = f(n+1)$.

En particulier $m_n = f(n+1) = f(n) \geq \inf_{t \in [n-1, n]} f(t) = m_{n-1}$; $m_n \geq m_{n-1}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, m_n \geq m_{n-1}$.

$(m_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et $(M_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}, m_n \leq M_n \leq M_0$; $(m_n)_{n \geq 0}$ est majorée... et croissante donc convergente.

$\forall n \in \mathbb{N}, m_0 \leq m_n \leq M_n$; $(M_n)_{n \geq 0}$ est minorée... et décroissante donc convergente.

Les suites $(m_n)_{n \geq 0}$ et $(M_n)_{n \geq 0}$ convergent.

(Q2) a) Soit f une primitive de f sur $\mathbb{R}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{x+1} f(t) dt = F(x+1) - F(x)$. $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto F(x)$ étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \int_x^{x+1} f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $x \mapsto f(x+1) - f(x)$.

On montre de même que $x \mapsto \int_x^{x+1} t f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $x \mapsto (x+1)f(x+1) - x f(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_x^{x+1} t f(t) dt - x \int_x^{x+1} f(t) dt$. ce qui précédemment permet alors

d'affirmer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (x+1)f(x+1) - x f(x) - \int_x^{x+1} f(t) dt - x(f(x+1) - f(x))$.

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f(x+1) - \int_x^{x+1} f(t) dt = 0$ car $f \in \mathcal{E}_2(\mathbb{R})$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée nulle sur $\mathbb{R}$. g est alors constante sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = g(0) = 1/2$.

b) soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in [n, +\infty[$.

soit $y \in [n, +\infty[$. Montrons que $f(y) \leq \pi_n$.

Pour $y \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$ et $r \leq y \leq r+1$. Alors $f(y) \leq \pi_r = \max_{t \in [r, r+1]} f(t)$.

$y \geq n$ donc $r = \mathbb{E}(y) \geq n$; $\pi_r \leq \pi_n$; $f(y) \leq \pi_n$.

$\forall y \in [n, +\infty[$, $f(y) \leq \pi_n$. $\uparrow (\pi_i)_{i \geq 0}$ est décroissante.

$x \geq n$ donc $\forall t \in [x, x+1]$, $f(t) \leq \pi_n$.

$\forall t \in [x, x+1]$, $0 \leq f(t) - \pi_n$ et $0 \leq (t-x)$; $\forall t \in [x, x+1]$, $0 \leq (t-x)(\pi_n - f(t))$.

$$\text{Alors } 0 \leq \int_x^{x+1} (t-x)(\pi_n - f(t)) dt.$$

$\forall t \in [x, x+1]$, $0 \leq t-x \leq 1$ et $0 \leq \pi_n - f(t)$.

$$\forall t \in [x, x+1], (t-x)(\pi_n - f(t)) \leq \pi_n - f(t). \quad \int_x^{x+1} (t-x)(\pi_n - f(t)) dt \leq \int_x^{x+1} (\pi_n - f(t)) dt$$

$$\text{Or } \int_x^{x+1} (\pi_n - f(t)) dt = \pi_n - \int_x^{x+1} f(t) dt = \pi_n - f(x+1); \text{ donc } \int_x^{x+1} (t-x)(\pi_n - f(t)) dt \leq \pi_n - f(x+1).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [n, +\infty[, 0 \leq \int_x^{x+1} (t-x)(\pi_n - f(t)) dt \leq \pi_n - f(x+1).$$

soit $n \in \mathbb{N}$. Soit x_{n+1} un élément de $[n+1, n+2]$ tel que $f(x_{n+1}) = \pi_{n+1}$.

Pour $x = x_{n+1} - 1$; $x \in [n, n+1]$; $x \in [n, +\infty[$!

$$\text{Alors } 0 \leq \int_x^{x+1} (t-x)(\pi_n - f(t)) dt \leq \pi_n - f(x+1) = \pi_n - f(x_{n+1}) = \pi_n - \pi_{n+1}.$$

$$\int_x^{x+1} (t-x)(\pi_n - f(t)) dt = \pi_n \int_x^{x+1} (t-x) dt - g(x) = \pi_n \left[\frac{(t-x)^2}{2} \right]_x^{x+1} - \frac{L}{2} = \pi_n \frac{1}{2} - \frac{L}{2} = \frac{\pi_n - L}{2}$$

$$\text{Alors } 0 \leq \frac{\pi_n - L}{2} \leq \pi_n - \pi_{n+1}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{\pi_n - L}{2} \leq \pi_n - \pi_{n+1}.$$

□ soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in [x, +\infty[$.

soit $y \in [x, +\infty[$. Posons $r = E(y)$. $r \geq n$ et $r \leq y < r+1$.

Alors $f(y) \geq m_r \geq m_n$. Ainsi $\forall y \in [x, +\infty[$, $f(y) - m_n \geq 0$.

$\forall t \in [x, x+1]$, $0 \leq f(t) - m_n$ et $t - x \geq 0$ (car $x \geq n$).

$\forall t \in [x, x+1]$, $0 \leq (t-x)(f(t) - m_n)$

En intégrant il vient : $0 \leq \int_x^{x+1} (t-x)(f(t) - m_n) dt = f(x) - m_n \int_x^{x+1} (t-x) dt$

$$0 \leq \int_x^{x+1} (t-x)(f(t) - m_n) dt = \frac{L}{2} - m_n \left[\frac{(t-x)^2}{2} \right]_x^{x+1} = \frac{L}{2} - \frac{m_n}{2} = \frac{L - m_n}{2}.$$

$\forall t \in [x, x+1]$, $0 \leq t-x \leq 1$ et $f(t) - m_n \geq 0$.

$\forall t \in [x, x+1]$, $(t-x)(f(t) - m_n) \leq f(t) - m_n$. En intégrant ($x \leq x+1$) il vient :

$$\int_x^{x+1} (t-x)(f(t) - m_n) dt \leq \int_x^{x+1} (f(t) - m_n) dt = \int_x^{x+1} f(t) dt - m_n = f(x+1) - m_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [n, +\infty[, 0 \leq \int_x^{x+1} (t-x)(f(t) - m_n) dt = \frac{L - m_n}{2} \leq f(x+1) - m_n.$$

soit $n \in \mathbb{N}$. $\exists \hat{x}_{n+1} \in [x+1, x+2]$, $f(\hat{x}_{n+1}) = m_{n+1}$. Posons $x = \hat{x}_{n+1} - 1$.

Alors $x \in [n, +\infty[$ donc $0 \leq \frac{L - m_n}{2} \leq f(x+1) - m_n = f(\hat{x}_{n+1}) - m_n = m_{n+1} - m_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{L - m_n}{2} \leq m_{n+1} - m_n.$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (m_{n+1} - m_n) = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (m_{n+1} - m_n)$ car les suites $(m_n)_{n \geq 0}$ et $(m_n)_{n \geq 0}$ convergent.

Alors par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L - m_n}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L - m_n}{2} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = L$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [x, x+1]$, $m_n \leq f(x) \leq m_n$ donc $\forall x \in [0, +\infty[, m_{E(x)} \leq f(x) \leq m_{E(x)}$

à $\lim_{x \rightarrow +\infty} E(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} m_{E(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} m_{E(x)} = L$.

on encadrement il vient alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

PARTIE IV

Q1) a) soit $x \in \mathbb{R}$. $u_0(x) = \int_{x-1}^x |f(t)|^2 dt - 2f(x) \int_{x-1}^x f(t) dt + (f(x))^2 \int_{x-1}^x 1 dt$.

comme $f \in E_1(\phi) : u_0(x) = \phi(f')(x) - 2f(x)f'(x) + (f(x))^2 \phi(1) = (\phi(f') - f^2)(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, u_0(x) = (\phi(f') - f^2)(x)$. $u_0 = \phi(f') - f^2$.

b) $f \in E_1(\phi)$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$; f' également $\in \mathcal{I} \otimes \mathcal{A} \dots$

f' est continue sur $\mathbb{R}$, $\phi(f')$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \phi(f')(x) = f'(x) - f^2(x-1)$

Ainsi u_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$. $f \in E_1(\phi)$

$\forall x \in \mathbb{R}, u_0'(x) = \phi(f')(x) - (f(x))^2 = \phi(f')(x) - (\phi(f)(x))^2$.

$\forall x \in \mathbb{R}, u_0'(x) = f'(x) - f'(x-1) - 2(f(x) - f(x-1))\phi(f)(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, u_0'(x) = f'(x) - f'(x-1) - 2(f(x) - f(x-1))f(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, u_0'(x) = (f(x) - f(x-1))(f(x) + f(x-1) - 2f(x)) = -(f(x) - f(x-1))^2 \leq 0$.

u_0 est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Q2) a) par récurrence que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, u_n est définie, continue et décroissante sur $\mathbb{R}$.

. Et est vrai pour $n=0$.

. Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$u_n \in \mathcal{B}^0(\mathbb{R})$ donc $u_{n+1} = \phi(u_n)$ existe et appartient à $\mathcal{B}^0(\mathbb{R})$.

Comme $u_{n+1} = \phi(u_n)$ et comme u_n est décroissante sur $\mathbb{R}$, d'après 1.9.1 c) u_{n+1} est décroissante sur $\mathbb{R}$. Ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est définie, continue et décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) doit être . doit $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall t \in [x-1, x], u_n(t) \geq u_n(x); \int_{x-1}^x u_n(t) dt \geq \int_{x-1}^x u_n(x) dt = u_n(x).$$

$$\text{Alors } u_{n+1}(x) = \int_{x-1}^x u_n(t) dt \geq u_n(x).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) \geq u_n(x). \quad \underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}, (u_n(x))_{n \geq 0} \text{ est croissante.}}}$$

$$c) \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \phi(u_{n-1}); \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \phi^n(u_0).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \phi^n(\phi(f') \cdot f') = \phi^{n+1}(f') - \phi^n(f').$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (\phi^{k+1}(f') - \phi^k(f')) = \phi^{n+1}(f') - \phi^0(f').$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = \phi^{n+1}(f') \cdot f'.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) \geq u_0(x) \geq 0 \quad ((u_n(x))_{n \geq 0} \text{ est croissante pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) \geq 0.$$

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \left(\sum_{k=0}^n u_k \right)(x) \geq 0.$$

$$\text{particulier pour } x=0 \text{ que : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \phi^n(f')(x) \leq \pi^2.$$

$$\cdot \phi^0(f') = f'. \quad \forall x \in \mathbb{R}, \phi^0(f')(x) = f'(x) \leq \pi^2 \text{ car } \pi = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

• Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi^{n+1}(f')(x) = \int_{x-1}^x \phi^n(f')(t) dt \leq \int_{x-1}^x \pi^2 dt = \pi^2. \text{ Ainsi l'achève la récurrence.}$$

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \phi^n(f')(x) \leq \pi^2.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \left(\sum_{k=0}^n u_k \right)(x) = \phi^{n+1}(f')(x) - f'(x) \leq \phi^{n+1}(f')(x) \leq \pi^2.$$

$$\text{Alors } \underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \sum_{k=0}^n u_k(x) \leq \pi^2.}}$$

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. La série de terme général $u_n(x)$ est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée par x^2 . Elle est par conséquent convergente et ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. $(u_n(x))_{n \geq 0}$ est croissante et converge vers 0 d.a.c.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) \leq 0$. A nous en suit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) \geq 0$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) = 0$. En particulier $u_0(x) = 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, u_0(x) = 0. \quad \forall x \in \mathbb{R}, \int_{x-1}^x (f(t) - f(x))^2 dt = 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$t \mapsto (f(t) - f(x))^2 \text{ est continue et positive sur } \mathbb{R}, x \neq x-1 \text{ et } \int_{x-1}^x (f(t) - f(x))^2 dt = 0.$$

$$\text{Alors } \forall t \in [x-1, x], (f(t) - f(x))^2 = 0. \quad \forall t \in [x-1, x], f(t) = f(x).$$

ceci signifie que f est constante sur $[x-1, x]$.

f est constante sur $[x-1, x]$ pour tout x dans $\mathbb{R}$ alors f est constante

sur $\mathbb{R}$. (*)

f est constante sur $\mathbb{R}$.

(*) les méchants pourront faire la démonstration suivante.

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, 1], f(t) = \lambda \quad (f \text{ est constante sur } [0, 1]).$$

On montre alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [n, n+1], f(t) = \lambda$ et $\forall t \in [-n-1, -n], f(t) = \lambda$. Mais tout est dit !

Tiens c'est déjà fini ! dommage cela commençait à devenir intéressant.